

## 4.3 Einige Anwendungen der Funktion

### 4.3.1 Formeln aus der Geometrie

Praktisch kann jede Formel, bei der der Zusammenhang zwischen 2 Größen untersucht werden soll, bei der demnach eine abhängige und eine unabhängige Variable festgelegt werden kann, als Funktion gedeutet werden. Die Formel selbst ist gegeben und soll mathematisch interpretiert werden.

BCD



**4.58** Die Volumenformel für einen Drehkegel lautet  $V = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h$ . Der Radius  $r$  des Grundkreises beträgt 5 cm.

- Stelle grafisch dar, wie sich das Volumen des Kegels mit der Höhe verändert. Lies die Steigung ab und erkläre, wie man diese geometrisch deuten kann.
- Interpretiere die Formel, wie sich die Verdopplung der Höhe auf das Volumen auswirkt, wie groß das Volumen bei einer Höhe von 10 cm ist und welche Höhe ein Volumen von  $200 \text{ cm}^3$  aufweist.

Lösung:

Das Volumen ist eine Funktion der Höhe:  $V(h) = \frac{25}{3} \cdot \pi \cdot h$

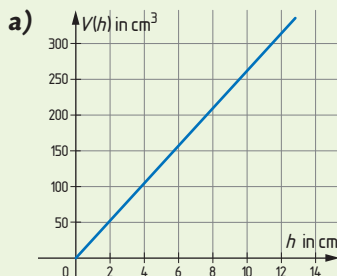
Wir überlegen die passende Grund- bzw. Definitionsmenge zu dieser Funktion.

Im Zusammenhang mit dem Volumen eines Kegels sind die reellen Zahlen eine sinnvolle Grundmenge. Negative Zahlen für die Höhe des Kegels schließen wir aus und legen die Definitionsmenge mit  $\mathbb{R}^+$  fest.

Du kannst die Funktion im kartesischen Koordinatensystem zeichnen, indem du einige Punkte des Graphen berechnest und diese verbindest. Oder du verwendest Technologie.

**Vorsicht:** Die meisten Rechenprogramme verlangen die Variablen  $x$  und  $y$ , nicht bei allen kann man  $V$  und  $h$  als Variable definieren!

Aus der Zeichnung lassen sich Zusammenhänge zwischen Volumen und Höhe bei einem Kegel mit vorgegebenem Radius ablesen.



$$k = \frac{25}{3} \cdot \pi$$

Bedeutung:

Wenn sich die Höhe um 1 cm vergrößert, dann vergrößert sich das Volumen um den Faktor  $\frac{25}{3} \cdot \pi$ .

b) Man erkennt, ...

- dass eine Verdopplung der Höhe bei gleichbleibendem Radius auch eine Verdopplung des Volumens zur Folge hat.
- dass bei einer Höhe von 10 cm das Volumen ca.  $260 \text{ cm}^3$  beträgt.
- dass ein Volumen von  $200 \text{ cm}^3$  bei einem Kegel mit der Höhe von ca. 7,6 cm auftritt.

**4.59** Die Oberfläche eines Zylinders hat die Formel:  $O = 2r^2 \cdot \pi + 2r \cdot \pi \cdot h$   
 $O$  ... Oberfläche des Zylinders in  $\text{cm}^2$ ,  $r$  ... Radius der Grundfläche in  $\text{cm}$ ,  
 $h$  ... Höhe des Zylinders in  $\text{cm}$ .

**a)** Zeichne die Funktion  $O$  in Abhängigkeit von  $h$  für  $r = 4 \text{ cm}$ .

Lies den Anstieg  $k$  und den Ordinatenabschnitt  $d$  ab.

**b)** Interpretiere die Formel mit  $r = 4 \text{ cm}$  hinsichtlich der folgenden Fragestellungen:

Verdoppelt sich die Oberfläche, wenn sich die Höhe verdoppelt?

Welche Oberfläche hat ein Zylinder mit der Höhe  $h = 6,5 \text{ cm}$ ?

Welche Höhe hat ein Zylinder mit einer Oberfläche von  $O = 200 \text{ cm}^2$ ?

**4.60** Ein Kohlenkübel hat die Form eines Zylinders, der im oberen Teil laut Angabe in der Skizze schräg abgeschnitten ist. Für einen solchen Kübel erhält man für die Mantelfläche plus der Grundfläche die Formel:

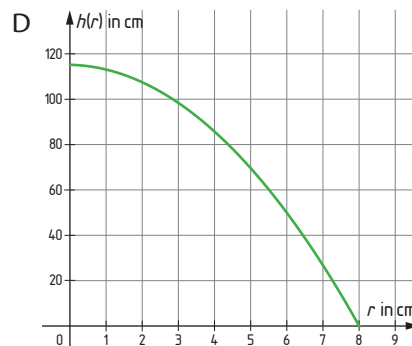
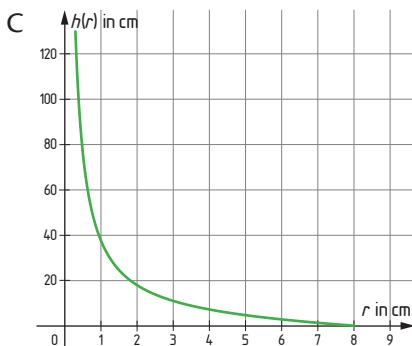
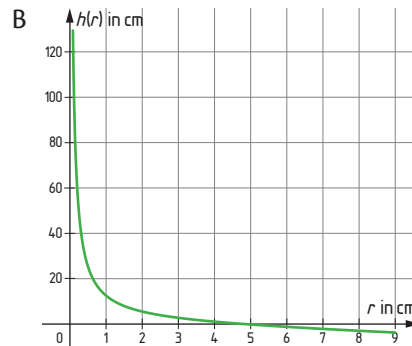
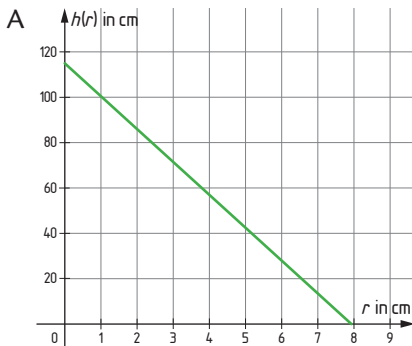
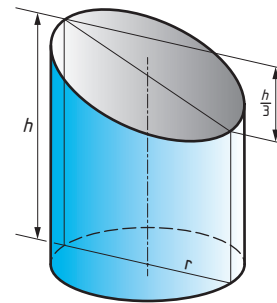
$$A = r^2\pi + \frac{5}{3} \cdot r \cdot \pi \cdot h; \quad r \dots \text{Radius in cm,}$$

$h$  ... maximale Höhe in  $\text{cm}$ .

Argumentiere, wie sich die Höhe  $h$  des Kübels in Abhängigkeit vom Radius  $r$  verändert, wenn die Fläche

$A = 200 \text{ cm}^2$  beträgt.

Welche der angegebenen Funktionen entspricht dieser Abhängigkeit  $h(r)$ . Begründe.



## 4.3.2 Kosten und Erlös einer Produktion

**x ... Menge, die von einer bestimmten Ware produziert oder abgesetzt wird.**

Sie wird in Mengeneinheiten (ME) angegeben. Das können Stück, Liter, Kilogramm oder Teile bzw. Vielfache davon sein, zB 1 000 kg.

**E ... Erlös in Geldeinheiten (GE)**, abhängig von der verkauften Menge x in ME

**p ... Verkaufspreis pro Mengeneinheit (GE/ME)**

**$E(x) = p(x) \cdot x$  ... Zusammenhang von Preis, Menge und Erlös**

**$K(x)$  ... gesamte Kosten in GE**, die bei der Produktion der Ware anfallen. Man unterscheidet

**Fixkosten  $K_f$** , die bereits anfallen, wenn noch gar nichts erzeugt wird (zB Strom, Miete) und

**variable Kosten  $K_v$** , die abhängig von der Produktionsmenge x sind.

**$K(x) = K_f + K_v$  mit  $K_f = K(0)$**

**G ... Gewinn in GE** ist die Differenz von Erlös und Kosten:  **$G(x) = E(x) - K(x)$**

ABC



**4.61** Die fixen Kosten für die Herstellung eines Produkts betragen 348.500 € pro Woche, die variablen Kosten 117 € pro Stück. Der Verkaufspreis wird mit 199 € pro Stück festgesetzt.

- Erstelle die lineare Kostenfunktion  $K$ .
- Ermittle die lineare Erlösfunktion  $E$ .
- Berechne für eine wöchentliche Produktionsmenge von 5 000, 10 000 bzw. 20 000 Stück die Gesamtkosten, den Erlös und den Gewinn.
- Überprüfe deine Ergebnisse durch Ablesung aus einer geeigneten grafischen Darstellung.
- Interpretiere den Erlös und die Kosten bei einer Absatzmenge von 2 000 Stück. Was lässt sich über den Gewinn aussagen?

Lösung

- a)** Der Graph der Kostenfunktion geht durch die Punkte (0|348 500) und (1|348 617)  
Der Abschnitt auf der vertikalen Achse und die Steigung:

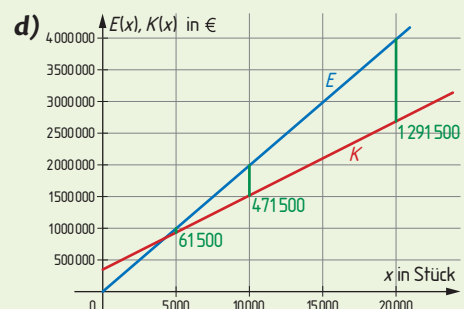
$$d = 348\,500, \quad k = \frac{\Delta K}{\Delta x} = \frac{117}{1} = 117$$

Die Kostenfunktion lautet daher:  $K(x) = 117 \cdot x + 348\,500$

**b)**  $E(x) = 199 \cdot x$

x in Stück	5 000	10 000	20 000
$E(x)$ in €	995.000	1.990.000	3.980.000
$K(x)$ in €	933.500	1.518.500	2.688.500
$G(x)$ in €	61.500	471.500	1.291.500

- e)** Bei  $x = 2\,000$  ist die Differenz von Erlös und Kosten negativ. Die Kosten überwiegen. Es entsteht ein Verlust.



Bemerkung: Die Gewinnfunktion  $G$  ist nicht grafisch dargestellt. Der Gewinn ist als Differenz zwischen Erlös und Kosten ablesbar.

- 4.62** Die Firma Hotvolley erzeugt Volleybälle. Die fixen Kosten betragen je Monat 25.000 €, die variablen Kosten je Ball betragen 7,25 €.
- Erstelle die Gleichung der linearen Kostenfunktion  $K$  für die Produktion von  $x$  Bällen in einem Monat.
  - Die Bälle werden zu einem Stückpreis von 12 € verkauft. Ermittle die Gleichung der Erlösfunktion  $E$ .
  - Stelle beide Funktionen in einem gemeinsamen Koordinatensystem dar.  
Lies aus der Grafik ungefähr den Gewinn bei der Erzeugung von 40 000 Bällen ab.



- 4.63** Die Kostenfunktion  $K$  eines Betriebs ist gegeben durch  $K(x) = 7 \cdot x + 54\,000$   $x$  ... Menge in Mengeneinheiten ME,  $K(x)$  ... Kosten von  $x$  ME in Euro (€).
- Stelle die Kostenfunktion  $K$  grafisch dar.
  - Berechne den Verkaufspreis, der notwendig ist, um bei einer Verkaufsmenge von 3 000 ME einen Erlös von 100.000 € zu erreichen.
  - Zeichne die Graphen der Erlös- und der Kostenfunktion in ein gemeinsames Koordinatensystem.  
Lies aus der Grafik ab, wie groß ungefähr der Gewinn bei 3 000 ME ist.

- 4.64** Eine Firma stellt Taschenrechner her. Die Fixkosten betragen 12.000 € pro Monat. Bei einer Produktion von 10 000 Stück pro Monat betragen die Gesamtkosten 162.000 €.
- Stelle die Kostenfunktion  $K$  auf.
  - Berechne den Verkaufspreis eines Geräts, wenn der Erlös beim Verkauf von 2 500 Stück 60.000 € beträgt.
  - Stelle die Erlösfunktion  $E$  grafisch dar.  
Lies aus der Grafik ab, wie groß ungefähr der Gewinn bei 2 500 Stück ist.



## 4.3.3 Weg, Geschwindigkeit und Zeit

Bei einer gleichförmigen Bewegung ist der zurückgelegte Weg der dafür benötigten Zeit direkt proportional.

Bezeichnungen:

$s$  ... Wegstrecke in Längeneinheiten angegeben, zB in Meter (m) oder Kilometer (km)

$t$  ... Zeit(dauer) in Zeiteinheiten angegeben, zB in Stunden (h) oder Sekunden (s)

$v$  ... Geschwindigkeit angegeben, zB in Meter pro Sekunde (m/s)  
oder Kilometer pro Stunde (km/h)

Die Formel  $s = v \cdot t$  gilt immer dann, wenn die Geschwindigkeit während der Bewegung konstant ist.

*TIPP: Bei den Bewegungsaufgaben solltest du sehr gut auf die angegebenen Einheiten achten. In den meisten Fällen muss man die Einheiten erst umrechnen, ehe man sie zur Berechnung benutzen kann.*

# Funktionen

- AB 4.65** Karl fährt mit dem Rad eine Strecke von 40 km. Er möchte in 2 Stunden am Ziel sein. Stelle einen Fahrplan (tabellarisch, grafisch und als Gleichung) für Karl zusammen.



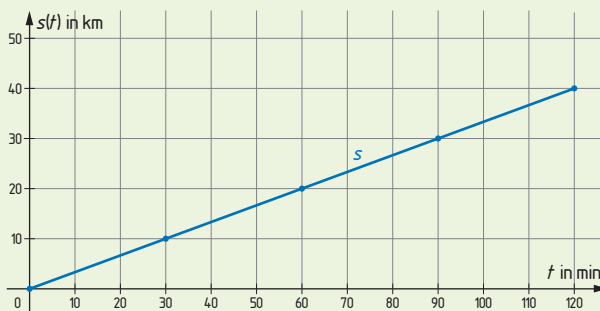
Lösung:

$D = [0; 120]$  mit Elementen aus  $\mathbb{R}$  in Minuten (min)

$W = [0; 40]$  mit Elementen aus  $\mathbb{R}$  in Kilometer (km)

Tabelle:

Zeitpunkt nach dem Start ... $t$	0	30	60	90	120	Minuten
zurückgelegter Weg ab Start ... $s(t)$	0	10	20	30	40	km



$$k = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}; s(t) = \frac{t}{3} \text{ mit } D = \{t \in \mathbb{R} | 0 \text{ min} \leq t \leq 120 \text{ min}\}$$

$t$  ... Zeit in Minuten (min),  $s(t)$  ... in  $t$  min zurückgelegte Strecke in Kilometer (km)

- AB 4.66** Von Tulln verläuft entlang der Donau ein Radweg annähernd geradlinig und eben. Roland fährt 3 Stunden und 12 Minuten.



- Bestimme die Gleichung der Funktion, die die Abhängigkeit des Wegs  $s$  von der Geschwindigkeit  $v$  beschreibt.
- Wähle eine realistische Definitionsmenge und stelle die Funktion grafisch dar.

- ABD 4.67** Eine Schwimmerin erreicht eine durchschnittliche Geschwindigkeit von 0,7 m/s.



- Berechne, wie weit sie in 20 Minuten kommt.
- Stelle die Weg-Zeit-Funktion in einem Koordinatensystem grafisch dar.
- Erkläre, wie sich der Graph verändert, wenn die Schwimmerin langsamer wird.

- AB 4.68** Ein Wanderer benötigt für eine Strecke von 6 Kilometer 1,4 Stunden. Stelle den Zusammenhang zwischen der Gehzeit  $t$  und dem zurückgelegtem Weg  $s(t)$  als Tabelle dar. Stelle die Funktion in einem Koordinatensystem grafisch dar. Erstelle eine passende Funktionsgleichung.



**4.69** Ein PKW fährt von Salzburg mit annähernd konstanter Geschwindigkeit von 115 km/h auf der Autobahn Richtung München. Zur gleichen Zeit startet ein LKW von einer 40 km nach Salzburg gelegenen Tankstelle und fährt mit einer mittleren Geschwindigkeit von 85 km/h ebenfalls Richtung München.

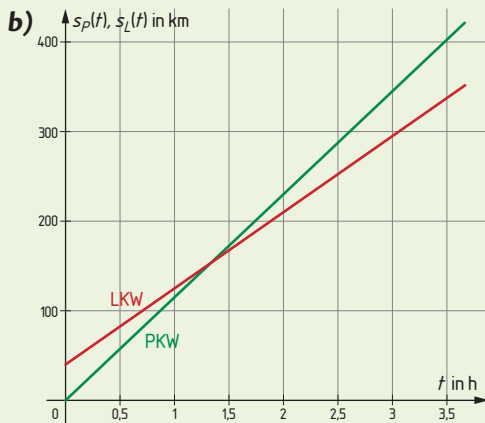
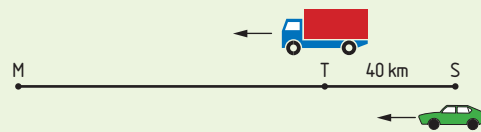


- Gib sowohl für den PKW als auch für den LKW die Funktionsgleichung an, die die Entfernung von Salzburg nach der Fahrzeit  $t$  (in Stunden) angibt.
- Stelle die Funktionen in einem Koordinatensystem grafisch dar.
- Lies ungefähr ab, wie viel Stunden nach Fahrtbeginn der PKW den LKW überholt. In welcher Entfernung von Salzburg ist das?

Lösung

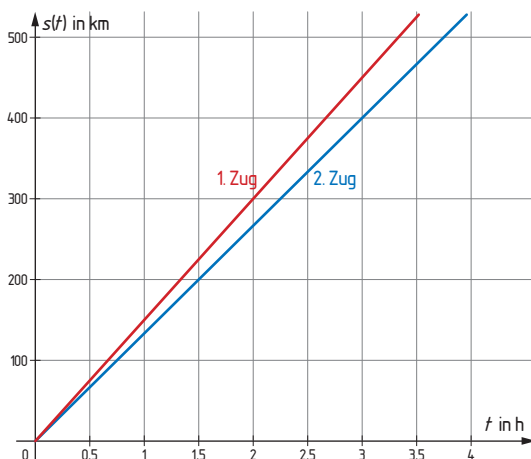
a) PKW:  $s_P(t) = 115 \cdot t$

LKW:  $s_L(t) = 85 \cdot t + 40$



- c) Der PKW überholt nach ungefähr 1,3 h.  
 $1,3 \cdot 115 = 149,5 \approx 150$   
 Er überholt ca. 150 km von Salzburg entfernt.

**4.70** Die Grafik gibt die Fahrtdaten zweier Züge wieder.



- Lies aus der Zeichnung ab, mit welcher mittleren Geschwindigkeit beide Züge fahren.
- Erstelle für beide Züge die Gleichung der Weg-Zeit-Funktion.
- Ermittle, nach welcher Zeit beide Züge voneinander ungefähr 50 km Abstand haben.

## 4.4 Stückweise lineare Funktionen

In vielen Fällen setzt sich eine Funktion stückweise aus verschiedenen linearen Funktionen zusammen, die jeweils nur innerhalb eines begrenzten Intervalls definiert sind.

Es ist daher notwendig für jeden Streckenabschnitt die Definitionsgleichung und die Definitionsmenge anzugeben.

**ABCD**

- 4.71** Ein PKW fährt mit einer mittleren Geschwindigkeit von  $v = 110 \text{ km/h}$  von Linz in Richtung Eisenstadt. Er startet um 10:00 Uhr.
- Ermittle, wann er das 231 km entfernte Ziel erreicht.
  - Erkläre, wie der Rückweg dargestellt werden kann, wenn der PKW-Fahrer um 13:00 Uhr in Eisenstadt losfährt und die gleiche mittlere Geschwindigkeit erreicht. Gib die Funktionsgleichung für den Rückweg an.
  - Zeichne die stückweis linearen Funktionen in ein Weg-Zeit-Diagramm und gib die Definitionsmengen der einzelnen Streckenabschnitte an.

Lösung:

- a)**  $s(t) = 110 \cdot t$  ( $t \geq 0$  bis zur Ankunft in Eisenstadt)

$$231 = 110 \cdot t \Rightarrow t = 2,1 \approx 2 \text{ h } 6 \text{ min}$$

Die Ankunftszeit in Eisenstadt 10:00 Uhr + 2 h 6 min = 12:06 Uhr.

- b)** In Eisenstadt gab es eine Pause bis 13:00 Uhr

$$13:00 \text{ Uhr} - 10:00 \text{ Uhr} = 3 \text{ h}$$

Die Rückfahrt beginnt 3 Stunden nach der Abfahrt in Linz.

Entfernung von Linz: 231 km

$$s(t) = 231 - 110 \cdot (t - 3)$$

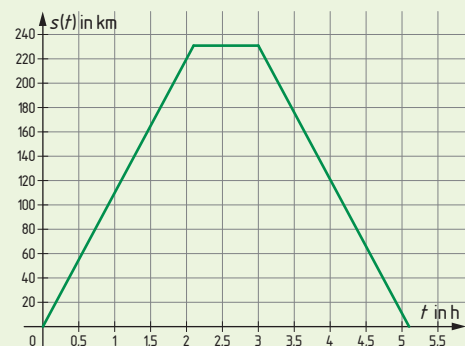
$$s(t) = 561 - 110t \text{ für } t \geq 3$$

- c)** Grafische Darstellung:

$$s(t) = 110t \quad D_1 = [0; 2,08 \text{ h}]$$

$$s(t) = 231 \quad D_2 = [2,08; 3 \text{ h}]$$

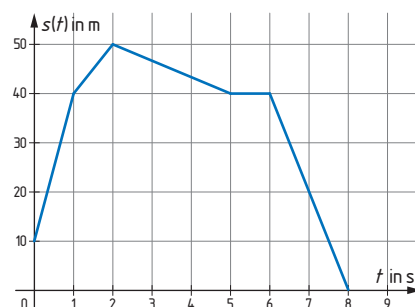
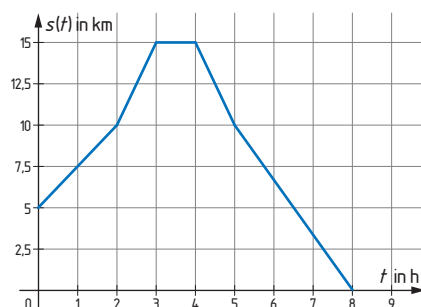
$$s(t) = 561 - 110t \quad D_3 = [3 \text{ h; ca. } 5 \text{ h}]$$



**ABC**

- 4.72** Interpretiere die folgenden Weg-Zeit-Diagramme:

- Gib die Wegstrecken und die jeweiligen Geschwindigkeiten an.
- Lies die stückweise linearen Funktionen ab.



**4.73** Eine Supermarktkette wirbt mit Rückvergütungen zu Jahresende.

Für Einkäufe bis zu einer Gesamthöhe von 5.000 € werden 2 % der Summe in Form einer Gutschrift rückerstattet.

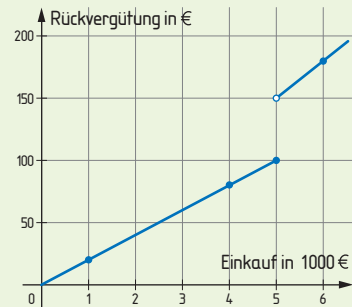
Hat jemand im Lauf des Jahres um mehr als 5.000 € eingekauft, so erhält er 3 % der Gesamtsumme gutgeschrieben.

a) Ermittle die fehlenden Werte der Tabelle.

b) Stelle die Funktion grafisch dar.

Beschreibe, was dir dabei auffällt.

Einkaufsumme	Höhe der Gutschrift
€ 1.000,00	€ 20,00
€ 4.000,00	
€ 5.000,00	
€ 5.500,00	
€ 6.000,00	



Lösung:

a) Die fehlenden Werte sind:

80 €; 100 €; 165 €; 180 €

b) Bei 5.000 € hat die Gerade eine „Unstetigkeitsstelle“.

Der Funktionswert springt von 100 auf 150.

**Lösung mit Technologieeinsatz: TI-Nspire:**

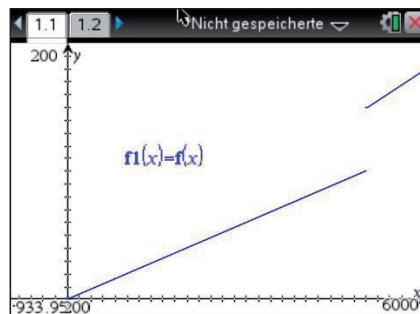
**Calculator**/Funktion definieren durch Eingabe:

$f(x):=$  **Vorlage für stückweise Funktionen nehmen**

**Menu2/ Graphs/Eingabezeile:  $f1(x) = f(x)$**



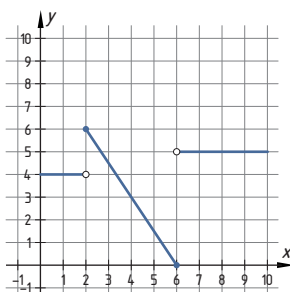
$$f(x) := \begin{cases} 0.02 \cdot x, & 0 < x \leq 5000 \\ 0.03 \cdot x, & 5000 < x \end{cases}$$



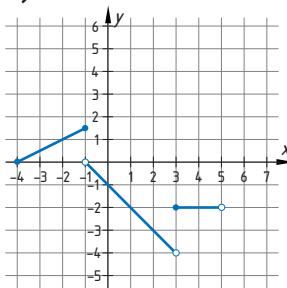
Die Anleitung für die Eingabe für stückweise stetige lineare Funktionen bei TI82-84, Excel und Geogebra-CAS siehe [www.hpt.at](http://www.hpt.at) (Schulbuch Plus für Schüler/innen)

**4.74** Stelle die Funktionsgleichung der skizzierten stückweise linearen Funktion auf.

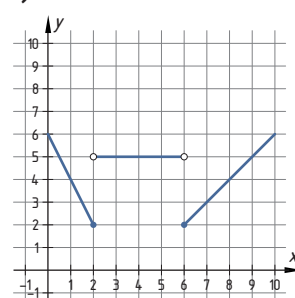
a)



b)



c)





# Funktionen

ABC



**4.75** Ein Paketdienst befördert nach folgenden Tarifen: Für Pakete bis 2 kg werden 3,70 €, bis 4 kg 4,70 € und bis 8 kg 5,70 € verlangt.

- Stelle diesen Sachverhalt als stückweise definierte Funktion grafisch dar.
- Gib die Funktionsgleichungen an.



ABD



**4.76** Für das Parkhaus am Hauptplatz gelten folgende Tarife: Die erste Stunde parkt man gratis, ab der zweiten Stunde kostet jede begonnene Stunde 2 €.

- Stelle die Kosten in Abhängigkeit von der Parkdauer grafisch dar.
- Für Abendveranstaltungen gibt es Tickets um 2,50 €, mit denen man maximal 4 Stunden parken darf. Beurteile, ab welcher Parkdauer dieses Ticket günstiger ist, als der Normaltarif. Ermittle, wie viel man sich mit diesem Ticket an einem Abend höchstens erspart.

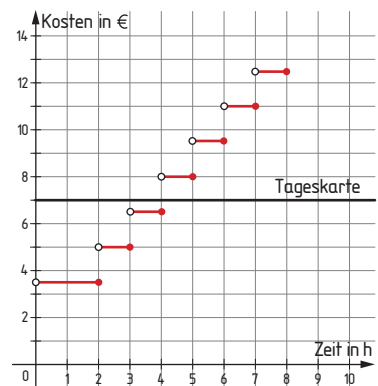


C



**4.77** Der Eintritt in ein Erlebnisbad ist in der Grafik dargestellt.

- Interpretiere die Grafik hinsichtlich der folgenden Fragestellungen:
- Wie viel bezahlt man für die ersten beiden Stunden?
  - Wie groß ist die Erhöhung der Kosten für jede weitere Stunde?
  - Ab welcher Badezeit ist eine Tageskarte rentabel?



ABD



**4.78** Viele moderne Heizungen werden mit Holzpellets befeuert.

Ein Händler bietet Pellets zu folgenden Preisen an: 245,10 € pro Tonne bis zu einer Gesamtmenge von 2 Tonnen; 237,50 € pro Tonne ab einer Gesamtmenge von über 2 Tonnen bis zu 4 Tonnen und 229,90 € pro Tonne bei einer Gesamtmenge über 4 Tonnen.

- Stelle die Preisentwicklung grafisch dar.
- Überprüfe, ob es möglich ist, dass für eine größere Menge weniger bezahlt werden muss. Kennzeichne die entsprechenden Bereiche in der Zeichnung.



## 4.5 Die Nullstelle der linearen Funktion

### 4.5.1 Definition und Berechnung der Nullstelle

**4.79** Berechne die Nullstelle der Funktion  $f$  mit der Funktionsgleichung  $f(x) = -0,5x + 7$   
Überprüfe die Rechnung mithilfe einer Zeichnung.

BD

Um diese Aufgabe lösen zu können, musst du wissen, was man unter einer Nullstelle versteht.

Man versteht unter einer **Nullstelle** jenen **x-Wert**, der eingesetzt in die Funktion  $f$  den Funktionswert null liefert. Der Begriff „Stelle“ deutet an, dass Nullstellen Elemente des Definitionsbereichs  $D$  sind.

Bei reellen Funktionen sind Nullstellen jene Stellen der  $x$ -Achse, an denen der Funktionsgraph die  $x$ -Achse berührt oder schneidet. Reelle lineare Funktionen mit  $k \neq 0$  haben genau eine Nullstelle.

**Vorsicht:** Unterscheide zwischen „Stelle“ und „Punkt“. Eine Funktion hat keinen Punkt, nur ihr Graph besteht aus Punkten. Die „Stellen“ der Funktion sind die  $x$ -Werte aus der Definitionsmenge.

Setze zum Berechnen der Nullstelle  $f(x) = 0$ . Aus dieser linearen Gleichung kannst du  $x$  ermitteln:

$$\begin{array}{r|l} -0,5x + 7 = 0 & | -7 \\ -0,5x = -7 & | :(-0,5) \\ x = 14 & \text{Die Nullstelle } x_0 = 14. \end{array}$$

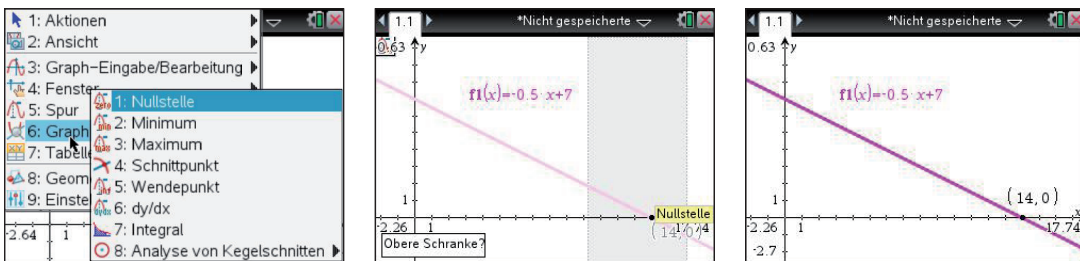
Wenn die Funktionsgleichung bekannt ist, dann kannst du die Nullstelle mithilfe von Technologieinsatz entweder über den Gleichungslöser oder über eine Grafik bestimmen.



#### TI-Nspire:

**Menu/ 2 Graphs/**Funktion eingeben/ nachjustieren/**Menu/**

**6 Graph analysieren/ 1 Nullstelle/enter.** Mit der Greifhand **vor** der Nullstelle klicken und über die Nullstelle fahren/ **enter**, die Koordinaten des Schnittpunkts mit der  $x$ -Achse werden angezeigt.



**Die Anleitung für die Nullstellenbestimmung bei TI82-84, Excel und Geogebra-CAS siehe [www.hpt.at](http://www.hpt.at) (Schulbuch Plus für Schüler/innen)**

**4.80** Berechne die Nullstelle der Funktionen.

a)  $y = \frac{1}{3}x + 2$

b)  $y = -x + 7$

c)  $y = -0,5x + 3$

B

**4.81** Es sind 2 Punkte  $A$  und  $B$  gegeben.

a)  $A(-4|5), B(4|1)$

b)  $A(1|7), B(5|2)$

c)  $A(-3|-2), B(6|1)$

Stelle die Gleichung der Geraden  $g$  auf, die durch  $A$  und  $B$  geht.

Berechne die Schnittpunkte von  $g$  mit beiden Koordinatenachsen.

Überprüfe die Rechnung durch eine Ablesung aus der grafischen Darstellung.

ABD





Jede Gleichung, nicht nur lineare Gleichungen, kann man grafisch näherungsweise lösen, wenn man sie so umformt, dass auf einer Seite null steht. Dann interpretiert man den Gleichungsterm als Funktionsterm, zeichnet den Funktionsgraphen und kann die Nullstellen ablesen. Die abgelesenen  $x$ -Werte sind näherungsweise Lösungen der Gleichung.

Das Lösen einer Gleichung entspricht dem Ermitteln der Nullstelle der zugehörigen Funktion, wenn die Gleichung so umgeformt wird, dass auf einer Seite null steht.

**4.87**  $(x^2 - 2x) + (x - 3) \cdot 15 = (x + 4)^2$

Löse die Gleichung durch Ablesen der Nullstelle aus der passenden Grafik.

Stelle dazu die gegebene Funktion mithilfe von Technologieinsatz dar.

Was fällt dir auf?

Lösung:

Man gibt den Funktionsterm

$$f(x) = (x^2 - 2x) + (x - 3) \cdot 15 - (x + 4)^2$$

ein.

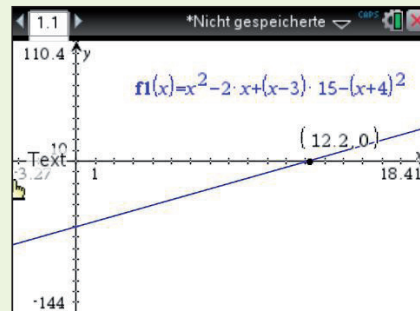
$x = 12,2$  ist die Lösung der Gleichung.

Es fällt auf, dass der Graph der Funktion eine

Gerade ist, obwohl quadratische Terme

vorkommen. Schaut man den Funktionsterm

genauer an, so entdeckt man, dass  $x^2$  beim Umformen wegfallen würde.



BD



**4.88** Löse die Gleichungen mit  $G = \mathbb{R}$  durch Ablesen der Nullstelle aus der Grafik.

a)  $(x - 7)^2 = (x - 6)(x - 5) + 14,5$

b)  $(x - 2)^3 - (x^2 - 4) = x^3 - 7x^2 - 16$

c)  $(x + 3)^2 - (x + 12)^2 + 39 + 26x = 0$

BC



## 4.5.2 Die Nullstelle der linearen Gewinnfunktion: der Break-Even-Point

$G(x) = E(x) - K(x)$  ... Zusammenhang zwischen Gewinn, Erlös und Gesamtkosten

**Break-Even-Point = BEP:** Wenn man eine Ware verkauft, so überwiegen zu Beginn die Kosten. Erst allmählich stellt sich Gewinn ein.

Die Stelle  $x$  in **Mengeneinheiten (ME)**, an der Erlös und Kosten gleich groß sind, markiert den Eintritt in die Gewinnzone. **Der BEP ist die Nullstelle der linearen Gewinnfunktion.**

**4.89** Die fixen Kosten einer Produktion betragen 19.500 € je Monat, die variablen Kosten betragen pro Stück 2,50 €. Beim Verkauf erzielt das Produkt einen Preis von 4,20 € pro Stück.

a) Bestimme die jeweils linearen Kosten-, Erlös- und Gewinnfunktion.

b) Ermittle den Break-Even-Point.

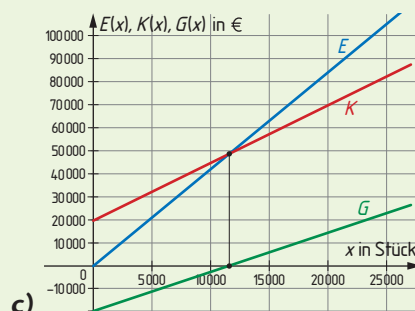
c) Überprüfe die Berechnung durch eine grafische Darstellung der Funktionen.

Lösung:

a)  $K(x) = 2,50x + 19\,500$ ;  $E(x) = 4,20x$ ;

$$G(x) = 4,20x - 2,50x - 19\,500 = 1,7x - 19\,500$$

b)  $G(x) = 0 \Rightarrow \text{BEP} \approx 11\,471 \text{ Stück}$



ABCD



# Funktionen

**BD 4.90** Der Gewinn, den ein Unternehmer beim Vertrieb eines Produkts macht, lässt sich mit der Funktion  $G$  mit  $G(x) = 63x - 50\,400$  darstellen.

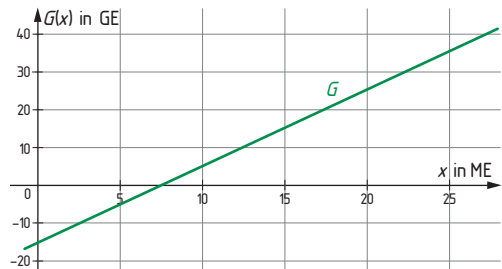
$x$  ... Verkaufsmenge in Mengeneinheiten (ME)

$G(x)$  ... Gewinn bei einer Verkaufsmenge  $x$  in Geldeinheiten (GE)

- Berechne die Nullstelle.
- Zeichne den Graphen der Funktion in einem Koordinatensystem mit passend gewählter Skalierung.
- Erkläre, warum diese Nullstelle – der **Break-Even-Point** – für den Unternehmer wichtig ist.

**CD 4.91** Es ist die Gewinnfunktion  $G$  in Abhängigkeit von der Verkaufsmenge  $x$  gegeben:

- Lies den Break-Even-Point ab.
- Lies die Gleichung der Gewinnfunktion ab.
- Kreuze an, wie man die Menge mit einem Verlust von 9,5 GE bestimmt. Begründe deine Auswahl.



- |          |                          |                                    |
|----------|--------------------------|------------------------------------|
| <b>A</b> | <input type="checkbox"/> | Man setzt $x = 9,5$ in $G(x)$ ein. |
| <b>B</b> | <input type="checkbox"/> | Man setzt $G(x) = 9,5$ .           |
| <b>C</b> | <input type="checkbox"/> | Man setzt $x = -9,5$ in $G(x)$ .   |
| <b>D</b> | <input type="checkbox"/> | Man setzt $G(x) = -9,5$ .          |

**ABC 4.92** In einer Firma werden T-Shirts bedruckt. Die fixen Kosten pro Monat betragen 35.000 €. Die variablen Kosten für ein fertig bedrucktes T-Shirt belaufen sich auf 12 €. Der Verkaufspreis (ohne MwSt) beträgt 21 € pro Stück.



- In einem Monat werden  $x$  T-Shirts erzeugt.  
Gib die Funktionsgleichungen für die Gesamtkosten und für den Erlös an.
- Erstelle eine Grafik, in der du die Gesamtkosten und den Erlös, abhängig von der Stückzahl, einzeichnest.
- Lies ab, bei welcher Stückzahl die Werkstatt kostendeckend zu arbeiten beginnt. (Break-Even-Point bzw. Gewinnschwelle)



**ABC 4.93** Bei einem Kongress nimmt man pro teilnehmender Person je 70 € ein.



Die Fixkosten für den Veranstalter der Tagung belaufen sich auf 10.800 € und pro Person fallen Kosten von 4,50 € zusätzlich an.

- Berechne, ab welcher Teilnehmerzahl die Tagung ohne Verlust für den Veranstalter sein wird.
- Stelle die jeweils lineare Kosten-, Erlös und Gewinnfunktion grafisch dar.
- Lies ab, welchen Gewinn man bei 500 Personen zu erwarten hat.

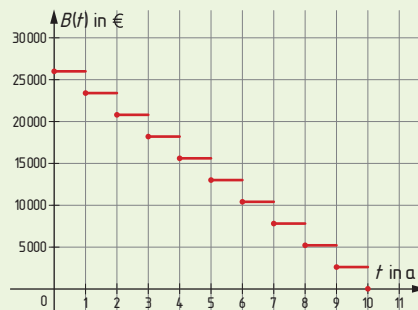
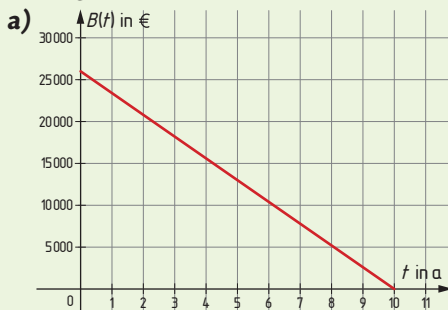


## 4.5.3 Die Nullstelle der linearen Abschreibung: die Nutzungsdauer

Unter dem **Buchwert  $B$**  einer Maschine versteht man den Wert, den die Maschine nach einer bestimmten Nutzungsdauer  $t$  noch hat. Er wird auch gelegentlich als „**Restwert**“ bezeichnet. Man kann ihn berechnen, indem man vom Anschaffungswert die jährliche Abschreibung abzieht.

- 4.94** Max soll eine Maschine mit einem Anschaffungswert von 26.000 € und einer Nutzungsdauer von 10 Jahren linear abschreiben.
- Stelle den Abschreibungsprozess grafisch dar.
  - Gib die Funktionsgleichung an, mit der man den Buchwert der Maschine bestimmen kann.
  - Lies den Buchwert nach einer Nutzungsdauer von 3 Jahren aus dem Graphen ungefähr ab.
  - Berechne, wann der Buchwert nur mehr ein Fünftel der Anschaffungskosten beträgt.

Lösung:



**Beachte:** Genau genommen bleibt der Buchwert innerhalb eines Jahres unverändert. Man müsste eine Treppe zeichnen, die aber durch die Gerade angenähert werden kann.

- 2 Punkte sind bekannt, nämlich der Funktionswert an der Stelle  $t = 0$  ( $0 | 26\,000$ ) und die Nullstelle bei  $t = 10 \Rightarrow d = 26\,000, k = -2\,600$   
Gleichung des Abschreibeprozesses:  $B(t) = -2\,600t + 26\,000$
- Der Buchwert nach 3 Jahren beträgt ungefähr 18.000 €.
- $-2\,600t + 26\,000 = 5\,200 \Rightarrow t = 8$   
Nach 8 Jahren beträgt der Buchwert ein Fünftel des Anschaffungswerts.

- 4.95** Eine Anlage hat eine Nutzungsdauer von 11 Jahren und der Buchwert nach 9 Jahren beträgt 164.000 €.

- Berechne den Anschaffungswert mithilfe von Technologieeinsatz.
- Stelle den Sachverhalt grafisch dar.

- 4.96** Eine Maschine hat einen Anschaffungswert von 52.000 € und eine Nutzungsdauer von 16 Jahren.

- Berechne, nach wie vielen Jahren der Restwert 39.000 € beträgt.
- Stelle den Sachverhalt mithilfe deiner Technologie grafisch dar.

- 4.97** Eine Anlage hat nach 9 Jahren einen Restwert von 154.000 € und ihr Anschaffungswert betrug 431.200 €.

- Berechne die Nutzungsdauer.
- Stelle den Sachverhalt grafisch dar.

ABC



AB



AB



AB



## 4.6 Beziehung von zwei Funktionen

### 4.6.1 Die Funktion und ihre Umkehrung

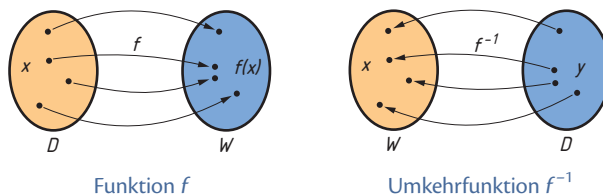
ABD



**4.98** Stelle die Funktion  $f: y = 5x - 3$  im Intervall  $[-3; 5]$  grafisch dar. Ermittle die Gleichung der Umkehrfunktion  $f^{-1}$ . Erkläre anhand einer grafischen Darstellung den Zusammenhang der beiden Funktionen  $f$  und  $f^{-1}$ .

Um diese Aufgabe lösen zu können, musst du den Begriff der Umkehrfunktion kennen.

Ist ein linearer Zusammenhang zwischen zwei Größen als Funktion  $f$  gegeben, kann man der unabhängigen Variablen immer eindeutig einen Funktionswert zuordnen. Vertauscht man die abhängigen und unabhängigen Variablen, dann besteht bei linearen Funktionen wieder eine eindeutige Zuordnung.



Die so entstandene Funktion heißt **Umkehrfunktion** und wird mit  $f^{-1}$  bezeichnet.

Die Funktion  $f: D \rightarrow W$  mit  $y = f(x)$  ordnet jedem  $x \in D$  eindeutig ein  $y \in W$  zu. Vertauscht man  $W$  mit  $D$  und kann jedem  $y$  eindeutig ein  $x$  zugeordnet werden, so entsteht die **Umkehrfunktion**  $f^{-1}$  von  $f$ .  
 Ist die umgekehrte Zuordnung nicht eindeutig, dann spricht man von einer **Umkehrrelation**.

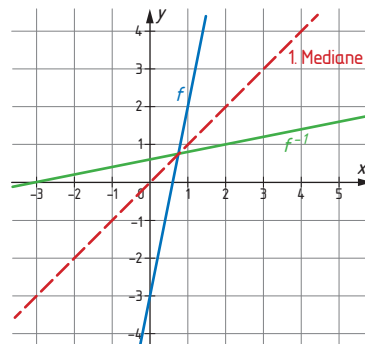
Man kann die Umkehrfunktion aus der Funktionsgleichung berechnen.

**1. Schritt:**  $x$  wird explizit ausgedrückt (dh.  $x$  wird frei gestellt). Man erhält die Gleichung der Umkehrfunktion:  $f^{-1}: x = \frac{y+3}{5}$

**2. Schritt:** Hat man es nur mit den **Koordinaten von Punkten** zu tun und nicht mit Größen aus Alltag, Naturwissenschaft oder Wirtschaft, dann ändert man die Achsenbeschriftung im Koordinatensystem nicht, sondern **vertauscht die Variablen  $x$  und  $y$**  in der Gleichung der Umkehrfunktion.

$f^{-1}: y = \frac{x+3}{5}$ . Dies hat den Vorteil, dass man beide Funktionsgraphen in ein gleich bezeichnetes Koordinatensystem zeichnen kann.

Man kann an der grafischen Darstellung beider Funktionen erkennen, dass die Umkehrfunktion die Spiegelung der Funktion an der ersten Mediane ( $y = x$ ) ist.

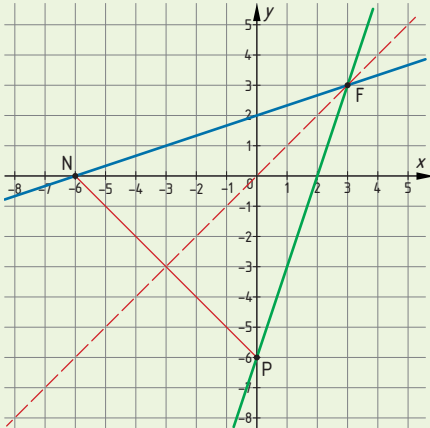


Das Vertauschen von  $x$  und  $y$  entspricht im Koordinatensystem einer Spiegelung des Graphen an der 1. Mediane, die durch die Gleichung  $y = x$  beschrieben wird.

**4.99** Zeichne die Funktion  $f: y = \frac{1}{3}x + 2$  in ein Koordinatensystem.

- a) Berechne die Gleichung der Umkehrfunktion und stelle sie grafisch im gleichen Koordinatensystem dar.
- b) Zeichne die 1. Mediane ebenfalls in dieses Koordinatensystem ein.
- c) Lies den Schnittpunkt der beiden Funktionsgraphen ab. Was fällt dir auf?

Lösung:



a)  $x = (y - 2) \cdot 3 = 3y - 6$

Es handelt sich um Punkte im Koordinatensystem, daher gilt:

$f^{-1}: y = 3x - 6$

grafisch: grüne Gerade

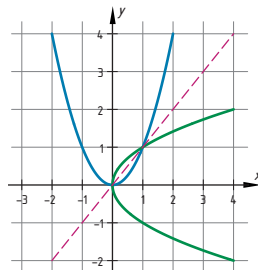
b) 1. Mediane: rot strichlierte Linie.

c) Der Schnittpunkt hat die Koordinaten (3|3). Dieser Punkt liegt auf der 1. Mediane, weil  $x$  und  $y$  den gleichen Wert haben. Es fällt auf, dass der Graph der Umkehrfunktion eine Spiegelung des Funktionsgraphen an der 1. Mediane ist.

**4.100** Untersuche, ob im Intervall  $[-2; 2]$  zur Funktion  $f(x) = x^2$  eine Umkehrfunktion existiert.

Um die Aufgabe zu lösen, erstellen wir eine Wertetabelle im angegebenen Intervall.

x	y	x	y
-2	4	4	-2
-1	1	1	-1
0	0	0	0
1	1	1	1
2	4	4	2



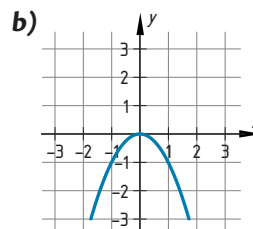
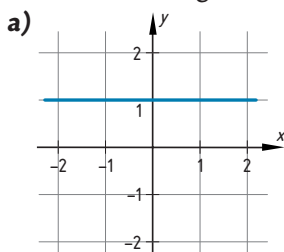
Der gespiegelte Graph stellt keine Funktion dar, da zu jedem  $x > 0$  zwei  $y$ -Werte existieren.

Wenn wir den Definitionsbereich von  $y = x^2$  auf  $\mathbb{R}_0^+$  beschränken, dann liegt eine Funktion vor, da zu jedem  $x \geq 0$  genau ein  $y$ -Wert existiert.

Der an der 1. Mediane gespiegelte Graph von  $f$  stellt nur dann eine Funktion dar, wenn der Definitionsbereich von  $f$  so eingeschränkt wird, dass einem  $y$ -Wert nicht 2 unterschiedliche  $x$ -Werte zugeordnet werden können.

**4.101** Spiegle den gegebenen Graphen an der 1. Mediane.

Argumentiere, ob die Umkehrung eine Funktion oder eine Relation ist. Gib die Gleichungen beider Graphen an.





# Funktionen



Aufgaben 4.102 – 4.103: Stelle jeweils die Funktion und deren Umkehrung in einem gemeinsamen Koordinatensystem grafisch dar. Beurteile, ob eine Umkehrfunktion vorliegt; wenn ja, gib deren Funktionsgleichung an.

ABD

**4.102 a)**  $y = 5x$

**b)**  $y = 2x - 1$

**c)**  $y = -x + 1$

**d)**  $y = 4$

ABD

**4.103 a)**  $y = x^2 + 2$

**b)**  $y = x^2 - 3$

**c)**  $y = \frac{x}{2}$

**d)**  $y = \frac{2}{x+3}$

## 4.6.2 Anwendung der linearen Umkehrfunktion: die Nachfragefunktion

ABC

**4.104** Die Preisfunktion der Nachfrage für Eprouvetten beschreibt den Stückpreis in Abhängigkeit von der nachgefragten Menge durch die Funktion  $p_N$  mit  $p_N(x) = 400 - 2x$   
 $x$  ... Absatzmenge in Stück  
 $p_N(x)$  ... Stückpreis bei einem Absatz von  $x$  Stück in Euro (€).



- a)** Stelle die Funktion und die Umkehrfunktion grafisch jeweils in einem passend skalierten Koordinatensystem dar. Lies die Gleichung der Umkehrfunktion  $x_N(p)$  aus der Grafik ab.
- b)** Berechne die Gleichung der Umkehrfunktion.
- c)** Beschreibe in Worten, welchen Zusammenhang diese Umkehrfunktion angibt.

Was musst du wissen, um diese Aufgabe lösen zu können?

Die **Preisfunktion der Nachfrage**  $p_N = f(x)$  beschreibt die Abhängigkeit des Preises für eine Mengeneinheit einer Ware, wobei die Ware billiger wird, je mehr abgesetzt wird.

Die Umkehrung dieser Funktion ordnet dem „Stückpreis“ die dabei zu erwartende Absatzmenge zu und ergibt die so genannte **Nachfragefunktion**  $x_N = p_N^{-1}: p \rightarrow x_N(p)$

Um diesen Sachverhalt deutlich auszudrücken, stellt man die beiden Funktionen besser getrennt mit vertauschten Achsen dar.

Erstelle für die gegebene Gleichung im eingangs gewählten Beispiel eine Wertetabelle mit beliebigen  $x$ -Werten für die Funktion  $p_N$ :

$x$	0	50	100	150
$p_N(x)$	400	300	200	100

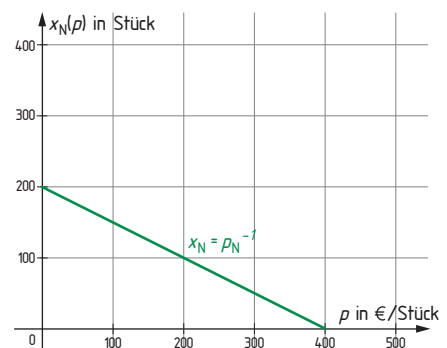
- a)** Wenn wir die **Elemente vertauschen**, dann erhält man die Umkehrfunktion  $p_N^{-1}$ .

$p$	400	300	200	100
$x_N(p)$	0	50	100	150

Die Umkehrfunktion lässt sich grafisch in einem Koordinatensystem darstellen.

Ablesen der Umkehrfunktion  $d = 200, k = \frac{50 - 0}{300 - 400} = -\frac{1}{2}$

$p_N^{-1}: x_N(p) = -0,5p + 200$



b) Man kann die Umkehrfunktion aus der Funktionsgleichung berechnen, dh. in unserem Fall die Nachfragefunktion aus der Preisfunktion der Nachfrage ermitteln.

**x wird explizit ausgedrückt**, dh. x wird frei gestellt und mit  $x_N$  bezeichnet.

Man erhält die Gleichung der Umkehrfunktion:  $p_N^{-1}: x_N = \frac{p - 400}{-2} = -0,5p + 200$

c) Die Umkehrfunktion (= Nachfragefunktion) gibt die nachgefragte Absatzmenge  $x_N$  in Mengeneinheiten (ME) als abhängige Variable bei einem Stückpreis von  $p$  in Geldeinheiten pro Mengeneinheit (GE/ME) an.

**4.105** Es werden  $x$  Kilogramm (kg) eines Rohstoffs gekauft. Der Preis pro kg ändert sich linear in Abhängigkeit von der Verkaufsmenge  $x$ .

Zu Beginn bei  $x = 0$  beträgt der Preis je kg 50 €.

Bei einer Verkaufsmenge von 10 kg beträgt der Preis je kg 43 €.

Stelle die Gleichungen der Preisfunktion der Nachfrage und die ihrer Umkehrfunktion auf.

Zeichne den Graphen der Nachfragefunktion in ein passend skaliertes Koordinatensystem.

ABCD



**4.106** Es werden  $x$  Liter ( $\ell$ ) einer Flüssigkeit gekauft. Der Preis pro  $\ell$  ändert sich linear in Abhängigkeit von der Verkaufsmenge.

Bei einem Preis von 100 € werden 15  $\ell$  des Produkts nachgefragt.

Bei einem Preis von 80 € können 17,5  $\ell$  abgesetzt werden.

Stelle die Gleichungen der Nachfragefunktion und ihrer Umkehrfunktion auf.

Zeichne den Graphen der Preisfunktion der Nachfrage in ein passend skaliertes Koordinatensystem.

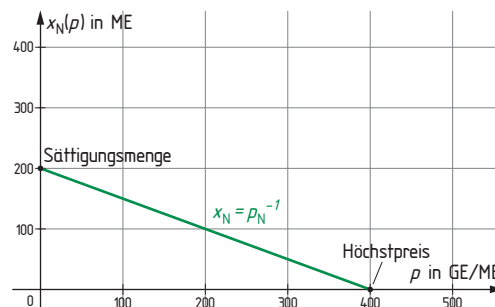
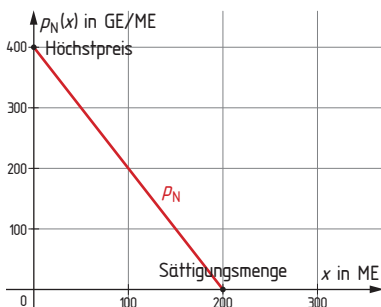
ABCD



Die Nachfragefunktion und daher auch die Preisfunktion der Nachfrage haben zwei besondere Stellen.

Der Preis, bei dem der Käufer nicht mehr bereit ist, die Ware zu kaufen, wird als **Höchstpreis  $p_H$**  bezeichnet. Er lässt sich zB beim Schnittpunkt der Nachfragefunktion mit der  $p$ -Achse ablesen. Berechnen kann man den Höchstpreis über die Nullstelle der Nachfragefunktion  $x_N(p) = 0$  oder als Wert der Preisfunktion der Nachfrage mit  $p_N(0)$ .

Die höchste Menge, die abgesetzt werden kann, wird durch die volle Sättigung des Bedarfs festgelegt und heißt **Sättigungsmenge  $x_s$** . Sie ist die Nullstelle der Preisfunktion der Nachfrage oder kann auch als Wert  $x_N(0)$  der Nachfragefunktion verstanden werden. Die beiden Skizzen verdeutlichen den Zusammenhang.



ABCD

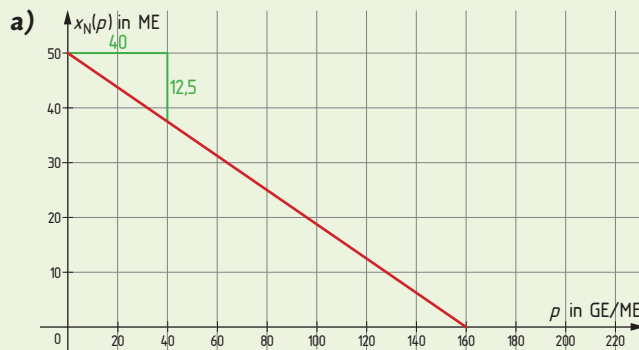
**4.107** Die Nachfrage  $x_N$  nach einem bestimmten Produkt hat die Sättigungsmenge  $x_s$  bei 50 Mengeneinheiten (ME). Der höchste Preis pro ME (Preis bei  $x_N = 0$ ) beträgt 160 Geldeinheiten (GE).

- a)** Stelle die Funktion  $x_N$  grafisch dar und ermittle mithilfe des Steigungsdreiecks die Funktionsgleichung.  
**b)** Berechne die Gleichung der Preisfunktion der Nachfrage und berechne daraus deren Umkehrfunktion. Vergleiche mit der Ableitung in **a**).

Lösung:

$x_N(p)$  ... nachgefragte Menge in ME

$p$  ... Preis der Nachfrage pro ME in GE/ME



$$k = -0,3125; d = 50$$

$$x_N(p) = -0,3125p + 50$$

**b)**  $p_N(x) = k \cdot x + d$

$$k = -160 : 50 = -3,2$$

$$d = 160$$

$$p_N(x) = -3,2x + 160$$

Durch Umformung erhält man:  $x_N(p) = -0,3125p + 50$

Man erhält durch Ableitung und Berechnung das gleiche Ergebnis für  $x_N(p)$ .

ABC

**4.108** Berechne die Sättigungsmenge der Nachfrage, bei der der Preis null wird.

Stelle die gegebene Funktion  $p_N$  grafisch dar und zeichne die Sättigungsmenge ein.

Bestimme die Gleichung der Nachfragefunktion.



**a)**  $p_N(x) = 20 - \frac{x}{2}$

**b)**  $p_N(x) = 12 - 0,5x$

**c)**  $p_N(x) = -2x + 400$

**d)**  $p_N(x) = -0,5x + 50$

**e)**  $p_N(x) = 120 - 2x$

**f)**  $p_N(x) = -5x + 75$

## 4.6.3 Der Schnittpunkt von zwei Funktionsgraphen

Bisher haben wir den Schnittpunkt zweier Graphen stets aus der Zeichnung abgelesen. Nun suchen wir eine Methode, wie man ihn berechnen kann.

**4.109** Tony und Jim kaufen je ein gebrauchtes Motorrad.  
 Tonys Motorrad kostet 1.250 € und hat einen Spritverbrauch von 5 Liter pro 100 km.  
 Jims Motorrad kostet 1.190 € und hat einen Spritverbrauch von 6 Liter pro 100 km.  
 1 Liter Benzin kostet 1,40 €.



Vergleiche mithilfe einer Grafik die Kosten für das Motorrad und den Spritverbrauch bei Tony und Jim für Fahrten bis 15 000 km.  
 Berechne, bis zu welcher Strecke Jim mit dem billigeren Motorrad trotz des höheren Spritverbrauchs preislich günstiger, gleich und weniger günstig als Tony abschneidet.

Du stellst am besten die Funktionsgleichungen der Kosten für beide Motorräder auf.  
 $x$  ... Fahrstrecke in Kilometer (km)  
 $f(x), g(x)$  ... Kosten für  $x$  km in Euro (€)

Tony:  $f(x) = 1\,250 + 0,05 \cdot 1,4x = 1\,250 + 0,07x$

Jim:  $g(x) = 1\,190 + 0,06 \cdot 1,4x = 1\,190 + 0,084x$

Die Grafik ergibt, dass Jim bis ungefähr 5 000 km günstiger ist, bei ca. 5 000 km sind beide gleich, nach 5 000 km wird es für Tony günstiger. Bei 15 000 km beträgt der Kostenunterschied ungefähr 150 €.

Die Ablesung des Schnittpunkts aus der Grafik ist ungenau.

Darum berechnen wir den Schnittpunkt der beiden Geraden, die wir in Normalform dargestellt haben:

$f: y = 1\,250 + 0,07x$

$g: y = 1\,190 + 0,084x$

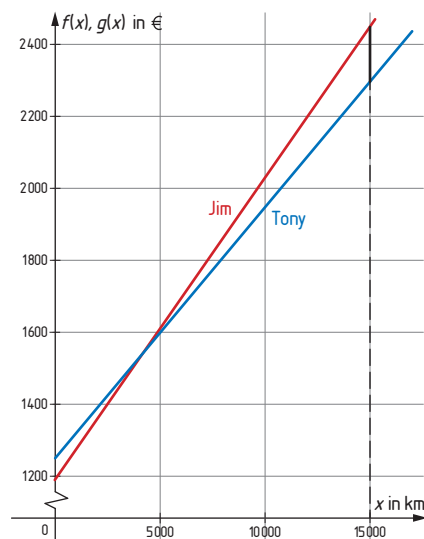
Es liegen zwei Gleichungen vor. Für den Schnittpunkt gilt, dass die Funktionswerte beider Funktionen übereinstimmen müssen.

Daher kann man beide  $y$ -Terme einander gleichsetzen.

$$\begin{array}{r} 1\,250 + 0,07x = 1\,190 + 0,084x \quad | -0,07x - 1\,190 \\ 60 = 0,014x \\ x = 4\,285,714\dots \approx 4\,285,7 \end{array}$$

$f(4\,285,7) = g(4\,285,7) = 1\,550$

Die Kosten betragen für Tony und Jim gleich viel, nämlich 1.550 €, wenn beide Motorräder ca. 4 285,7 km zurückgelegt haben.



## Lösung mittels Technologieeinsatz:

### Grafisches Verfahren:

I:  $y = 1\,250 + 0,07x$

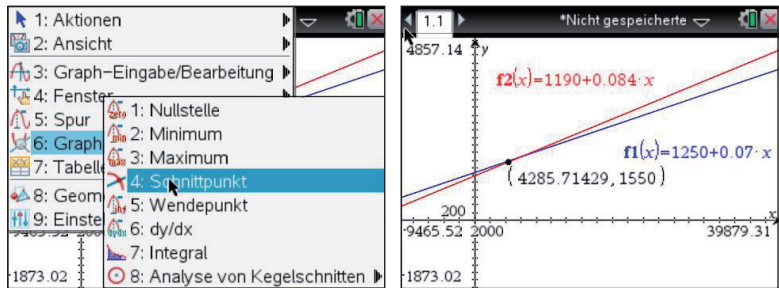
II:  $y = 1\,190 + 0,084x$

### TI\_Nspire:

Beide Funktionsgleichungen im Grafikfenster eingeben.

**MENU/2 graphs/6**

**Grafik analysieren/ 4 Schnittpunkt/enter/** untere Grenze und obere Grenze eingeben/ **enter**.



Die Anleitung für die Lösung von Gleichungssystemen bei TI82-84, Excel und Geogebra-CAS siehe [www.hpt.at](http://www.hpt.at) (Schulbuch Plus für Schüler/innen)

Die lineare Gleichung, die man durch das Gleichsetzen der beiden Funktionsterme erhält, hat 3 unterschiedliche Lösungsmöglichkeiten:

- Eine eindeutige Lösung: Die Graphen beider Funktionen schneiden einander.
- Keine Lösung: die Graphen der beiden Funktionen liegen parallel zueinander.
- Alle Zahlen der Definitionsmenge sind Lösungen: die beiden Graphen sind ident.

### ABC

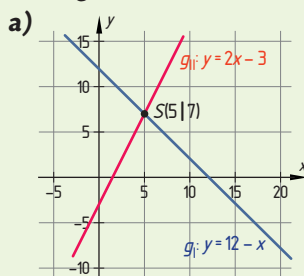
4.110 Ermittle grafisch den Schnittpunkt der beiden Funktionsgraphen von:

a)  $g_1(x) = -x + 12$   
 $g_2(x) = 2x - 3$

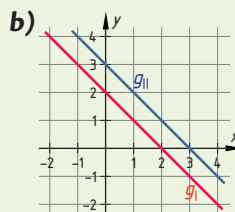
b)  $g_1(x) = -x + 2$   
 $g_2(x) = -x + 3$

c)  $g_1(x) = -x + 2$   
 $g_2(x) = -x + 2$

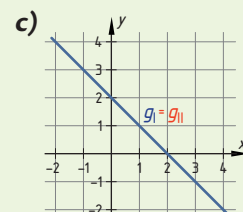
Lösung:



Eindeutige Lösung:  
 $x = 5, y = 7$



Keine Lösung



Alle Zahlen der Definitionsmenge sind Lösungen:  
 $-x + 2$  für alle  $x \in D$



Aufgaben 4.111 – 4.112: Der Graph der linearen Funktion  $f$  geht durch die Punkte A und B.

- Ermittle die Schnittpunkte dieser Geraden mit beiden Koordinatenachsen.
- Gib die Gleichung jener Geraden an, die durch den Ursprung und durch  $P(-2|-2)$  geht.
- Stelle die beiden Geraden grafisch dar und lies den Schnittpunkt ab.
- Berechne den Schnittpunkt der beiden Geraden und überprüfe anhand der Grafik.

**AB 4.111** A(-4|5), B(4|1)

**AB 4.112** A(1|7), B(5|2)



**4.113** Zeichne die beiden Geraden und berechne ihren Schnittpunkt.

a) I:  $y = -x + 1$

b) I:  $y = \frac{1}{4}x - 1$

II:  $y = 2x + 7$

II:  $y = x + 2$

**4.114** Die Telefongesellschaft TWO bietet zwei verschiedene Tarife an.

Tarif 1: Monatliche Grundgebühr 9 €, Gesprächsminute 9 Cent

Tarif 2: Monatliche Grundgebühr 15 €, Gesprächsminute 5 Cent

a) Erstelle die beiden annähernd linearen Tarif-Funktionen für ein Monat.

b) Zeichne die beiden Funktionsgraphen.

Lies aus der Grafik ab, wie viel Euro mehr jemand bezahlt, wenn er in einem Monat 6 Stunden telefoniert und den ungünstigeren Tarif gewählt hat.

c) Interpretiere, was der Schnittpunkt im Sachzusammenhang aussagt.



**4.115** Auf einer Kartbahn werden 2 Tarife angeboten.

Tarif 1: 10 Minuten kosten 11 € inklusive Leihgebühr für den Helm und den Anzug.

Tarif 2: 10 Minuten kosten 9 €, die Leihgebühr für Helm und Anzug beträgt 14 €.

a) Erstelle die Kostenfunktionen und zeichne sie.

b) Ermittle durch Berechnung und durch Ablesen aus der Grafik, für welche Fahrzeit welcher Tarif günstiger ist, wenn man Helm und Anzug benötigt.



## 4.6.4 Anwendung im Wirtschaftsbereich: das Marktgleichgewicht

$x$  ... Menge einer Ware, die abgesetzt werden kann, in Mengeneinheiten (ME)

$p_A(x)$  ... Preis pro Mengeneinheit in (GE/ME) der angebotenen Ware, abhängig von der angebotenen Menge  $x$  in ME  $\Rightarrow$  **Preisfunktion des Angebots (wird auch als „inverse Angebotsfunktion“ bezeichnet)**. Jeder angebotenen Menge entspricht ein **Angebotspreis**  $p_A$ , der höher wird, wenn der Produzent von einer Ware mehr anbietet.

$p_N(x)$  ... Preis pro Mengeneinheit in (GE/ME) der nachgefragten Ware, abhängig von der nachgefragten Menge  $x \Rightarrow$  **Preisfunktion der Nachfrage („inverse Nachfragefunktion“)**. Wenn mehr Käufer bereit sein sollen, eine Ware zu kaufen, dann muss der **Nachfragepreis**  $p_N$  sinken.

$x_A(p)$  ... vom Produzenten **angebotene Menge** in ME einer Ware  $\Rightarrow$  **Angebotsfunktion**

$x_N(p)$  ... vom Konsumenten **nachgefragte Menge** in ME einer Ware,  $\Rightarrow$  **Nachfragefunktion**  
Sie sind beide abhängig von dem Preis pro Mengeneinheit in GE/ME.

Angebot und Nachfrage bestimmen den **Marktpreis**.

Unter dem Markt versteht man das „Aufeinandertreffen“ von Anbietern (Produzenten) und den Nachfragern (Konsumenten).

**Der Marktpreis** (= Gleichgewichtspreis)  $p_G$  ist jener Preis, bei dem Angebotsmenge und Nachfragemenge gleich groß sind. Er ist über den Schnittpunkt der Graphen beider Preisfunktionen bestimmbar.

$$p_A(x) = p_N(x) \Rightarrow x = x_G \quad \text{und} \quad p_G = p_A(x_G) = p_N(x_G)$$

ABCD



**4.116** Für eine Ware werden die Funktionsgleichungen für die Preisfunktionen in Angebot und Nachfrage mit  $p_N(x) = -0,5x + 7$  bzw.  $p_A(x) = 1,5x + 3$  angegeben.

$x$  ... Menge in Mengeneinheiten (ME);

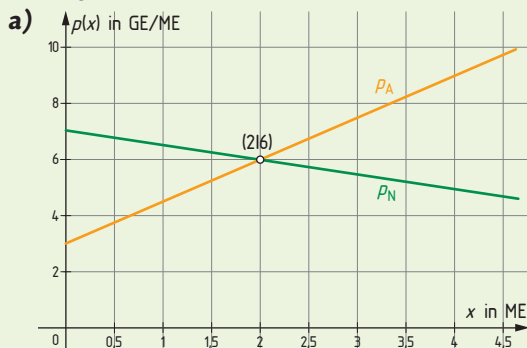
$p_N(x); p_A(x)$  ... Preise in Geldeinheiten pro Mengeneinheit (GE/ME)

**a)** Stelle die beiden Funktionen in einem gemeinsamen Koordinatensystem grafisch dar.

**b)** Ermittle aus der Grafik und durch Berechnung den Gleichgewichtspreis (Marktpreis) für diese Ware.

**c)** Berechne die Gleichungen der Nachfrage- und der Angebotsfunktion.

Lösung:



**b)** Marktpreisbestimmung aus der Grafik:

6 GE/ME bei  $x_G = 2$  ME

Marktpreisbestimmung durch Berechnung:

$$-0,5x + 7 = 1,5x + 3 \Rightarrow x = 2$$

$$p_G = -1 + 7 = 6$$

**c)** Nachfragefunktion:

$$x_N(p) = (7 - p) : 0,5 = 14 - 2p$$

Angebotsfunktion:

$$x_A(p) = (p - 3) : 1,5 = p - 2$$

**BD 4.117** Skizziere die folgenden Funktionen und argumentiere, ob die angegebene Gleichung den Preis für das Angebot oder für die Nachfrage einer Ware beschreibt.

Die Nachfrage bzw. das Angebot werden in Mengeneinheiten (ME) und der Preis in Geldeinheiten pro Mengeneinheit (GE/ME) angegeben.

**a)**  $p(x) = 4 - \frac{x}{5}$

**b)**  $p(x) = 4 + 2x$

**c)**  $p(x) = 5 - \frac{1}{x}$

**BC 4.118** Die Preisfunktion für das Angebot und eine Nachfragefunktion sind durch die folgenden Gleichungen beschrieben:  $p_A(x) = 3 + 2x$ ;  $x_N(p) = -p + 16$

Berechne den Marktpreis in Geldeinheiten pro Mengeneinheit (GE/ME).

Vergleiche das Ergebnis anhand einer geeigneten Grafik.

**ABC 4.119** Eine Angebotsfunktion wird durch die Gleichung  $x_A(p) = a \cdot p + b$  mit  $x_A$  in ME und  $p$  in GE/ME beschrieben.

Sie hat an den Grenzen des Intervalls  $[2; 5]$  die Absatzmengen 1 ME bzw. 10 ME.

**a)** Ermittle die Koeffizienten  $a$  und  $b$  der Angebotsfunktion.

**b)** Die Preisfunktion der Nachfrage lässt sich durch die Gleichung  $p_N(x) = -0,5x + 10$  beschreiben.

Berechne den Marktpreis in GE/ME.

Vergleiche das Ergebnis anhand einer grafischen Darstellung.