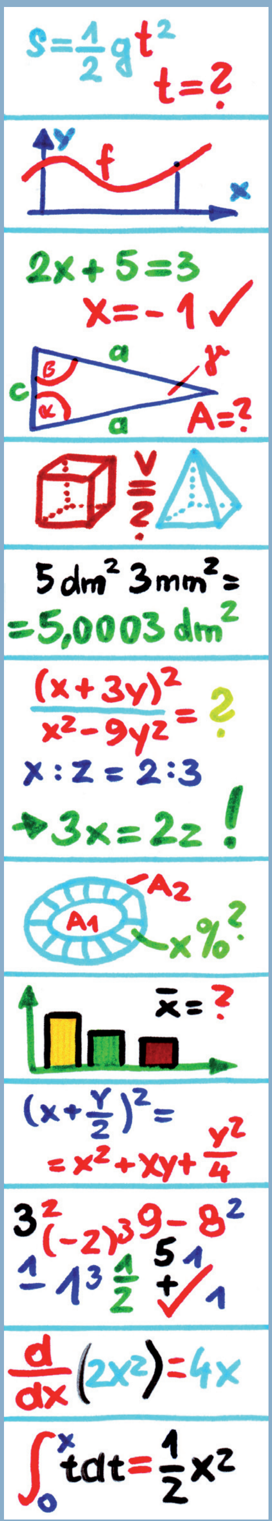
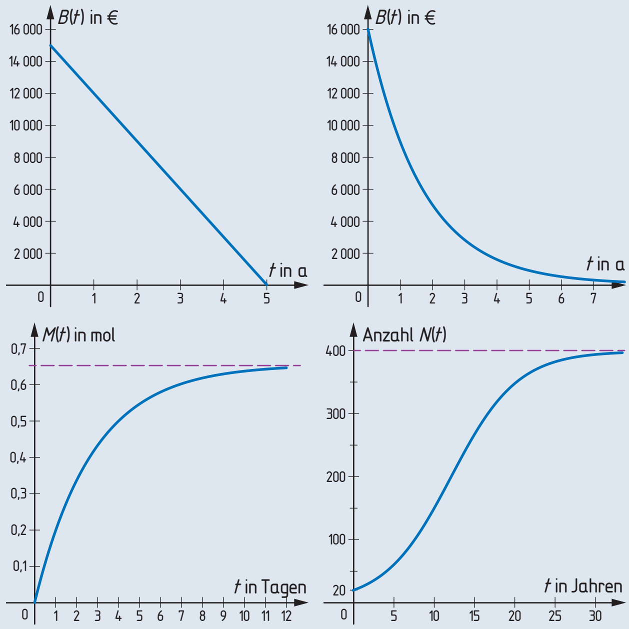
Memo-Liste



Schreibe zu allen Fragen auf dieser Seite in **Stichworten** auf, was dir dazu einfällt. Besprich das Ergebnis mit einer Kollegin, einem Kollegen, korrigiert es miteinander. Lies anschließend die blau gerahmte Stoffzusammenfassung, die du für die Übungen in diesem Kapitel benötigst.

1. Wie lautet die Funktionsgleichung für lineares Wachstum?
2. Wie beschreibt man ein exponentielles Wachstum?
3. Wie beschreibt man ein beschränktes Wachstum?
4. Wie beschreibt man ein logistisches Wachstum?
5. Was sagen die Parameter k und d beim linearen Wachstum aus?
6. Wie hängt der Parameter a beim exponentiellen Wachstum mit λ zusammen?
7. Was sagen die Parameter c und λ beim logistischen Wachstum aus?
8. Was ist der Unterschied zwischen der Wachstumsrate und dem Wachstumsfaktor?

9. Lies aus dem Graphen den Wachstumstyp ab und, so weit es möglich ist, die Parameter der Kurve.



Wachstumsprozesse

In diesem Abschnitt wird das Grundwissen **über lineares, exponentielles, beschränktes und logistisches Wachstum** wiederholt. Positives Wachstum bedeutet Zunahme, negatives Wachstum beschreibt eine Abnahme. Es werden viele Beispiele, ähnlich den Aufgaben für eine Reifeprüfung, Schritt für Schritt vorgerechnet und erklärt. Es sind weitere Aufgaben zum Üben mit Angabe der Lösung angeboten, die selbstständig gelöst werden sollen. Die Teilaufgaben sind weitgehend unabhängig voneinander. Wenn du eine Teilaufgabe nicht kannst, dann versuche die nächste trotzdem.

Der Technologieeinsatz ist **frei wählbar**.
Aufgaben, bei denen Technologieeinsatz empfohlen wird, sind in der Randspalte mit TE gekennzeichnet.
Auf die Kurzdokumentation der verwendeten Technologien solltest du achten!

3.1 Grundwissen wiederholen

Die Zunahme bzw. Abnahme einer Größe, häufig in Abhängigkeit von der Zeit, wird als **Wachstum** bezeichnet.
Im Folgenden bedeuten t ... Zeit, $f(t)$ ... zeitabhängige Wachstumsgröße.
Abhängig vom Thema einer Aufgabe werden häufig statt $f(t)$ auch andere Bezeichnungen verwendet wie $N(t)$, $y(t)$ usw.
Sollte sich die Wachstumsgröße abhängig von anderen Größen als der Zeit verändern, dann wird auch t gelegentlich durch die Bezeichnungen der anderen Größen ersetzt, zB x ... beliebige Größe, h ... Höhe, T ... Temperatur usw.

Der **Anfangsbestand $f(0)$** bezeichnet den Wert des Bestands zu Beginn für $t = 0$. In der grafischen Darstellung handelt es sich dabei um den Abschnitt auf der vertikalen Achse (y-Achsenabschnitt).

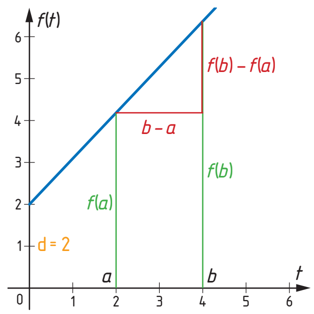
3.1.1 Lineares Wachstum

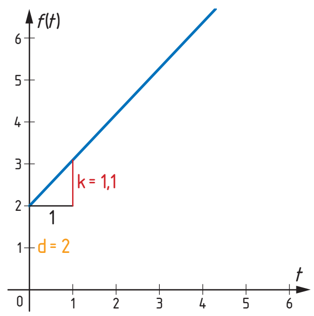
Mittlere Änderungsrate

$$k = \frac{\Delta f(t)}{\Delta t} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Die Größe von k beschreibt, ob die Wachstumsgröße stark zu- bzw. abnimmt.
Das Vorzeichen bestimmt die Art des Wachstums:
$k > 0$ ... Es liegt eine Zunahme vor.
$k < 0$ ... Es liegt eine Abnahme (Zerfall) vor.
Ist die mittlere Änderungsrate während des Wachstums konstant, dann liegt ein **lineares Wachstum** vor und dieses kann mit dem Modell einer **Geraden** beschrieben werden.
***k* gibt beim linearen Wachstum den Zuwachs (bzw. die Abnahme) der jeweiligen Wachstumsgröße pro Zeiteinheit an.**
Die mittlere Wachstumsrate entspricht der Geradensteigung, der Anfangsbestand dem Ordinatenabschnitt ***d***.
Im nebenstehenden Beispiel: $k = 1{,}1$ und $d = f(0) = 2$
Die lineare Wachstumsfunktion:

$$f(t) = k \cdot t + f(0)$$





3.1.2 Exponentielles Wachstum

Während bei einem linearen Prozess die absolute Änderungsrate $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ konstant ist, bleibt beim exponentiellen Wachstum **die relative Änderungsrate** $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} : f(x)$ (meist in Prozent angegeben) konstant.

Man definiert für diesen Prozess den **Wachstumsfaktor *a*** (stets bezogen auf eine Einheit).

a ist jene Zahl, mit der man einen Funktionswert multipliziert, um den nächsten Wert der um eine Einheit größeren Stelle zu erhalten.

Steigt der Wert um p Prozent, so gilt:

$$a = 1 + \frac{p}{100}$$

Sinkt der Wert um p Prozent, so gilt:

$$a = 1 - \frac{p}{100}$$ **(auch: Abnahmefaktor)**

Der Wachstumsfaktor ist bei einer **Zunahme** größer als 1. ZB $p = 7\ \% \Rightarrow a = 1{,}07$
Bei einer **Abnahme** ist der Wachstumsfaktor kleiner als 1. ZB $p = -7\ \% \Rightarrow a = 0{,}93$

Bei dem exponentiellen Wachstum ist der Wachstumsfaktor *a* konstant.

Das exponentielle Wachstum lässt sich daher mithilfe der folgenden Exponentialfunktion mit dem Anfangswert $f(0)$ darstellen:

$$f(t) = f(0) \cdot a^t$$

Häufig bevorzugt man die Schreibweise mit der Potenz zur Basis e.

$$f(t) = f(0) \cdot e^{\lambda \cdot t}$$

Es gilt dann $a = e^{\lambda}$ ... Wachstumsfaktor pro Einheit.

$\lambda = \ln(a)$ ... **Wachstumskonstante**, sie ist bei Zunahme **positiv**, bei Abnahme **negativ**.

Die exponentielle Zunahme wird durch die so genannte **Verdoppelungszeit τ_2** charakterisiert. Das ist jene Zeit, in der die Größe den doppelten Wert annimmt.

Es gilt die Gleichung $\tau_2 = \frac{\ln 2}{\lambda}$.

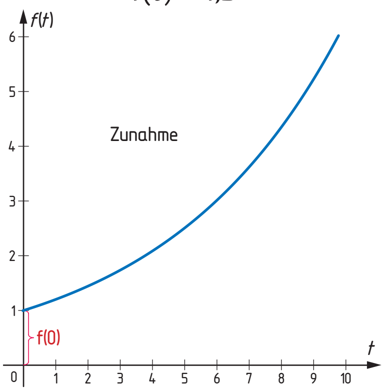
Analog spricht man bei Abnahmeprozessen von der **Halbwertszeit $\tau_{1/2}$**, in der die Größe auf die Hälfte schrumpft.

Es gilt die Gleichung $\tau_{1/2} = \frac{\ln 0{,}5}{\lambda}$.

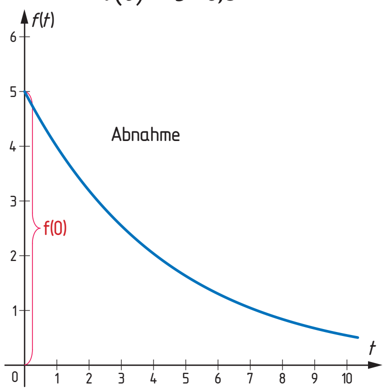
Nach 2 Verdoppelungszeiten liegen demnach bereits 400 % (das 4-Fache) und nach 2 Halbwertszeiten immerhin noch 25 % (ein 4-tel) des Anfangswerts vor.

Grafische Darstellung:

$f(t) = 1{,}2^t$



$f(t) = 5 \cdot 0{,}8^t$



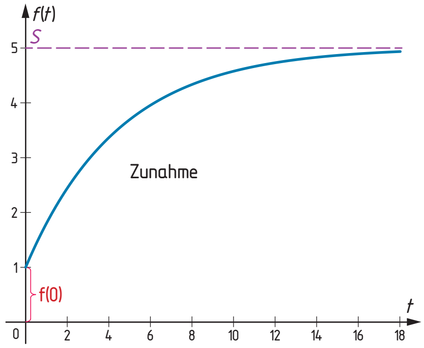
3.1.3 Beschränktes Wachstum

Nähert sich eine wachsende Größe f einem konstanten Wert S (Kapazitätsgrenze), so spricht man von einem **beschränkten Wachstum**. Die Kapazitätsgrenze wird dabei theoretisch nie erreicht und entspricht der Asymptote, der sich die Funktion nähert. Beim beschränkten Wachstum nimmt die Größe zu Beginn schnell und später immer langsamer zu (bzw. ab).

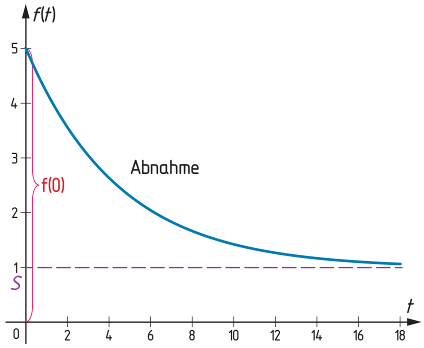
Das **beschränkte Wachstum** stellt man mithilfe der so genannten **Restkapazität** dar. Darunter versteht man die Differenz zwischen der Kapazitätsgrenze und den Funktionswerten: $S - f(t)$.

Diese Restkapazität nimmt bei der Zu- und bei der Abnahme mit wachsender Zeit dem Betrag nach ab. Daher ist die Wachstumskonstante negativ. Die Funktionsgleichungen lauten für die beschränkte Zunahme: $\boldsymbol{f(t) = S - b \cdot e^{\lambda t} = S - b \cdot a^t}$
und für die beschränkte Abnahme: $\boldsymbol{f(t) = S + b \cdot e^{\lambda t} = S + b \cdot a^t}$
S ... Kapazitätsgrenze (obere Grenze bei der Zunahme, untere Grenze bei Abnahme)
$b = |S - f(0)|$ ... Betrag der Restkapazität zum Zeitpunkt $t = 0$, $b > 0$
λ ... Wachstumskonstante, **$\boldsymbol{\lambda}$ ist negativ!** Die Restkapazität wird laufend kleiner.
$0 < a < 1$ ... Abnahmefaktor der Restkapazität mit $a = 1 - \frac{p}{100} = e^{\lambda}$

$f(t) = 5 - 4 \cdot e^{-0{,}223t} = 5 - 4 \cdot 0{,}8^t$



$f(t) = 1 + 4 \cdot e^{-0{,}223t} = 1 + 4 \cdot 0{,}8^t$



3.1.4 Logistisches Wachstum

Das logistische Wachstum mit Zunahme des Bestands bis zur oberen Kapazitätsgrenze S wird mit der folgenden Funktionsgleichung dargestellt:

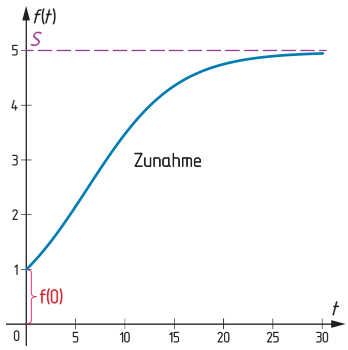
$$\boldsymbol{f(t) = \frac{S}{1 + c \cdot e^{\lambda t}} = \frac{S}{1 + c \cdot a^t}} \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{c = \frac{S - f(0)}{f(0)}}$$

$f(0)$ ... Anfangswert zur Zeit $t = 0$

c ... Verhältnis der Restkapazität zum Zeitpunkt $t = 0$ zum **Anfangswert $\boldsymbol{f(0)}$**.

λ ... Wachstumskonstante, **$\boldsymbol{\lambda}$ ist negativ!** (Die Restkapazität wird laufend kleiner.)

a ... Abnahmefaktor der Restkapazität $a = e^{\lambda}$



Bsp: $f(0) = 1$, $S = 5$, $c = 4$; $a = 0{,}8$

$f(t) = \frac{5}{1 + 4 \cdot 0{,}8^t}$