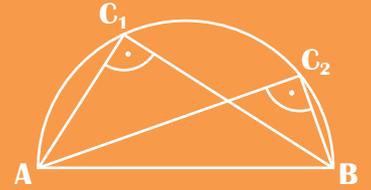


$$a + (a - 15) = 27$$

$$A = a \cdot h_a = b \cdot h_b$$

$$3 \cdot \left( \frac{1}{7} + \frac{3}{5} \right) =$$

NEUER  
LEHRPLAN



70%



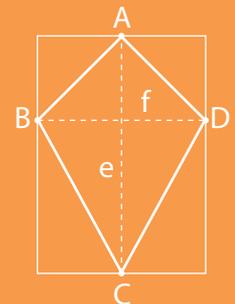
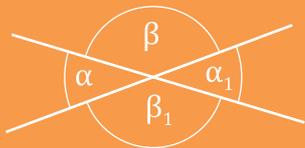
120 m<sup>2</sup>

# Mathe 2

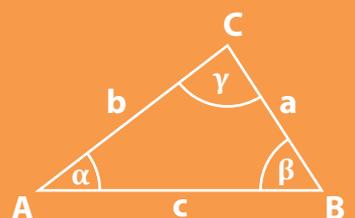
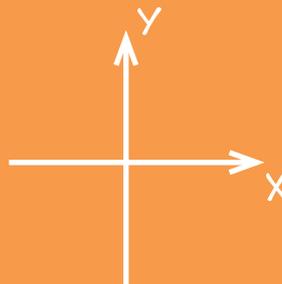
BENISCHEK | HAUER-TYPPELT |  
SATTLBERGER | STEINLECHNER-WALLPACH

$\frac{5}{3} : \frac{7}{8}$

1-21



KgV(7, 18)



50%

25%

25%





# Mathe 2

BENISCHEK | HAUER-TYPPELT |  
SATTLBERGER | STEINLECHNER-WALLPACH

## Übungsbuch als E-BOOK+

Auf einen Blick:

- Viele zusätzliche Übungen
- Unterschiedliche Übungsformate decken alle Handlungsbereiche des Kompetenzmodells ab
- Automatische Überprüfung der Aufgaben
- Online-Kompetenzchecks festigen die Theorie



Mit Bescheid des Bundesministeriums für Bildung, Wissenschaft und Forschung vom 1. Februar 2024, GZ 2023-0.332.963 gemäß den derzeit geltenden Lehrplänen als für den Unterrichtsgebrauch für die 2. Klasse an Mittelschulen im Unterrichtsgegenstand Mathematik (Lehrplan 2023), für die 2. Klasse an allgemein bildenden höheren Schulen – Unterstufe im Unterrichtsgegenstand Mathematik (Lehrplan 2023) geeignet erklärt.

Dieses Schulbuch wurde auf Grundlage des aktuellen Lehrplans erstellt; die Auswahl und Gewichtung der Inhalte erfolgen durch die Lehrerinnen und Lehrer.

Änderungen aufgrund von Veränderungen der Rechtsordnung und des Normenwesens, in der Statistik und im Bereich von Wirtschaftsdaten sowie Software-Aktualisierungen liegen in der Verantwortung des Verlags und werden nicht neuerlich approbiert.

**SBNR Buch + E-Book: 215987**  
**SBNR Buch mit E-BOOK+ : 215989**

**SBNR E-Book Solo: 215988**  
**SBNR E-BOOK+ Solo: 215990**

#### Kopierverbot



Wir weisen darauf hin, dass das Kopieren zum Schulgebrauch aus diesem Buch verboten ist - § 42 Absatz 6 Urheberrechtsgesetz: „... Die Befugnis zur Vervielfältigung zum eigenen Schulgebrauch gilt nicht für Werke. Die ihrer Beschaffenheit und Bezeichnung nach zum Schul- und Unterrichtsgebrauch bestimmt sind.“

#### Haftungshinweis:

Trotz sorgfältiger inhaltlicher Kontrolle können wir für die Inhalte externer Links keine Haftung übernehmen. Für den Inhalt der verlinkten Seiten sind ausschließlich deren Betreiberinnen und Betreiber verantwortlich.

Autorinnen und Verlag bitten, alle Anregungen und Vorschläge, die dieses Schulbuch betreffen, an folgende Adresse zu senden:

Verlag Hölder-Pichler-Tempsky GmbH, Frankgasse 4, 1090 Wien

E-Mail: [service@hpt.at](mailto:service@hpt.at)

Schulbuchvergütung/Bildrechte © Bildrecht GmbH

1. Auflage 2024 (1,00)

© Verlag Hölder-Pichler-Tempsky GmbH, Wien 2024  
Alle Rechte vorbehalten. Jede Art der Vervielfältigung – auch auszugsweise – gesetzlich verboten.

Satz: Franz Tettinger, [www.donaugrafik.at](http://www.donaugrafik.at)  
Druck und Bindung: Brüder Glöckler GmbH, Wöllersdorf  
ISBN: 978-3-230-05479-1





Liebe Schülerin! Lieber Schüler!

Dein Wissen und Können in Mathematik werden sich auch in diesem Schuljahr wieder um viele Bereiche erweitern, du wirst dich mit Erscheinungen der Welt, mathematischen Gegenständen und Sachverhalten beschäftigen und zahlreiche interessante Aufgaben lösen. Inhalte aus der ersten Klasse werden wieder aufgegriffen, wiederholt und erweitert.

## Jedes Kapitel in deinem Mathematikbuch hat den gleichen Aufbau:

- Zu Beginn eines Kapitels werden die mathematischen Inhalte genau erklärt. Auf diesen ersten Seiten jedes Kapitels kannst du daher auch nachschlagen, wenn du etwas nachlesen möchtest.
- Im Anschluss daran erwarten dich viele unterschiedliche Aufgaben – im Buch oder online (hellblauer Rahmen bei den Aufgabennummern) – sowie Informationen oder geschichtliche Hinweise, die erklären, wie sich die Mathematik entwickelt hat.
- Da Mathematik mit vielen Bereichen des Alltags, der Berufswelt oder Wissenschaften verbunden ist, findest du zahlreiche Aufgaben, die diese Vernetzung widerspiegeln. Somit erweiterst du dein Wissen und Können auch in diesen Bereichen und kannst viele Dinge miteinander in Beziehung setzen.
- Einige Aufgaben sind mit Technologie, z. B. mit Excel, Geogebra oder einem Taschenrechner, zu bearbeiten. Diese Aufgaben sind mit einem **T** gekennzeichnet.
- Am Ende jedes Kapitels findest du ein schwierigkeitsgestuftes Aufgabenset. Die wesentlichen Inhalte des Kapitels werden hier in unterschiedlich schwierigen Paketen wiederholt. Paket A hat den geringsten, Paket B einen mittleren und Paket C den höchsten Schwierigkeitsgrad.
- Den Abschluss jedes Kapitels bilden mathematische Spielereien und Rätsel. Hier kannst du deine Kreativität besonders gut entfalten.

Zu diesem Buch gibt es viele **online-Materialien im E-Book+**:  
Zu jedem Kapitel findest du weitere **Übungsaufgaben**, mit den **Kompetenzchecks** und **Wissenschecks** kannst du dein Wissen überprüfen.



Das **Kompetenz-Modell** für Mathematik in der Sekundarstufe 1 ist auch Basis für dieses Buch.

## Die mathematischen Inhalte sind zu folgenden Bereichen zusammengefasst:

- (1) Zahlen und Maße
- (2) Variable und Funktionen
- (3) Figuren und Körper
- (4) Daten und Zufall

In all diesen Bereichen wirst du Sachsituationen aus dem Alltags- oder Berufsleben **modellieren**. Das bedeutet, dass du mit Hilfe von Mathematik realitätsnahe Aufgaben- und Problemstellungen lösen wirst. Du wirst dich in den vier Bereichen auch mit innermathematischen Aufgaben beschäftigen, die für dich keine Routineaufgaben sind. Das wird als **Problemlösen** bezeichnet. Weiters wirst du Rechenoperationen und Konstruktionen durchführen, was im Kompetenzmodell **operieren** und **rechnen** genannt wird. **Konstruieren** meint das Erstellen von Bildern geometrischer Objekte. Außerdem wirst du Sachverhalte darstellen, Darstellungen interpretieren, **Vermutungen** aufstellen und **begründen**.

Die Kapitel des Buches sind den inhaltlichen Bereichen des Kompetenzmodells folgendermaßen zugeordnet:

- (1) Zahlen und Maße: Kapitel 1, 2, 3, 4, 5, 6
- (2) Variable und Funktionen: Kapitel 7
- (3) Figuren und Körper: Kapitel 9, 10, 11
- (4) Daten und Zufall: Kapitel 8

Die Tabelle zeigt beispielhaft, wie ausgewählte Aufgaben aus Mathe 2 in das Kompetenzmodell eingeordnet werden.

	Modellieren und Problemlösen	Operieren (Rechnen und Konstruieren)	Darstellen und Interpretieren	Vermuten und Begründen
<b>Zahlen und Maße</b>	46, 129  170, 196, 329, 333, 386, 403, 461, 463	85  211, 243, 303, 324, 404, 417, 446, 483	90  137, 147, 293, 312, 378, 443	47, 49, 50, 61, 63, 65, 70, 76, 77  179, 197, 234, 341, 372, 374, 381
<b>Variable und Funktionen</b>	535, 550, 554	527, 572	532, 576	568, 588
<b>Figuren und Körper</b>	713, 796, 810, 815, 910, 938, 1026, 1027	682, 717, 783, 794, 918, 941 953, 987	688, 828, 858 972, 983	709, 779, 788, 797, 832, 934, 937, 970, 976
<b>Daten und Zufall</b>	635, 638	616, 617, 619a, 619b, 621a, 627, 631	611, 613, 619c, 621b, 625, 636, 641, 642	612, 621c, 624

Darüber hinaus werden Themen aufgegriffen, die auch in anderen Unterrichtsgegenständen thematisiert werden. Zu diesen **übergreifenden Themen** zählen unter anderem: Bildungs-, Berufs- und Lebensorientierung; Entrepreneurship Education; Informatische Bildung; Medienbildung; Politische Bildung; Sprachliche Bildung und Lesen; Umweltbildung und nachhaltige Entwicklung; Wirtschafts-, Finanz- und Verbraucher/innenbildung.

Aufgaben, die einen engen Bezug zu einem dieser übergreifenden Themen haben, werden in der Tabelle auf S. 232 übersichtlich aufgelistet.

Wir wünschen dir viel Freude beim Lernen und Üben mit deinem Mathematikbuch!

# Inhaltsverzeichnis

## Kompetenzbereich 1: Zahlen und Maße

<b>1. Einstieg</b>	<b>7</b>
1.1 Übungsaufgaben zum Einstieg	7
<b>2. Vielfache und Teiler natürlicher Zahlen</b>	<b>12</b>
2.1 Teiler, Vielfache, Primzahlen und Teilbarkeitsregeln	12
2.2 Übungsaufgaben zu Vielfache und Teiler natürlicher Zahlen	17
Schwierigkeitsgestuftes Aufgabenset	27
Mathematische Spielereien und Rätsel	30
<b>3. Brüche</b>	<b>31</b>
3.1 Darstellen von Brüchen	31
3.2 Brüche und Dezimalzahlen	33
3.3 Addieren und Subtrahieren von Brüchen	34
3.4 Multiplizieren von Brüchen	35
3.5 Dividieren von Brüchen	37
3.6 Übungsaufgaben zu Brüchen	39
Schwierigkeitsgestuftes Aufgabenset	55
Mathematische Spielereien und Rätsel	58
<b>4. Ganze Zahlen</b>	<b>60</b>
4.1 Positive und negative ganze Zahlen	60
4.2 Addieren und Subtrahieren	61
4.3 Übungsaufgaben zu ganzen Zahlen	62
Schwierigkeitsgestuftes Aufgabenset	68
Mathematische Spielereien und Rätsel	71
<b>5. Direkte und indirekte Proportionalität</b>	<b>72</b>
5.1 Direkte Proportionalität	72
5.2 Indirekte Proportionalität	74
5.3 Übungsaufgaben zu direkter und indirekter Proportionalität	76
Schwierigkeitsgestuftes Aufgabenset	88
Mathematische Spielereien und Rätsel	91
<b>6. Prozentrechnung</b>	<b>93</b>
6.1 Prozente als Brüche	93
6.2 Prozentpunkte	95
6.3 Promillerechnung	96
6.4 Übungsaufgaben zur Prozent- und Promillerechnung	96
Schwierigkeitsgestuftes Aufgabenset	110
Mathematische Spielereien und Rätsel	113
<b>7. Gleichungen, Terme, Formeln</b>	<b>114</b>
7.1 Variable und Terme	114
7.2 Gleichungen und Formeln	115
7.3 Übungsaufgaben zu Gleichungen, Termen, Formeln	116
Schwierigkeitsgestuftes Aufgabenset	126
Mathematische Spielereien und Rätsel	129

## Kompetenzbereich 2: Variable und Funktionen

Kompetenzbereich 3:  
Daten und Zufall

**8. Arbeiten mit Daten 131**

8.1 Absolute und relative Häufigkeiten ..... 131  
8.2 Grafische Darstellungen..... 132  
8.3 Statistische Kennzahlen ..... 134  
8.4 Baumdiagramme ..... 135  
8.5 Übungsaufgaben zu Arbeiten mit Daten..... 137

Schwierigkeitsgestufte Aufgabenset..... 149  
Mathematische Spielereien und Rätsel..... 155

Kompetenzbereich 4:  
Figuren und Körper

**9. Kartesisches Koordinatensystem und Symmetrie 156**

9.1 Aufbau, Punkte und Koordinaten ..... 156  
9.2 Übungsaufgaben zum Koordinatensystem ..... 159  
9.3 Achsensymmetrische Figuren ..... 163  
9.4 Übungsaufgaben zur Symmetrie ..... 164

Schwierigkeitsgestuftes Aufgabenset..... 169  
Mathematische Spielereien und Rätsel..... 172

**10. Dreiecke 174**

10.1 Eigenschaften und Konstruktion von Dreiecken..... 174  
10.2 Übungsaufgaben zu Eigenschaften und Konstruktion von Dreiecken ..... 179  
10.3 Merkwürdige Punkte im Dreieck..... 190  
10.4 Übungsaufgaben zu den merkwürdigen Punkten im Dreieck..... 192  
10.5 Berechnung der Flächeninhalte von Dreiecken..... 194  
10.6 Übungsaufgaben zur Berechnung der Flächeninhalte von Dreiecken ..... 196

Schwierigkeitsgestuftes Aufgabenset..... 198  
Mathematische Spielereien und Rätsel..... 201

**11. Vierecke 202**

11.1 Eigenschaften von Vierecken ..... 202  
11.2 Parallelogramm..... 204  
11.3 Übungsaufgaben zu Eigenschaften von Vierecken und  
zum Parallelogramm..... 205  
11.4 Trapez..... 213  
11.5 Deltoid (Drachenviereck)..... 214  
11.6 Übungsaufgaben zu Trapez, Deltoid und allgemeinen Vierecken ..... 216

Schwierigkeitsgestuftes Aufgabenset..... 225  
Mathematische Spielereien und Rätsel..... 228

**Anhang**

Stichwortverzeichnis ..... 230  
Fächerübergreifende Themen ..... 232  
Quellenverzeichnis..... 236

Wenn ich an Mathematik in der ersten Klasse denke, dann fallen mir viele Dinge ein: Rechnen mit natürlichen Zahlen und Dezimalzahlen, Brüche, viele Maßeinheiten, Gleichungen, Daten sammeln und darstellen, Flächen und Körper.

Um gut in das neue Schuljahr starten zu können, kannst du in diesem Kapitel Aufgaben zur Wiederholung bearbeiten.

In diesem Kapitel beschäftigst du dich mit ...

- Zahlen und Rechnungen.
- Brüchen und Termen.
- Größen und Maßeinheiten.
- Daten.
- Flächen und Körpern.



## 1.1 Übungsaufgaben zum Einstieg

1 Rechnen mit natürlichen Zahlen.

(1) Löse die folgenden Aufgaben schriftlich oder im Kopf.

(2) Bei welchen Ausdrücken handelt es sich um Summen, Differenzen, Produkte oder Quotienten? Schreibe S für Summe, D für Differenz, P für Produkt oder Q für Quotient zu den Aufgaben.

- |                           |                             |                              |
|---------------------------|-----------------------------|------------------------------|
| a) $127 - 86 =$ _____     | b) $2\,526 : 3 =$ _____     | c) $587 \cdot 24 =$ _____    |
| d) $3\,875 - 125 =$ _____ | e) $965 + 12 + 758 =$ _____ | f) $2\,497 \cdot 19 =$ _____ |
| g) $183 \cdot 10 =$ _____ | h) $4\,608 : 12 =$ _____    | i) $3\,250 + 9\,851 =$ _____ |

2 Schreibe die entsprechenden Rechnungen an und berechne das Ergebnis.

- Berechne das Produkt, dessen Faktoren 3 und 12 sind.
- Berechne die Summe, deren Summanden 86 und 127 sind.
- Berechne die Differenz, deren Minuend 658 und deren Subtrahend 117 ist.
- Berechne den Quotienten, dessen Dividend 96 und dessen Divisor 8 ist.

3 Schreibe als Rechnung an und berechne das Ergebnis.

- 8,2 wird um 4,6 vermehrt. \_\_\_\_\_
- Die Zahl 14,3 wird verdoppelt. \_\_\_\_\_
- Wie groß ist der Unterschied zwischen 98,36 und 92,1? \_\_\_\_\_
- Die Zahl 67,6 wird um 24,14 vermindert. \_\_\_\_\_

4 Setze die Zeichen  $<$ ,  $=$ ,  $>$  richtig ein.

a)  $125 + 64,3$  \_\_\_\_\_  $95,2 + 79,1$

b)  $322 : 14$  \_\_\_\_\_  $96 - 73$

c)  $35 \cdot 9$  \_\_\_\_\_  $254 + 86$

d)  $225 : 45$  \_\_\_\_\_  $216 : 36$

e)  $37,2 \cdot 2$  \_\_\_\_\_  $148,8 : 2$

Die Spitze des Ungleichheitszeichens zeigt immer zur kleineren Zahl.



5 Berechne und beachte dabei die KLAPUSTRI-Regel.

a)  $125 - 12 + 5 =$  \_\_\_\_\_

b)  $(5,2 + 6,8) \cdot 3 =$  \_\_\_\_\_

c)  $30 - (15 - 10 - 2) \cdot 5 =$  \_\_\_\_\_

d)  $6 \cdot (1,3 + 0,7) + (8,9 - 7,2) =$  \_\_\_\_\_

**Vorrangregel – KLAPUSTRI**  
Zuerst die Klammern berechnen, dann die Punktrechnungen und dann erst die Strichrechnungen!



6 Schreibe mit Hilfe von Klammern an und berechne.

a) Die Summe von 19 und 31 wird um das Produkt von 8 und 6 vermindert.

b) Das Produkt der Summen  $5 + 6$  und  $3 + 4$  ist zu berechnen.

c) Der Quotient, dessen Dividend die Summe von 37 und 7 und dessen Divisor die Summe von 4 und 7 ist, ist zu berechnen.

7 Nadine überlegt: „Im neuen Schuljahr hatten wir jetzt schon 3 Unterrichtstage. An jedem Tag hatten wir 6 Unterrichtseinheiten mit jeweils 50 Minuten. Wie viele Minuten hatten wir somit schon Unterricht? Wie viele Sekunden sind das?“

**Zeitmaße**



8 Die Anzahl der Flügelschläge einer Wespe beträgt etwa 23 in einer Sekunde.

a) Wie viele Flügelschläge macht die Wespe in einer Minute bzw. in einer Viertelstunde, wenn sie ihre Flügel immer gleich schnell bewegt?

b) Wie groß ist die Anzahl der Flügelschläge, wenn die Wespe an einem Tag 3 Stunden fliegt?



9 Bei welcher Zahl steht 7 an der Hunderterstelle? Kreuze an.

24 571,17

891 752,71

17 269,73

794 682,27

10 Kreuze jene Zahlen an, bei denen 5 an der Zehntelstelle steht, und kreise jene Zahlen ein, bei denen 5 an der Hundertstelstelle steht.

12 550,24

95 624, 524

369 526,357

1 247,5

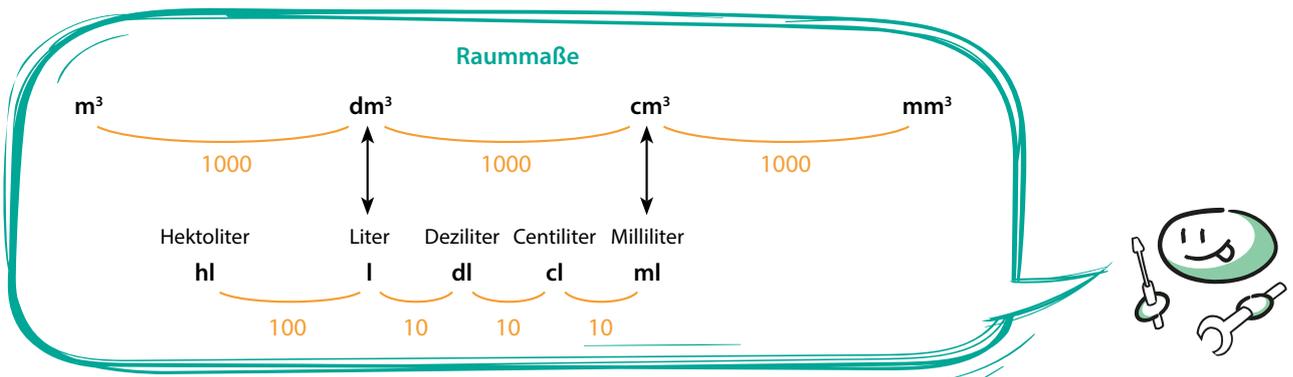
230,0547

11 Fülle die Tabelle aus.

	· 10	· 100	· 1 000	· 0,1	· 0,01	· 0,001
28						
36,5						
0,43						
0,028						

12 Fülle die Tabelle aus.

	: 10	: 100	: 1 000	: 0,1	: 0,01	: 0,001
260						
1,6						
35,8						
0,07						



13 Das menschliche Herz pumpt bei einem Herzschlag etwa 70 cm<sup>3</sup> Blut in den Körper. Bei ruhigen Beschäftigungen schlägt es in einer Minute durchschnittlich 70 Mal (Ruhepuls), bei großer Anstrengung durchschnittlich 180 Mal (Belastungspuls).



- Dein Körper hat etwa 5 Liter Blut. Wie lange braucht dein Herz, bis es diese Menge gepumpt hat?
- Wie viel Liter Blut pumpt dein Herz in einer Stunde, wenn du dich dabei ausruhst?
- Wie viel Liter Blut pumpt dein Herz in 20 Minuten, wenn du intensiv Sport betreibst?
- Wie viel Liter Blut hat dein Herz in einer Stunde gepumpt, wenn du dich 20 Minuten ausgeruht und danach 40 Minuten intensiv Sport getrieben hast?
- Wie viel Liter Blut befördert ein Herz in 80 Jahren? Gehe dabei von durchschnittlich 80 Schlägen pro Minute aus.  
Ein Tanklastzug fasst 40 000 l und ist 10 m lang. Wie viele solcher Tanklastzüge bräuchte es, wenn jene mit dieser Menge Blut gefüllt werden würden? Wie lange wäre die Strecke, wenn alle diese Tanklastzüge hintereinanderstehen würden? Runde sinnvoll.

- 14 Sara möchte Socken kaufen. Im Sonderangebot kostet die Dreierpackung 4,99 €, beim Discounter kostet die Einzelpackung 1,49 €. Vergleiche die beiden Angebote.  
Wann ist es aus deiner Sicht besser, die Dreierpackung zu kaufen, und wann ein einzelnes Paar Socken?

- 15 Ein Liter Kuhmilch wiegt 1,028 kg und besteht zum Großteil aus Wasser. Die weiteren Inhaltsstoffe sind: 0,041 kg Milchfett, 0,05 kg Milchzucker, 0,035 kg Milcheiweiß, 0,007 kg Vitamine und Mineralstoffe. Berechne, wie viel kg Wasser in einem Liter Kuhmilch enthalten sind.



- 16 Jeder Buchstabe steht für eine andere Ziffer.  
Wie heißt die Rechnung? Gibt es mehrere Lösungen?

$$\begin{array}{r} \text{G A U S S} \\ + \text{R I E S E} \\ \hline \text{E U K L I D} \end{array}$$

In der Aufgabe sind die Namen von drei berühmten Mathematikern verwendet worden. Recherchiere über diese im Internet.



- 17 Verbinde Brüche und Dezimalzahlen, die denselben Wert haben.

$\frac{1}{2}$		0,75
$\frac{3}{4}$		0,09
$\frac{3}{8}$		0,5
$\frac{9}{100}$		0,375

- 18 Auf dem Schild sind die Wegzeiten zu verschiedenen Wanderzielen angeführt. Gib die Wegzeiten als Bruchteil einer Stunde an.

Schwarzsee: \_\_\_\_\_  
 Alpenhotel: \_\_\_\_\_  
 Kitzbühel: \_\_\_\_\_  
 Steuerberg: \_\_\_\_\_  
 Gieringer Weiher: \_\_\_\_\_  
 Vogelsberger Weiher: \_\_\_\_\_



- 19 Welcher Term passt zum Text? Kreuze an.

Das Vierfache von x vermindert um y.

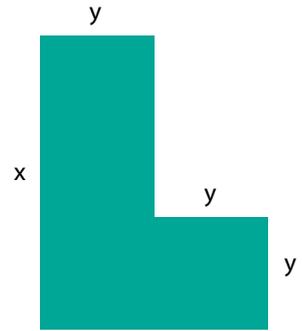
$4 \cdot (x - y)$

$4x - y$

$4x - 4y$

$(x - y) \cdot 4$

20 Gib eine Formel zur Berechnung des Umfangs und eine zur Berechnung des Flächeninhalts der nebenstehenden Figur an. Berechne anschließend Umfang und Flächeninhalt, wenn  $x = 12\text{ cm}$  und  $y = 5\text{ cm}$  lang sind.



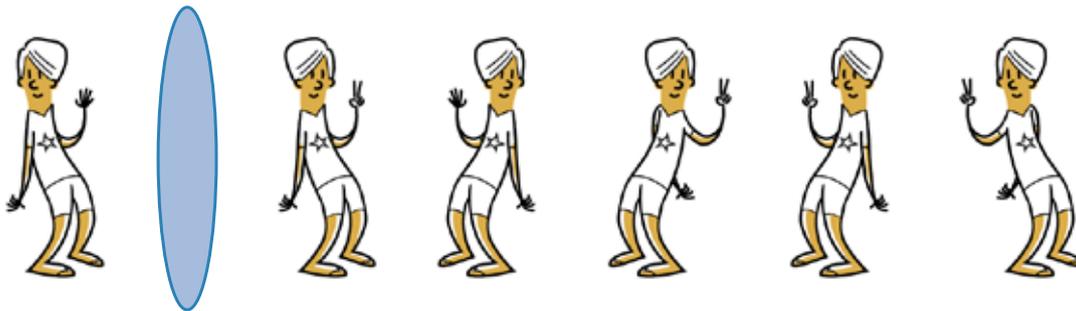
21 Bei der Wahl zur Klassensprecherin/zum Klassensprecher gab es folgende Stimmenverteilung: Anton: 6 Stimmen, Cloe: 8 Stimmen, Daniela: 3 Stimmen, Mehmet: 5 Stimmen.

- a) Erstelle ein Balkendiagramm. Du kannst auch Excel verwenden.
- b) Bestimme Minimum, Maximum und Spannweite.
- c) Warum ist die Berechnung des arithmetischen Mittelwerts hier nicht sinnvoll?

22 Nadine möchte sich im Eisgeschäft zwei Kugeln Eis bestellen. Es stehen 6 Sorten zur Auswahl. Wie viele Möglichkeiten hat Nadine für die Auswahl ihres Eises, wenn die beiden Kugeln unterschiedliche Sorten sein sollen?



23 Welches Spiegelbild passt? Kreuze an.



24 Die Zeiger der nebenstehenden Uhr schließen Winkel ein. Bestimme die Größe der beiden möglichen Winkel. Zu welchen Winkelarten gehören die beiden Winkel? \_\_\_\_\_



Lies auch die Uhrzeit ab. \_\_\_\_\_

25 Verfasse einen Beitrag für ein Mathematiklexikon, in dem du die Eigenschaften von Quadern beschreibst.

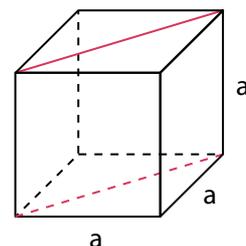
26 Ein Quader ist 5 cm lang, 4 cm breit und 7 cm hoch.

- a) Zeichne das Netz dieses Quaders.
- b) Berechne den Oberflächeninhalt.
- c) Stelle den Quader im Schrägriss dar.
- d) Berechne sein Volumen.

27 Ein Würfel hat eine Seitenlänge von  $a = 8\text{ cm}$ . Er wird diagonal in zwei gleich große Teile zerschnitten.

Berechne das Volumen eines Teils. \_\_\_\_\_

Welche Schnittfigur ist entstanden? \_\_\_\_\_

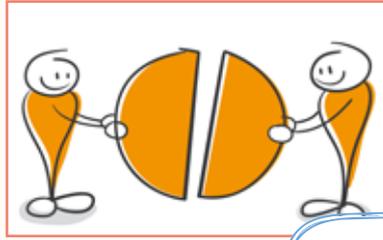


## 2. Kapitel

# Teiler und Vielfache natürlicher Zahlen



Das Wort „teilen“ hat im Alltag vielfältige Bedeutung.



In Mathe denke ich bei „teilen“ meist an dividieren.

In diesem Kapitel lernst du ...

- über Teiler und Vielfache von natürlichen Zahlen.
- was Primzahlen sind und warum diese Zahlen so besonders sind.
- wie du schnell erkennen kannst, ob eine Zahl durch eine andere Zahl teilbar ist.
- was ggT und kgV sind und wozu man sie verwenden kann.



## 2.1 Teiler, Vielfache, Primzahlen und Teilbarkeitsregeln

### Teiler und Vielfache

Schon seit der Volksschule kennst du Divisionen mit und ohne Rest.

BEISPIELE

$$12 : 3 = 4 \\ \text{OR}$$

$$13 : 3 = 4 \\ \text{1R}$$

Da bei der Division von 12 durch 3 kein Rest bleibt, nennt man 3 einen **Teiler** von 12.

12 ist ein **Vielfaches** von 3.  $12 = 4 \cdot 3$

3 ist kein Teiler von 13, weil 13 kein Vielfaches von 3 ist.

Bleibt bei einer Division einer natürlichen Zahl  $a$  durch eine natürliche Zahl  $b \neq 0$  kein Rest, dann heißt  $b$  **Teiler** von  $a$ . Die Zahl  $a$  ist ein **Vielfaches** der Zahl  $b$ .

Man sagt auch: „ $b$  teilt  $a$ “ oder „ $a$  ist durch  $b$  teilbar“.

In der Symbolsprache der Mathematik schreibt man kurz:  $b \mid a$

BEISPIELE

$$5 \text{ teilt } 20: 5 \mid 20$$

$$5 \text{ teilt } 16 \text{ nicht: } 5 \nmid 16$$

1 ist Teiler jeder natürlichen Zahl, denn bei der Division durch 1 bleibt kein Rest.

$$5 : 1 = 5 \quad 27 : 1 = 27 \quad \text{Für jede natürliche Zahl } n \text{ gilt } n : 1 = n.$$

Ebenso bleibt kein Rest, wenn man die natürliche Zahl durch sich selbst dividiert.

$$5 : 5 = 1 \quad 27 : 27 = 1 \quad \text{Für jede natürliche Zahl } n > 0 \text{ gilt } n : n = 1$$

Jede natürliche Zahl  $> 1$  hat daher mindestens zwei Teiler, 1 und sich selbst.

Viele natürliche Zahlen haben mehr als zwei Teiler.

## BEISPIELE

Die Zahl 6 hat vier Teiler: 1, 2, 3 und 6.

Die Zahl 12 hat sechs Teiler: 1, 2, 3, 4, 6 und 12.

Die Teiler 1 und die Zahl selbst werden als **unechte Teiler** bezeichnet, alle anderen Teiler heißen **echte Teiler**.

Die Zahl 12 hat also vier echte Teiler: 2, 3, 4 und 6.

### Primzahlen und Primfaktorenzerlegung

Natürliche Zahlen  $> 1$ , die nur durch 1 und sich selbst teilbar sind, heißen **Primzahlen**.

Primzahlen haben also keine echten Teiler.

Die kleinste Primzahl ist 2.

Weitere Primzahlen sind: 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ...

Primzahlen haben schon die Mathematiker des Altertums fasziniert. Der berühmte Euklid von Alexandria lebte etwa 300 v. Chr. und war einer der bedeutendsten Mathematiker der Antike. Viele seiner Erkenntnisse sind heute noch gültig.

Euklid setzte sich auch mit der Frage auseinander, wie viele Primzahlen es insgesamt gibt.

Seine Antwort darauf wird heute noch als „Theorem von Euklid“ bezeichnet: **Es gibt unendlich viele Primzahlen!**

Auch im Bereich der Geometrie kam Euklid zu bedeutenden Erkenntnissen, die Grundlage für viele nachfolgende Mathematikerinnen und Mathematiker wurden.



Zahlen, die echte Teiler haben, werden oft **zusammengesetzte Zahlen** genannt.

Denn mit Ausnahme von 0 und 1 lassen sich alle natürlichen Zahlen, die selbst keine Primzahlen sind, durch Multiplikation von Primzahlen erzeugen.

Primzahlen werden daher manchmal als „Bausteine der natürlichen Zahlen“ bezeichnet:

## BEISPIELE

$$6 = 2 \cdot 3 \quad 8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \quad 10 = 2 \cdot 5 \quad 12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$$

Da zusammengesetzte Zahlen als Produkte von Primzahlen dargestellt werden, nennt man die Faktoren auch **Primfaktoren**.

Will man die Primfaktoren von größeren Zahlen bestimmen, hilft die sogenannte **Primfaktorenzerlegung**.

Dabei wird der Reihe nach durch Primzahlen dividiert.

BEISPIEL

Primfaktorenzerlegung für 140.

140		2
70		2
35		5
7		7
1		

Rechts der Linie werden die Primfaktoren angeschrieben, links die entsprechenden Divisionsergebnisse.

Am Ende lassen sich auf der rechten Seite der Linie die Primfaktoren der Ausgangszahl ablesen:  
 $140 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7$

Dabei ist es nicht wichtig, dass du mit der kleinstmöglichen Primzahl beginnst. Manchmal ist es sogar schlauer mit einer möglichst großen Primzahl zu beginnen, um sich das Rechnen zu erleichtern.

BEISPIEL

190		19
10		2
5		5
1		

$$190 = 19 \cdot 2 \cdot 5$$

Wegen des Kommutativgesetzes der Multiplikation spielt die Reihenfolge der Primzahlen keine Rolle.

Pass auf, dass du tatsächlich nur durch Primzahlen dividierst und keine anderen Teiler verwendest.



### Teilbarkeitsregeln für ausgewählte Zahlen

Bedenkt man, welche Besonderheit alle Vielfachen von 10 haben, lässt sich daraus eine Teilbarkeitsregel für die Zahl 10 ableiten.

Ebenso kann man Teilbarkeitsregeln für die Zahlen 2 und 5 überlegen.

Deshalb gelten folgende Teilbarkeitsregeln für 2, 5 und 10.

**Teilbarkeit durch 2:** Eine Zahl ist genau dann durch 2 teilbar, wenn ihre Einerziffer 0, 2, 4, 6 oder 8 ist.

**Teilbarkeit durch 5:** Eine Zahl ist genau dann durch 5 teilbar, wenn ihre Einerziffer 0 oder 5 ist.

**Teilbarkeit durch 10:** Eine Zahl ist genau dann durch 10 teilbar, wenn ihre Einerziffer 0 ist.

Da 6 aus den Primfaktoren 2 und 3 zusammengesetzt ist,  $6 = 2 \cdot 3$ , gilt:

**Teilbarkeit durch 6:** Eine Zahl ist genau dann durch 6 teilbar, wenn sie durch 2 und durch 3 teilbar ist.

Alle Vielfachen von 10 haben eine 0 an der Einerstelle.  
 Alle Vielfachen von 5 haben eine 0 oder eine 5 an der Einerstelle.  
 Alle Vielfachen von 2 haben an der Einerstelle eine gerade Zahl.



Für die weiteren Teilbarkeitsregeln verwenden wir die Summenregel und die Produktregel.

### Summen- und Produktregel

Wenn  $t$  ein Teiler von  $a$  und  $b$  ist, dann teilt  $t$  auch die Summe  $a + b$ .

Die Summenregel gilt auch bei mehr als 2 Summanden.

Wenn  $t$  ein Teiler von  $a$  ist, dann teilt  $t$  auch jedes Vielfache von  $a$ .

BEISPIELE

$$5 \mid 10 \text{ und } 5 \mid 25$$

$$\text{Daher gilt: } 5 \mid (10 + 25) \\ 5 \mid 35$$

$$7 \mid 28$$

$$\text{Daher gilt: } 7 \mid 13 \cdot 28 \\ 7 \mid 364$$

Die Teilbarkeitsregel von 3 ist nicht so einfach zu erkennen.

Es gilt der bekannte Ziffernsummen-Trick.

**Teilbarkeit durch 3:** Eine Zahl ist genau dann durch 3 teilbar, wenn ihre Ziffernsumme durch 3 teilbar ist.

### Warum gilt dieser Ziffernsummen-Trick für die Teilbarkeit durch 3?

Wir sehen uns eine Erklärung zunächst am Beispiel der Zahl 825 an.

Dazu schreiben wir die Zahl mit Hilfe der dekadischen Einheiten an und schreiben diese in einem weiteren Schritt als Summe an.

$$\begin{aligned} 825 &= 8 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 5 = \\ &= 8 \cdot (99 + 1) + 2 \cdot (9 + 1) + 5 = \\ &= 8 \cdot 99 + 8 + 2 \cdot 9 + 2 + 5 = \\ &= 8 \cdot 99 + 2 \cdot 9 + 8 + 2 + 5 \end{aligned}$$

Ziffernsumme



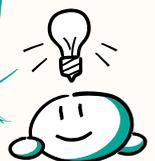
Nun können wir überlegen: Die ersten beiden Summanden ( $8 \cdot 99$  und  $2 \cdot 9$ ) sind auf jeden Fall durch 3 teilbar, denn sie sind jeweils ein Vielfaches von 9 und daher auch von 3. Und das ist unabhängig von den Ziffern 8 und 2.

Ob die ganze Summe durch 3 teilbar ist, hängt nur mehr von den letzten drei Summanden ab. Diese drei Summanden bilden die Ziffernsumme.

Jede Zahl kann nach diesem Muster angeschrieben werden. Hat sie mehr als drei Stellen, dann kommen Tausender, Zehntausender, ... ins Spiel, die ebenso zerlegt werden können:  $1\ 000 = 999 + 1$ ;  $10\ 000 = 9\ 999 + 1$ .

Man kommt immer auf dieselbe Überlegung: Alle Summanden, außer jenen, die die Ziffernsumme bilden, sind auf jeden Fall durch 3 teilbar, weil sie ein Vielfaches von 3 sind.

Damit hängt es immer nur von der Ziffernsumme ab, ob die Zahl durch 3 teilbar ist.



Für die Teilbarkeit durch 9 gelten dieselben Überlegungen wie für die Teilbarkeit durch 3.

**Teilbarkeit durch 9:** Eine Zahl ist genau dann durch 9 teilbar, wenn ihre Ziffernsumme durch 9 teilbar ist.

**Teilbarkeit durch 4:** Eine Zahl ist genau dann durch 4 teilbar, wenn die aus den letzten beiden Ziffern gebildete Zahl durch 4 teilbar ist oder wenn sie eine Hunderterzahl ist.

### Begründung:

Jede mehr als zweistellige Zahl lässt sich als Summe aus einem Vielfachen von Hundert und der aus den letzten beiden Ziffern gebildeten Zahl anschreiben.

$$\text{z. B. } 5\,365 = 53 \cdot 100 + 65$$

Der erste Summand ist unabhängig von den involvierten Ziffern (hier 5 und 3) immer durch 4 teilbar, weil 100 durch 4 teilbar ist. Damit hängt die Teilbarkeit durch 4 nur vom zweiten Summand ab. Im Beispiel ist das 65. 65 ist nicht durch 4 teilbar und damit ist die gesamte Zahl, 5 365, nicht durch 4 teilbar.

### Größter gemeinsamer Teiler (ggT)

Der **größte gemeinsame Teiler (ggT)** von mehreren Zahlen ist die größte Zahl, die ein Teiler all dieser Zahlen ist.

Ist der größte gemeinsame Teiler zweier Zahlen 1, dann nennt man sie teilerfremd.

#### BEISPIELE

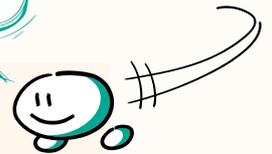
- größter gemeinsamer Teiler von 12 und 16:
- größter gemeinsamer Teiler von 18 und 45:
- größter gemeinsamer Teiler von 8, 16, 32:
- größter gemeinsamer Teiler von 12 und 13:

$$\text{ggT}(12, 16) = 4$$

$$\text{ggT}(18, 45) = 9$$

$$\text{ggT}(8, 16, 32) = 8$$

$$\text{ggT}(12, 13) = 1$$



### Kleinstes gemeinsames Vielfaches (kgV)

Das **kleinste gemeinsame Vielfache (kgV)** von mehreren Zahlen ist die kleinste Zahl, die ein Vielfaches dieser Zahlen ist.

#### BEISPIELE

- kleinstes gemeinsames Vielfaches von 2 und 5:
- kleinstes gemeinsames Vielfaches von 10 und 12:
- kleinstes gemeinsames Vielfaches von 3, 4, 6:

$$\text{kgV}(2, 5) = 10$$

$$\text{kgV}(10, 12) = 60$$

$$\text{kgV}(3, 4, 6) = 12$$

Die **Primfaktorenzerlegung** kann beim Finden von ggT und kgV helfen.

#### BEISPIEL

Bestimme den größten gemeinsamen Teiler von 60 und 18.

Der größte gemeinsame Teiler (ggT) ist aus jenen Primfaktoren zusammengesetzt, die in beiden Zahlen enthalten sind.

60	2	18	2
30	2	9	3
15	3	3	3
5	5	1	
1			

$$\text{ggT}(60, 18) = 2 \cdot 3 = 6$$

Tipp: Das Markieren der Primfaktoren, die in beiden Zerlegungen vorkommen, kann dir beim Finden von ggT und kgV helfen.



BEISPIEL

Bestimme das kleinste gemeinsame Vielfache von 60 und 18.

Das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) zweier Zahlen muss alle Primfaktoren enthalten, die notwendig sind, um beide Zahlen zu bilden. Mehr Primfaktoren darf es nicht enthalten, sonst ist es nicht das kleinste gemeinsame Vielfache.

60		2		18		2
30		2		9		3
15		3		3		3
5		5		1		
1						

Zu den Primfaktoren der größeren Zahl  $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$  wird der Faktor 3 aus den Primfaktoren der kleineren Zahlen ergänzt, sodass auch  $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$  gebildet werden kann.

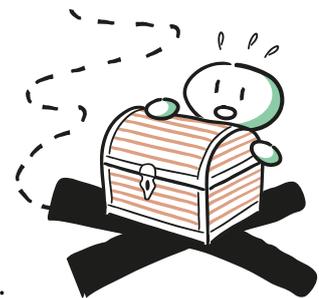
$kgV(60, 18) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 180$

## 2.2 Übungsaufgaben zu Teilern und Vielfachen

28 Der Begriff „teilen“ kommt im Alltag in verschiedenen Zusammenhängen vor. Recherchiere unterschiedliche Möglichkeiten und gib jeweils die Bedeutung von „teilen“ im Zusammenhang an.

29 Muss „teilen“ im Kontext des Aufteilens immer heißen, dass alle gleich viel bekommen? Wenn nicht, ist das dann auch gerecht? Diskutiert in der Klasse.

30 An einer Schatzsuche nehmen 12 Kinder teil. Welche Gruppengrößen können gebildet werden, wenn in jeder Gruppe gleich viele Kinder sein sollen? Welche Möglichkeiten würdest du aussuchen? Begründe deine Entscheidung.



31 Setze das Zeichen | (teilt) oder das Zeichen ∤ (teilt nicht) richtig ein.

- |             |          |          |          |           |
|-------------|----------|----------|----------|-----------|
| a) 2 ___ 15 | 3 ___ 15 | 4 ___ 15 | 5 ___ 15 | 6 ___ 15  |
| b) 2 ___ 24 | 3 ___ 24 | 4 ___ 24 | 5 ___ 24 | 6 ___ 24  |
| c) 3 ___ 30 | 4 ___ 30 | 5 ___ 30 | 6 ___ 30 | 10 ___ 30 |

32 Kreise alle Zahlen ein, die Teiler von 40 sind.

- 2 3 4 5 6 7 8 9 10 15 20

33 Kreise alle Zahlen ein, die Teiler von 36 sind.

- 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13



34 Kreuze alle Aussagen an, die gleichbedeutend sind mit der Aussage „x ist ein Teiler von y“. Dabei stehen x und y für natürliche Zahlen.

- Die Zahl y ist ein Vielfaches von x.
- x ist durch y teilbar.
- Die Zahl y teilt x.
- Die Division von x durch y ergibt eine natürliche Zahl und 0 Rest.
- $x \leq y$

35 Markiere alle Zahlen, die ein Vielfaches von 4 sind.

8      10      12      14      16      18      20      22      24      26      28

36 Die vorangehende Aufgabe hätte man auch so formulieren können: „Markiere alle Zahlen, die 4 teilt.“ Welche anderen Formulierungen wären noch möglich?

37 Markiere alle Zahlen, die ein Vielfaches von 12 sind.

20      24      30      36      48      58      60      66      74      80      84

38 Entscheide, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Begründe deine Antwort.  
Beispiel: 6 ist ein Teiler von 72. Richtig, denn 72 ist ein Vielfaches von 6 ( $6 \cdot 12 = 72$ ).

a) 8 ist ein Teiler von 72. \_\_\_\_\_, denn \_\_\_\_\_.

b) 12 ist ein Teiler von 50. \_\_\_\_\_, denn \_\_\_\_\_.

c) 4 ist ein Teiler von 42. \_\_\_\_\_, denn \_\_\_\_\_.

d) 5 ist ein Teiler von 150. \_\_\_\_\_, denn \_\_\_\_\_.

39 Erfinde mindestens drei Beispiele wie in der vorigen Aufgabe. Gib sie einer Kollegin oder einem Kollegen zum Lösen.

40 **T** Arbeite technologieunterstützt (z. B. Taschenrechner oder Recher-App eines Smartphones). Setze das Zeichen | (teilt) oder das Zeichen  $\nmid$  (teilt nicht) richtig ein.

38 \_\_\_ 266      97 \_\_\_ 1 165      132 \_\_\_ 17 688      248 \_\_\_ 37 996      307 \_\_\_ 46 050

41 Kreuze die richtigen Aussagen an.

- 6 ist ein Teiler von 70.
- 8 teilt 68.
- 9 ist ein Teiler von 72.
- 72 ist ein Vielfaches von 6.
- 64 ist durch 8 teilbar.
- 7 ist ein Teiler von 59.



42 Die 2a plant den Besuch einer Ausstellung. Salma sammelt von jeder Schülerin und jedem Schüler 3 € ein. Bevor sie das Geld der Lehrerin gibt, zählt sie es noch einmal nach. Es sind 65 €. Oje, das kann auf keinen Fall stimmen, weiß Salma sofort. Warum?

43 Sara und Carina kaufen für ein gemeinsames Werkstück verzierte Holzkluppen. Eine Kluppe kostet 20 Cent. Jedes Mädchen nimmt eine Handvoll Kluppen aus dem Behälter und sie gehen zur Kassa. Dort werden von den Mädchen für die Kluppen 3,50 € verlangt. Sara meint, dass hier ein Fehler passiert sein muss. Was meinst du? Wie würdest du reagieren?

44 Für die Vorstellung einer Theatergruppe in der Schule sollen 90 Sessel in Reihen mit gleich vielen Sesseln aufgestellt werden.



(1) Wegen der Raumbreite passen höchstens 12 Sessel in eine Reihe. Mehr als 20 Reihen sollten es nicht werden. Welche Möglichkeiten zum Aufstellen der Sessel gibt es? Fertige für alle Möglichkeiten Skizzen an.

(2) Welche Möglichkeit hältst du für geeignet und warum? Besprich mit einer Kollegin oder einem Kollegen.

45 Felix hat ein neues Spiel bekommen. Zu Beginn müssen 30 Spielkarten in Form eines Rechtecks aufgelegt werden.

- a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, mit den 30 Karten ein Rechteck zu legen?
- b) Erkläre, warum die Anzahl der Karten entlang der Breitseite immer ein Teiler von 30 sein muss. Gilt das auch für die Anzahl der Karten entlang der Längsseite?
- c) Wenn die Anzahl der Karten entlang der Breitseite  $a$  ist, wie groß ist dann die Anzahl der Karten entlang der Längsseite? Gib eine Formel an.

46 Liam meint: „Ist die Zahl  $b$  ein Teiler von  $a$ , dann ist  $a$  ein Vielfaches von  $b$ .“ Überlege zuerst anhand von drei konkreten Beispielen. Gilt diese Aussage immer? Begründe deine Antwort.

47 In der Mathematik gibt es viele Zusammenhänge zwischen Zahlen zu entdecken. Sara ist bei Zahlenspielerien Folgendes aufgefallen: 4 ist ein Teiler von 12 und 4 ist ein Teiler von 20. Wenn man die Summe von 12 und 20 bildet, kommt wieder eine Zahl heraus, die durch 4 teilbar ist. Ist das immer so? Wie schaut es mit den Differenzen aus? Befülle die Tabelle und finde Zusammenhänge heraus. Trag ein eigenes Beispiel in die letzte Zeile ein.

Teiler	Zahl	Zahl	Summe	Teilt t	Differenz	Teilt t
t	a	b	a + b	a + b?	a – b	a – b?
4	20	12	32	ja	8	ja
2	10	8				
2	22	16				
3	18	6				
3	21	15				
4	20	16				
5	35	15				
6	30	18				



Eigenschaften oder Zusammenhänge, die an Zahlenbeispielen festgestellt werden, sind vorerst nur Vermutungen. Sie müssen allgemeingültig begründet werden, damit sie bedenkenlos auf alle Zahlen angewendet werden können.

Dazu braucht man meist eine gute Idee. Oft hilft die Summenregel: „Wenn  $t$  ein Teiler von  $a$  und  $b$  ist, dann ist  $t$  auch ein Teiler der Summe  $a + b$  und der Differenz  $a - b$  bzw.  $b - a$ .“

*Beispiel:* 4 ist ein Teiler von 12 und 4 ist ein Teiler von 20. Also sind 12 und 20 Vielfache von 4:  $12 = 3 \cdot 4$  und  $20 = 5 \cdot 4$ .

Die Summe  $12 + 20$  kann mithilfe des Verteilungsgesetzes angeschrieben werden:  
 $12 \cdot 20 = 3 \cdot 4 + 5 \cdot 4 = (3 + 5) \cdot 4$

Man sieht, dass auch die Summe wieder ein Vielfaches von 4 ist. Diese Überlegung funktioniert bei jedem beliebigen Teiler  $t$ , wenn er die Zahlen  $a$  und  $b$  teilt.



- 48 Zahlzerlegungen können dir beim Lösen rasch helfen.

Beispiel: Ist 84 durch 7 teilbar?

$84 = 70 + 14$ . 7 teilt 70 und 7 teilt 14. Daher teilt 7 auch 84.

Löse die folgenden Aufgaben, indem du geschickt in Summanden zerlegst und begründe.

- a) Ist 96 durch 8 teilbar?    b) Ist 100 durch 8 teilbar?  
 c) Teilt 6 die Zahl 68?    d) Teilt 6 die Zahl 90?

- 49 13 ist ein Teiler von 39 und von 260.

Begründe mithilfe der Summen- oder der Produktregel, wieso 13 ein Teiler von a) 299  
 b) 3 900 c) 520 ist.

- 50 Gib alle Teiler von a) 8, b) 14, c) 18, d) 7, e) 24 an.

Welche Zahl ist Teiler jeder natürlichen Zahl? \_\_\_\_\_

Wie viele Teiler hat eine natürliche Zahl mindestens, wenn sie größer als 1 ist? \_\_\_\_\_

- 51 Gib zwei natürliche Zahlen an,

- a) die genau 2 Teiler haben:    \_\_\_\_\_  
 b) die genau 3 Teiler haben:    \_\_\_\_\_  
 c) die genau 4 Teiler haben:    \_\_\_\_\_



- 52 Welche natürliche Zahl hat nur einen einzigen Teiler? \_\_\_\_\_

- 53 Richtig oder falsch? Kreuze an.

	richtig	falsch
Primzahlen haben keine echten Teiler.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3 und 4 sind echte Teiler von 12.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
5 und 15 sind echte Teiler von 15.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Eine Zahl, die nur unechte Teiler hat, ist eine Primzahl.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
19 ist eine Primzahl.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
18 hat nur unechte Teiler.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
9 hat einen echten Teiler und ist daher eine Primzahl.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
23 hat keinen echten Teiler und ist daher eine Primzahl.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2 ist die einzige gerade Primzahl.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

54 Gib jeweils zwei Zahlen an,

- a) die nur unechte Teiler haben: \_\_\_\_\_
- b) die mindestens zwei echte Teiler haben: \_\_\_\_\_
- c) die sowohl 3 als auch 4 als echte Teiler haben: \_\_\_\_\_
- d) die sowohl 4 als auch 5 als echte Teiler haben: \_\_\_\_\_

55 Das Sieb des Eratosthenes – auf historischen Spuren

Eratosthenes von Kyrene (284 – 202 v. Chr.), ein Mathematiker, Geograf, Astronom, Historiker, Philosoph und Dichter des Altertums, hat sich bereits vor mehr als 2 000 Jahren mit Primzahlen beschäftigt.

Das nach ihm benannte Sieb des Eratosthenes ist ein Verfahren, um Primzahlen aus den natürlichen Zahlen heraus zu sieben.

Eratosthenes von Kyrene gilt auch als Begründer der wissenschaftlichen Geografie, da er unter anderem den Erdumfang bestimmte.



Finde die Primzahlen zwischen 1 und 100. Gehe dabei so vor:

1. Ordne die Zahlen von 1 bis 100 wie rechts an. Das kannst du händisch oder technologieunterstützt durchführen.
2. Streiche die Zahl 1 durch, denn sie ist keine Primzahl.
3. 2 ist die erste Primzahl, sie bleibt stehen. Aber alle Vielfachen von 2 sind zu streichen. Welche Spalten können daher zur Gänze gleich gestrichen werden?
4. Die nächste Primzahl ist 3, sie bleibt stehen. Streiche nun alle Vielfachen von 3.
5. Die Zahl 4 ist schon gestrichen und auch ihre Vielfachen. Warum?
6. 5 bleibt stehen, die Vielfachen von 5 sind wiederum zu streichen.
7. Mit der Zahl 6 verhält es sich so wie mit der Zahl 4. Erkläre dies.
8. 7 bleibt wieder stehen, die Vielfachen von 7 sind zu streichen.
9. Geschafft. Jetzt stehen in der Zahlentafel nur mehr die Primzahlen.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

56 Aus welchen Primfaktoren bestehen die Zahlen a) 15, b) 18, c) 20, d) 30?

15 = \_\_\_\_\_                      18 = \_\_\_\_\_  
 20 = \_\_\_\_\_                      30 = \_\_\_\_\_

57 Primzahlzwillinge sind Primzahlen, deren Differenz 2 beträgt, zum Beispiel 11 und 13.

Finde drei weitere Primzahlzwillinge. \_\_\_\_\_

58 Gib drei Zahlen an, die nur die folgenden Primzahlen enthalten.

a) nur die Zahl 2: \_\_\_\_\_

b) nur die Zahl 5: \_\_\_\_\_

c) nur die Zahlen 3 und 7: \_\_\_\_\_



59 Wie heißt die kleinst mögliche Zahl, die die angegebenen Primzahlen enthält?

a) dreimal die Primzahl 2: \_\_\_\_\_

b) zweimal die Primzahl 3 und einmal die Primzahl 7: \_\_\_\_\_

c) je zweimal die Primzahlen 2, 3 und 5: \_\_\_\_\_

60 Finde die Primfaktoren mithilfe der Primfaktorenzerlegung für die Zahlen

a) 98, b) 72, c) 175, d) 132, e) 170, f) 300.

61 Tim meint: „Je größer eine Zahl ist, umso mehr unterschiedlichen Primfaktoren enthält sie.“ Was sagst du dazu? Begründe deine Antwort.

62 An der Tafel steht eine Primfaktorenzerlegung. Nico und Lena sagen sofort, dass diese nicht korrekt ist. Was meinst du dazu? Stelle gegebenenfalls richtig.

$$\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 3 \\ 4 & 4 \\ 1 & \end{array}$$

63 Selina meint: „Alle geraden Zahlen sind durch 2 teilbar.“ Erkläre, warum diese Aussage richtig ist.

64 Überprüfe mithilfe der Ziffernsumme, ob die Zahlen durch 3 teilbar sind.

a) Kreise jene Zahlen ein, die durch 3 teilbar sind.

576    288    40 015    60 015    1 010    6 050 301    15 123 009

b) Ändere bei den Zahlen, die nicht durch 3 teilbar sind, die Einerstelle so, dass eine durch 3 teilbare Zahl entsteht.

65 Erkläre anhand der Zahlen a) 165 und b) 1 734, warum der Ziffernsummen-Trick bei der Teilbarkeit durch 3 immer funktioniert.

66 Der Ziffernsummen-Trick funktioniert auch für die Teilbarkeit durch 9. Streiche alle Zahlen durch, die nicht durch 9 teilbar sind.

819    631    10 597 512 001    9 123 201    12 030 012    162 630 111

67 Welche besonderen Eigenschaften haben alle Vielfachen von 10? Wie gehst du vor, wenn du eine Zahl mit 10 multiplizierst?

68 Gib fünf verschiedene Zahlen an, die durch 10 teilbar sind.

\_\_\_\_\_

69 Woran kannst du an einer Zahl sofort erkennen, dass sie durch a) 100, b) 1 000 teilbar ist? Überlege dazu, welche besonderen Eigenschaften alle Vielfachen von 100 bzw. 1 000 haben.

70 Lena meint, dass alle Zahlen, die durch 1 000 teilbar sind, auf jeden Fall auch durch 100 teilbar sind. Was meinst du dazu? Begründe deine Antwort.

71 Zahlen finden.

- a) Welche dreistellige Zahl ist durch 100 teilbar und hat die Ziffernsumme 7?
- b) Eine vierstellige Zahl ist durch 10 teilbar und besteht aus den Ziffern 0, 1, 2, 3. Gib alle Möglichkeiten an.
- c) Eine fünfstellige Zahl ist durch 1 000 teilbar. Sie besteht aus den Ziffern 4 und 6. Gib alle Möglichkeiten an.

72 Teilbarkeit durch 5.

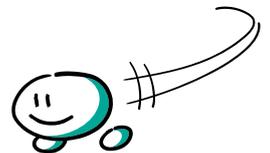
- a) Mit welchen Einerziffern enden alle Vielfachen von 5? \_\_\_\_\_
- b) Woran erkennt man an einer Zahl sofort, ob sie durch 5 teilbar ist oder nicht? Formuliere eine Regel für die Teilbarkeit durch 5:  
Eine Zahl ist genau dann durch 5 teilbar, wenn  
\_\_\_\_\_

73 Gib vier verschiedene Zahlen an, die durch 5 teilbar sind.  
\_\_\_\_\_

74 Finde fünf Zahlen, die sowohl durch 2 als auch durch 5 teilbar sind. Was fällt dir dabei auf?  
\_\_\_\_\_

75 Kreise alle Zahlen ein, die durch 2 teilbar sind. Unterstreiche alle Zahlen, die durch 3 teilbar sind.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50



Durch welche Zahl sind alle Zahlen, die sowohl eingekreist als auch angekreuzt sind, noch teilbar? \_\_\_\_\_

76 Welche der beiden Aussagen ist richtig?

A: Ist eine Zahl durch 3 teilbar, dann ist sie auch durch 6 teilbar. \_\_\_\_\_

B: Ist eine Zahl durch 6 teilbar, dann ist sie auch durch 3 teilbar. \_\_\_\_\_

- a) Begründe deine Antwort.
- b) Verändere und ergänze die falsche Aussage so, dass daraus eine richtige Teilbarkeitsregel entsteht. (Tipp: Überlege, in welche Primfaktoren 6 zerlegt werden kann.)

77 Eine Zahl ist durch 4 teilbar, wenn die aus den letzten beiden Ziffern gebildete Zahl durch 4 teilbar ist oder wenn sie eine Hunderterzahl ist.

- a) Überprüfe diese Regel für die Zahlen 4 514 und 100 320 sowie für die Hunderterzahlen 6 600 und 10 700.
- b) Gib eine Begründung für die Gültigkeit dieser Regel. Schreib dazu die Zahlen ausführlich an (z. B.  $316 = 3 \cdot 100 + 16$ ). Berücksichtige, dass 100 durch 4 teilbar ist.

78 Kreise alle Zahlen ein, die durch 4 teilbar sind.

15 224                      199 011                      397 136                      1 257 908                      2 224 442

79 Alle vier Jahre finden Olympische Sommerspiele statt. 1964 wurden sie in Tokio abgehalten. Welche der folgenden Jahre könnten Jahre für olympische Sommerspiele sein? Kreuze an.

- 1982       2000       1908  
 1930       2016       2050

Recherchiere, wo die nächsten Olympischen Sommerspiele stattfinden werden. \_\_\_\_\_

Die Olympischen Winterspiele wurden auch schon in Österreich durchgeführt. Recherchiere wann und wo. \_\_\_\_\_



80 Welche Ziffern können für x eingesetzt werden, sodass die entstehende Zahl a) durch 3, b) durch 5, c) durch 9, d) durch 10 teilbar ist. (Vorsicht: Manchmal gibt es keine Lösung.)

58x      9x0      x26      27x      12x5

81 Raj behauptet: „Denk dir eine zweistellige Zahl, vertausche ihre Ziffern und subtrahiere die kleinere von der größeren Zahl. Das Ergebnis ist durch 9 teilbar.“ Überprüfe Rajs Behauptung für drei verschiedene Beispiele.

82 Richtig oder falsch? Kreuze an.

	richtig	falsch
Alle Vielfachen von 10 sind auch Vielfache von 5.		
Alle Vielfachen von 5 sind auch Vielfache von 10.		
Eine Zahl, die durch 3 und 4 teilbar ist, ist auch durch 12 teilbar.		
Alle natürlichen Zahlen sind durch 1 teilbar.		
Ist eine Zahl durch 3 teilbar, so ist sie auch durch 9 teilbar.		
Ist eine Zahl durch 9 teilbar, so ist sie auch durch 3 teilbar.		
Primzahlen sind nur durch zwei Zahlen teilbar.		
Wenn die Zahl a ein Vielfaches von b ist, dann ist b ein Teiler von a.		

83 Schreibe der Reihe nach die ersten 10 Vielfachen von a) 2 und 5, b) 2 und 3, c) 3 und 4, d) 4 und 6 auf. Unterstreiche nun jene Zahlen, die gemeinsame Vielfache sind. Welche Zahl ist das kleinste gemeinsame Vielfache?

84 T Ermittle mit Excel die ersten 20 Vielfachen von 6, 8 und 10. Lass die Vielfachen in drei Spalten nebeneinander ausgeben. Färbe jene Felder, die Zahlen enthalten, die mehr als einmal als Vielfache auftreten.

Beantworte dann mit Hilfe deiner Tabelle:

Die gemeinsamen Vielfachen von 6 und 8 sind: \_\_\_\_\_

Das kleinste gemeinsame Vielfache von 6 und 8 ist: \_\_\_\_\_

Die gemeinsamen Vielfachen von 8 und 10 sind: \_\_\_\_\_

Das kleinste gemeinsame Vielfache von 8 und 10 ist: \_\_\_\_\_

Das kleinste gemeinsame Vielfache von 6, 8 und 10 ist: \_\_\_\_\_

85 Finde das kleinste gemeinsame Vielfache von:

- a) 2, 3, 4                       $\text{kgV}(2,3,4) =$  \_\_\_\_\_
- b) 2, 5, 10                    \_\_\_\_\_
- c) 3, 4, 6                      \_\_\_\_\_
- d) 4, 5, 8                      \_\_\_\_\_



86 Schreibe alle Teiler der Zahlen **a)** 20 und 24, **b)** 18 und 27 auf. Unterstreiche die gemeinsamen Teiler. Welcher ist der größte gemeinsame Teiler?

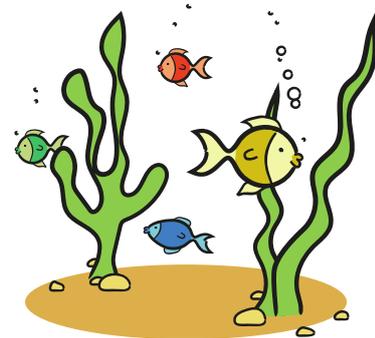
87 Wie lautet **(1)** das kgV, **(2)** der ggT von **a)** 12 und 18, **b)** 10 und 15, **c)** 15 und 20, **d)** 25 und 30?

88 Wie lautet **(1)** das kgV, **(2)** der ggT von **a)** 70 und 126, **b)** 210 und 300, **c)** 360 und 420? Nimm die Primfaktorenzerlegungen zu Hilfe.

89 Stefan hat drei Aquarien, ein kleines, ein mittelgroßes und ein großes. Für das ausführliche Reinigen der Aquarien nimmt er sich an Samstagen Zeit. Das kleine Aquarium reinigt er jeden zweiten Samstag, das mittlere jeden dritten Samstag und das große jeden fünften Samstag.

Kreuze jene Aussagen an, die zu Stefans Reinigungsplan passen.

- Jeden sechsten Samstag reinigt er sowohl das kleine als auch das mittelgroße Aquarium.
- Es gibt Samstage, an denen er keines der Aquarien reinigen muss.
- An jedem zehnten Samstag reinigt er alle drei Aquarien.
- An jedem 15. Samstag reinigt er das große und das mittelgroße Aquarium, das kleine aber nicht.



90 **T** Verwende die Angabe aus der vorangehenden Aufgabe und erstelle für Stefan technologieunterstützt einen übersichtlichen Reinigungsplan für ein halbes Jahr. Verwende dazu Samstage aus dem aktuellen oder dem kommenden Kalenderjahr. Du kannst z. B. eine Tabelle in Excel anlegen oder auch eine andere Idee umsetzen.

	Aquarien		
	klein	mittel	groß
Sa, 4. Jänner			
Sa, 11. Jänner			
Sa, 18. Jänner			
Sa, 25. Jänner			
Sa, 1. Februar			

Entnimm deinem fertigen Plan:

An wie vielen Samstagen muss Stefan keines der Aquarien reinigen: \_\_\_\_\_

An wie vielen Samstagen hat er alle drei Aquarien zu reinigen: \_\_\_\_\_

Einen Arbeitsplan anzulegen ist eine sinnvolle Sache, auch wenn es zu begründeten Abweichungen kommen kann. Welche Gründe könnte es geben, dass Stefan von seinem Reinigungsplan abweicht?

- 91 Der Reitplatz eines Vereins soll neu eingezäunt werden. Die senkrechten Ständer des Zauns sollen immer denselben Abstand (in vollen Metern) voneinander haben. Die Länge des Platzes beträgt 50 m, die Breite 30 m. Welche Möglichkeiten gibt es? Welche dieser Möglichkeiten hältst du für sinnvoll?



- 92 Lisa, Ekatarina, Silvana und Melanie sind in einem Reitverein, der täglich um 16.00 Uhr eine Trainingsstunde anbietet.

Ab Montag nimmt Lisa täglich an der Stunde teil, Ekatarina jeden zweiten Tag, Silvana jeden dritten Tag und Melanie jeden vierten Tag. Gibt es Tage, an denen die vier gemeinsam an der Trainingsstunde teilnehmen? An welchem Wochentag ist das erste gemeinsame Training der vier Reiterinnen?

- 93 **T** Verwende die Angabe aus der vorigen Aufgabe und erstelle mit Excel für die kommenden zwei Wochen einen übersichtlichen Plan, aus dem auf einen Blick zu entnehmen ist, wer an welchem Wochentag reitet.

Beantworte mit Hilfe deines Planes auch folgende Fragen:

a) An welchen Wochentagen reiten Lisa, Ekatarina und Melanie gemeinsam? \_\_\_\_\_

b) An welchen Wochentagen reiten Lisa, Ekatarina und Silvana gemeinsam? \_\_\_\_\_

c) Gibt es innerhalb der beiden Wochen einen Tag, an dem alle vier Mädchen gemeinsam trainieren?

Wenn ja, welcher Tag ist das? \_\_\_\_\_



- 94 Toms Fußballverein trainiert während der Wintersaison jeden Dienstag in einer großen Sporthalle. An einem Trainingstag müssen sie die Halle mit älteren Spielern teilen, was Toms Mannschaft gar nicht gefällt. Der Trainer der anderen Mannschaft beruhigt und meint: „Wir trainieren hier nur alle **a**) 10 Tage **b**) 5 Tage. So oft müsst ihr also nicht auf uns Rücksicht nehmen.“



(1) Hat er Recht? In wie vielen Tagen werden die beiden Mannschaften wieder gemeinsam in der Halle sein?

(2) Wie oft werden die beiden Mannschaften insgesamt gemeinsam in der Halle sein, wenn das Hallentraining noch weitere 4 Monate dauert? (Danach trainiert die Mannschaft wieder auf dem Freiplatz.)



## Paket A

95 Gib die ersten fünf Vielfachen von 12 an: \_\_\_\_\_

96 Gib alle Teiler von 12 an: \_\_\_\_\_

97 Setze ein: | bzw.  $\uparrow$

5    10      7    23      9    108      6    36      11    38      14    28

98 Kreuze alle Aussagen an, die gleichbedeutend sind mit der Aussage „6 ist ein Teiler von 42“.

- 42 ist ein Vielfaches von 6.  
 42 ist durch 6 teilbar.  
 42 teilt 6.  
 Bei der Division von 42 durch 6 bleibt kein Rest.

99 Kreise alle Zahlen ein, die Primzahlen sind.

1    2    3    4    5    6    7    8    9    10   11   12   13   14   15

100 Erkläre, warum 25 keine Primzahl ist.

101 Schreibe die Zahl als Produkt ihrer Primfaktoren an.

18 = \_\_\_\_\_      50 = \_\_\_\_\_

102 Kreise alle Zahlen ein, die durch 2 teilbar sind. Unterstreiche alle Zahlen, die durch 3 teilbar sind. Kreuze alle Zahlen an, die durch 5 teilbar sind.

6    12    15    30    32    35    40    42    45    51    58    60

Welche der Zahlen sind ein Vielfaches von 2, 3 und 5? \_\_\_\_\_

Welche der Zahlen ist das kleinste gemeinsame Vielfache von 2, 3 und 5: \_\_\_\_\_

103 Gib eine vierstellige Zahl an, die durch 10 teilbar ist: \_\_\_\_\_

104 Gib den größten gemeinsamen Teiler (ggT) und das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) an.

Zahlen	ggT	kgV
8 und 12		
20 und 30		
9 und 6		

105 Ermittle mithilfe der Primfaktorenzerlegung den größten gemeinsamen Teiler (ggT) und das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) der Zahlen 18 und 30.

ggT (18, 30) = \_\_\_\_\_      kgV (18, 30) = \_\_\_\_\_



## Paket B



106 Gib alle Teiler der Zahlen 17 und 24 an.

17: \_\_\_\_\_ 24: \_\_\_\_\_

107 Vervollständige den Satz:

4 ist ein Teiler von 12. Daher ist 12 ein \_\_\_\_\_ von 4.

108 Welche Aussage passt zu welcher Zahl? Verbinde mit Pfeilen.

Die Zahl ist durch 2 und durch 3 teilbar.		40
120 ist ein Vielfaches dieser Zahl.		63
7 ist ein Teiler dieser Zahl.		100
10 und 25 sind Teiler dieser Zahl.		18

109 Erkläre, was man unter einer Primzahl versteht. \_\_\_\_\_

110 Schreibe die fünf kleinsten Primzahlen an: \_\_\_\_\_

111 Erkläre, warum die Zahl 23 eine Primzahl ist.  
\_\_\_\_\_

112 Setze ein: | bzw. √

5 \_\_\_ 36      7 \_\_\_ 84      9 \_\_\_ 702      6 \_\_\_ 44      13 \_\_\_ 51      14 \_\_\_ 96

113 Schreibe die Zahl als Produkt ihrer Primfaktoren an.

27 = \_\_\_\_\_      60 = \_\_\_\_\_

36 = \_\_\_\_\_      33 = \_\_\_\_\_

114 Vervollständige die Sätze:

Eine Zahl ist genau dann durch 2 teilbar, wenn \_\_\_\_\_

Eine Zahl ist genau dann durch 10 teilbar, wenn \_\_\_\_\_

Eine Zahl ist genau dann durch 3 teilbar, wenn \_\_\_\_\_

115 Welche der Zahlen sind durch 6 teilbar? Kreise sie ein.

24      60      90      106      112      336

116 Gib den größten gemeinsamen Teiler (ggT) und das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) an.

ggT (12, 36) = \_\_\_\_\_      kgV (14, 42) = \_\_\_\_\_

ggT (18, 27) = \_\_\_\_\_      kgV (10, 20) = \_\_\_\_\_

117 Ermittle mithilfe der Primfaktorenzerlegung den größten gemeinsamen Teiler (ggT) und das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) der Zahlen 36 und 60.

ggT (36, 60) = \_\_\_\_\_      kgV (36, 60) = \_\_\_\_\_



129 Die Summe von drei aufeinander folgenden natürlichen Zahlen ist immer durch drei teilbar.

- Überprüfe die Aussage für einige konkrete Zahlenbeispiele.
- Versuche eine Begründung zu finden, warum die Aussage immer stimmt, egal welche natürlichen Zahlen man wählt.

130 Eine natürliche Zahl heißt vollkommen, wenn sie mit der Summe aller ihrer Teiler, außer der Zahl selbst übereinstimmt. Die kleinste vollkommene Zahl ist  $6 = 1 + 2 + 3$ .

Zeige, dass auch 28 eine vollkommene Zahl ist.

Wenn du noch Spaß daran hast, kannst du auch überprüfen, dass 496 eine vollkommene Zahl ist.

Schon in der griechischen Antike hat man sich aus Freude an der Beschäftigung mit Zahlen auch mit vollkommenen Zahlen beschäftigt. Alle bekannten vollkommenen Zahlen sind gerade und enden auf 6 oder 8. Wenn du noch mehr über vollkommene Zahlen wissen möchtest, lies in WIKIPEDIA nach.



131 Zahlen wie 4 774 oder 8 338 werden häufig als ANNA-Zahlen bezeichnet.

- Kannst du diese Namensgebung erklären?
- Jasmin hat festgestellt, dass 4 774 und 8 338 durch 11 teilbar sind. Gibt es noch andere vierstellige ANNA-Zahlen, die durch 11 teilbar sind?
- Jasmin möchte nun herausfinden, ob alle vierstelligen ANNA-Zahlen durch 11 teilbar sind.

Sie überlegt hin und her, dann fällt ihr die Vorgangsweise der Begründung der Teilbarkeitsregeln von 3 und 4 wieder ein (siehe Seiten 13 und 14).

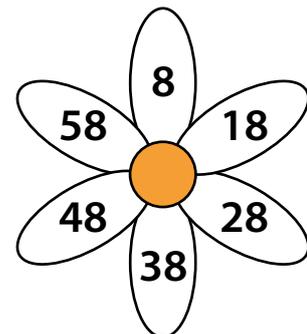
Sie versucht es auch hier mit den dekadischen Einheiten, nimmt eine beliebige vierstellige ANNA-Zahl und schreibt an:  $5\,335 = 5 \cdot 1\,000 + 3 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 5$

Und tatsächlich, es gelingt ihr über diesen Ansatz zu einer begründeten Antwort zu kommen, die für alle vierstelligen ANNA-Zahlen gilt. Das ist ganz schön knifflig! Versuche auch du zu einer begründeten Antwort zu kommen.

132 ANNA-Zahlen wie in der vorangehenden Aufgabe werden auch als vierstellige Spiegelzahlen bezeichnet. Was vermutest du: Welche Gestalt haben daher sechsstellige Spiegelzahlen? Gib drei Beispiele an.

133 Im Bild siehst du eine Zahlenblume. Maria pflückt die Blätter auf denen Nummern stehen, die man ohne Rest durch 6 dividieren kann. Was ist die Summe aller Zahlen auf den Blättern, die sie pflückt?

- 46
- 66
- 84
- 86
- 114



[www.kaenguru.at](http://www.kaenguru.at)