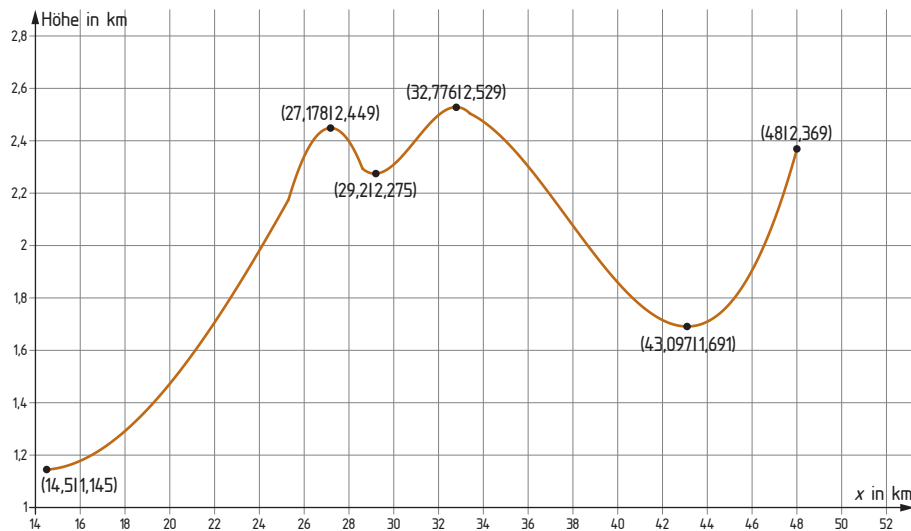


Die Aufgaben dieses Abschnitts dienen dazu, notwendiges Vorwissen vergangener Semester für die Kompetenzbereiche dieses Moduls zu wiederholen und zu aktivieren und die Grundlagen dafür bereitzustellen und zu ergänzen.
Ziel ist eine nachhaltige Sicherung der entsprechenden Grundkompetenzen.

TE 1. Aufgabe

Die Abbildung zeigt das Höhenprofil einer Bergfahrt:



- Gib die lokalen und globalen Minimum- und Maximumstellen des Profils an!
- Beschreibe das Monotonieverhalten des Graphen im gegebenen Definitionsbereich!
- Berechne und interpretiere den folgenden Term im vorliegenden Sachzusammenhang!

$$\frac{2,369 - 1,145}{48 - 14,5}$$

- Stelle für die Intervalle $[29,2; 32,776]$ und $[32,776; 43,097]$ mithilfe der Randpunkte der Intervalle Geraden in der Form $y = kx + d$ auf, die näherungsweise das Höhenprofil des Straßenverlaufs beschreiben!

Zeichne die Geraden in die Grafik ein!

Berechne anschließend jeweils die Steigung bzw. das Gefälle dieser Geraden in Prozent und den Anstiegswinkel (Neigungswinkel) in Grad!

Berechne den Schnittwinkel der beiden Geraden!

AG | 3.2 | FA | 1.4 | 1.5 | 1.7 | 2.2 | 2.3 | 2.4 | AN | 1.3 |

TE 2. Aufgabe

Der Preis p eines Produkts in Euro/Mengeinheit (€/ME) kann als Funktion des Monatsumsatzes x in ME durch $p(x) = -0,3x + 45$ für $0 \leq x \leq 150$ angegeben werden. Der Erlös E in Euro beim Verkauf von x ME im Monat wird durch den Zusammenhang $E(x) = p(x) \cdot x$ beschrieben.

- Berechne die Umkehrfunktion p^{-1} (= Nachfragefunktion) und gib deren Definitionsmenge an!
- Ermittle und interpretiere $p^{-1}(95)$!
- Berechne die erlösmaximierende Stelle und den maximalen Erlös!
- Interpretiere $\frac{E(20) - E(10)}{20 - 10}$ im Sachzusammenhang!

FA | 1.3 | 1.5 | AN | 1.1 |

TE 3. Aufgabe

Eine Firma erzeugt Autos.
Der dabei zu erwartende Gewinn kann durch folgende Gewinnfunktion berechnet werden:

$$G(x) = -2,5x^2 + 180x - 1\,200$$

x ... Anzahl der Autos in ME

$G(x)$... Gewinn in GE

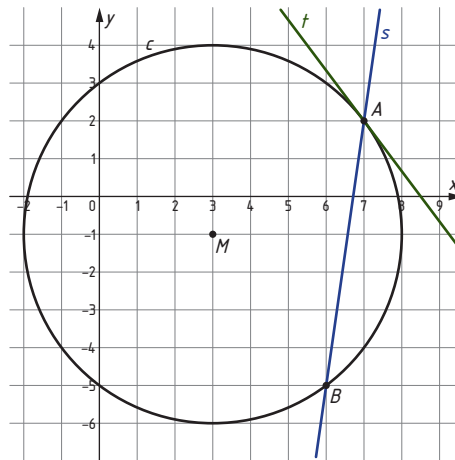
- Berechne die Nullstellen der Funktion und deute sie im Zusammenhang!
- Bestimme die mittlere Änderungsrate des Gewinns im Intervall $[30; 50]$ und deute sie im Zusammenhang!
Berechne die Gewinnsteigerung pro ME bei einer Steigerung der Verkaufsmengen von 20 auf 30 ME!
- Berechne jene Produktionsmengen, bei denen der Gewinn 1 000 GE beträgt!
- Berechne die gewinnmaximierende Menge und den maximalen Gewinn!

AG |2.3| FA |1.2|1.4|1.5|1.7|4.3| AN |1.3|



TE 4. Aufgabe

Ein Kreis hat den Mittelpunkt $M(3 | -1)$ und geht durch den Punkt $A(7 | 2)$.
Der Punkt $B(6 | -5)$ liegt auf dem Kreis. Durch A läuft die Gerade t , die normal zu $\overline{AM}$ ist.
Weiters ist die Gerade s eingezeichnet, die durch A und B geht.



- Beschreibe jeweils die Lage der Geraden s bzw. t in Bezug auf den Kreis!
- Stelle die Gleichung der Geraden t auf! Stelle die Gleichung der Geraden s auf!
Berechne den Schnittwinkel der Geraden s und t !
Ermittle den Abstand der Geraden s zu M und setze ihn in Beziehung zu $\overline{AM}$!
- Bestimme den Mittelpunkt M_{AB} der Strecke $\overline{AB}$!
Stelle eine zu AB normale Gerade g durch M_{AB} auf!
Zeichne g ein und beschreibe, was dir bezüglich des Punkts M auffällt!
Ermittle anschließend rechnerisch, ob M auf g liegt!
- Zeichne die Gerade $p: -2x + 3y = 14$ ein!
Beschreibe deren Lage zum Kreis!
Ermittle den Abstand der Geraden p zu M und setze ihn in Beziehung zu $\overline{AM}$!

AG |3.2|3.4|3.5|

TE 5. Aufgabe

Gateway Arch ist eine berühmte Sehenswürdigkeit in St. Louis, Missouri, und gilt als das Wahrzeichen der Stadt. Die Form des ungewöhnlichen Bauwerks entspricht näherungsweise einer Parabel.

Man nimmt den höchsten Punkt des Gateway Arch als Scheitel einer Parabel mit den Koordinaten $S = (0|0)$ an. Die Spannweite (Breite des Bogens am Boden) beträgt ebenso wie die Höhe des Bauwerks 192 m.



Ermittle eine Funktionsgleichung der Parabel in der Form $f(x) = a \cdot x^2$!

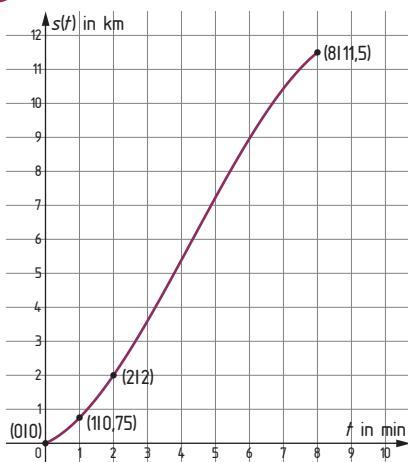
Zu einem besonderen Anlass soll am Bauwerk parallel zum Boden eine 72 m lange Lichterkette montiert werden.

Berechne die Mindesthöhe (vom Boden aus gemessen) für die Montage!

Ermittle rechnerisch die Mindestlänge einer Lichterkette, die in 100 m Höhe angebracht werden soll!

AG | 2.3 | 3.2 | FA | 1.4 | 1.7 | 3.1 | 3.2 | 3.3

TE 6. Aufgabe



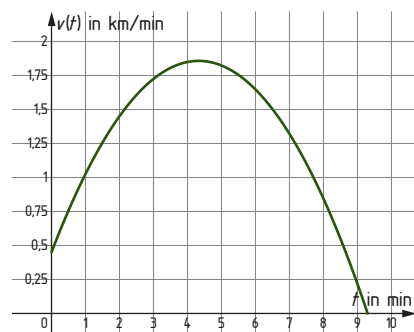
Die Bewegung eines Autos im Zeitintervall $[0; 8]$ in Minuten (min) ist durch nebenstehendes Weg-Zeit-Diagramm festgehalten.

- Ermittle die mittlere Änderungsrate für die Intervalle $[1; 2]$ und $[1; 8]$ und interpretiere sie im Sachzusammenhang!
- Gib alle lokalen und globalen Extremstellen im gegebenen Intervall sowie das Monotonieverhalten an!
- Ermittle anhand der in der Abbildung gegebenen Werte die Funktionsgleichung $s(t)$ einer Polynomfunktion 3. Grads.

Die Grafik rechts zeigt die Geschwindigkeitsfunktion des Autos im Intervall $[0; 9,3]$.

- Interpretiere den Hochpunkt im Sachzusammenhang!
- Ermittle näherungsweise, welche Geschwindigkeit das Auto zu Beginn der Messung hatte! Gib an, wann das Auto wieder zum Stillstand kommt!
- Beschreibe, wie man die durchschnittliche Beschleunigung im Zeitintervall $[1; 3]$ bestimmen kann!

Lies jenes Zeitintervall ab, in dem die durchschnittliche Beschleunigung negativ ist!



AG | 2.3 | FA | 1.2 | 1.4 | 1.5 | 1.7 | 4.3 | AN | 1.3

Franciscus Vieta (1540 – 1603) war ein französischer Advokat und Mathematiker. Er führte Buchstaben als Variable und das Rechnen mit Buchstaben und mit Symbolen für Rechenoperationen in die mathematische Notation ein und gilt daher als „Vater der Algebra“. Er unterschied die „logistica numerosa“ als reines Zahlenrechnen von der abstrakteren „logistica speciosa“, dem „Buchstabenrechnen“. Unsere heutige Schreibweise ist größtenteils auf ihn zurückzuführen.



Franciscus Vieta

Bekannt ist zB der **Satz von Vieta** über die Lösungen einer quadratischen Gleichung. Der Satz lässt sich auf Polynomgleichungen bzw. Polynome beliebigen Grads verallgemeinern und ist daher die Grundlage für das Lösen von Gleichungen höheren Grads durch Polynomdivision.

1.1 Lösungsverfahren für Polynomgleichungen höheren Grads

1.1.1 Der Grad einer Polynomgleichung

- 1.1** Forme die Gleichung $(x - 1)^4 + 3x^3 + 9 = 0$ in die übliche Schreibweise einer Polynomgleichung um!
Gib den Grad der Polynomgleichung an!

AG |1.2|

Ein **Polynom** ist die endliche Summe von Potenzen einer Variablen mit natürlichen Hochzahlen. Eine Polynomgleichung entsteht durch Nullsetzen eines Polynoms.

Unter dem Grad einer Polynomgleichung versteht man die höchste vorkommende Hochzahl der Variablen im Polynom.

Die Gleichung in obigen Beispiel wird mithilfe der binomischen Formel umgeformt:

$$(x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1) + 3x^3 + 9 = 0$$

Die Polynomgleichung lautet:

$$x^4 - x^3 + 6x^2 - 4x + 10 = 0$$

Der Grad der Polynomgleichung ist 4, was auch ohne Umformung sofort erkennbar war.

Eine Polynomgleichung des Grads n ($n \in \mathbb{N}^*$) hat die Form:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = 0$$

n ist die höchste vorkommende Hochzahl.



- 1.2** Ordne dem angegebenen Grad jeweils die korrekte Polynomgleichung aus A bis F zu!

AG |1.2|

1	
2	
3	
4	

A	$x^3 + 6x \cdot (x^3 + 7x) - 2 = 0$
B	$-x^4 + 5x^2 \cdot (x^3 + 2) - 3x^2 = 0$
C	$6x^3 \cdot (x - 1)^2 + 3x^2 + x - 5 = 0$
D	$(x - 2)^3 - x^3 + 6x^2 + 9 = 0$
E	$-8x^4 + 2 \cdot (x + 5)^2 \cdot (2x - 5)^2 - 40x^3 = 0$
F	$(-x + 3)^2 \cdot (x + 1)^2 - x^4 + 5 = 0$

1.1.2 Polynomgleichungen 1. und 2. Grads

1.3 Löse die Gleichungen a) $4x + 8 = 0$ und b) $x^2 + 2x - 1 = 0$ in $G = \mathbb{R}$!

AG | 1.2 | 2.2 | 2.3 |

- a) Im Fall einer linearen Gleichung sprechen wir von einer Polynomgleichung 1. Grads. Wir können Äquivalenzumformungen anwenden und erhalten die Lösung $x = -2$.
- b) Im Fall der quadratischen Gleichung haben wir es mit einer Polynomgleichung 2. Grads zu tun. Wir erinnern uns:

Die beiden Lösungen einer quadratischen Gleichung in allgemeiner Form

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ erhalten wir über die Formel: } x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

In der normierten Darstellung $x^2 + px + q = 0$ lösen wir mithilfe der Formel:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Es ergeben sich zwei Lösungen in $\mathbb{R}$, wenn die Diskriminante (= der Ausdruck in der Formel unter der Wurzel) positiv ist.

Nur eine Lösung in $\mathbb{R}$ erhalten wir, wenn die Diskriminante null ist.

Ist die Diskriminante negativ, dann sind die möglichen Lösungen nicht reell.

In unserem Beispiel können wir die kleine Lösungsformel $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+1}$ verwenden, um die Gleichung zu lösen.

Es ergibt sich also $x_1 = -2,414...$ und $x_2 = 0,414...$.

Ist der Grad des Polynoms gleich 1, so erhalten wir die lineare Gleichung $a_0 + a_1x = 0$, ihre Lösung ist $x = -\frac{a_0}{a_1}$.

Ist der Grad des Polynoms gleich 2, ergibt sich die quadratische Gleichung $a_0 + a_1x + a_2x^2 = 0$. Diese können wir mit der bekannten Lösungsformel lösen und

erhalten keine, eine oder zwei reelle Lösungen der Form $x_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_0}$.

1.4 Löse die folgenden Polynomgleichungen vom Grad 1 in $\mathbb{R}$!

AG | 1.2 | 2.2 |

- a) $x - 8 = 0$
b) $2x + 6 = 0$
c) $4x - 9 = 1$
d) $-3x + 8 = 5$
e) $-0,5x + 6 = 2$
f) $\frac{4}{3}x - \frac{1}{6} = 1$

1.5 Löse die folgenden Polynomgleichungen vom Grad 2 in $\mathbb{R}$!

AG | 1.2 | 2.3 |

- a) $x^2 - 12x - 1 = 0$
 c) $2x^2 - 7x + 2 = 0$
 e) $-0,1x^2 + 1,3x - 0,7 = 0$
- b) $3x^2 - 25x + 5 = 0$
 d) $-x^2 + 6x - 8 = 0$
 f) $\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{8}x - 1 = 0$

M 1.6 Ordne den Lösungsmengen $M \subset \mathbb{R}$ jeweils die passende Gleichung aus A bis D zu!

AG |1.2|2.3|

$M = \{ \}$	
$M = \{0\}$	

A	$x^2 - 2x - 2 \cdot (x^2 + 2) + 4 = 0$
B	$x^2 + 2x - 2 \cdot (x + 2) + 4 = 0$
C	$x^2 + 2x - 2 \cdot (x - 2) + 4 = 0$
D	$2x^2 + 2x + 2 \cdot (x - 2) + 4 = 0$

1.1.3 Polynomgleichungen durch Herausheben lösen

1.7 Löse die Polynomgleichung 3. Grads $3x^3 + 7x^2 + 4x = 0$ in $\mathbb{R}$!

AG | 1.2|2.3|

Wir heben x heraus, die Gleichung wird zu $x \cdot (3x^2 + 7x + 4) = 0$.

Da das Produkt zweier Faktoren laut **Produkt-Null-Satz** genau dann null ist, wenn (mindestens) einer der beiden Faktoren null ist, erhalten wir die erste Lösung $x_1 = 0$.

Um die übrigen Lösungen zu finden, lösen wir die Gleichung $3x^2 + 7x + 4 = 0$ mit der großen Lösungsformel und erhalten die Lösungen $x_2 = -1$ und $x_3 = -\frac{4}{3}$.

Das Herausheben ist dann von Bedeutung, wenn eine Gleichung mit $a_0 = 0$ vorliegt. Ist eine Polynomgleichung vom Grad 3 mit $a_0 = 0$ gegeben, so erhalten wir:

$$a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = x \cdot (a_1 + a_2x + a_3x^2) = 0$$

Die 1. Lösung ist stets null. Die 2. und 3. Lösung ergibt sich aus der Lösung der quadratischen Gleichung in der Klammer.

Ist $a_0 \neq 0$, so ist dieses Verfahren nicht anwendbar.

Wir können auch mehrgliedrige Terme herausheben:

1.8 Löse die Gleichung $(x - 1) \cdot (x + 3) + 7 \cdot (x + 3) = 0$ in $\mathbb{R}$!

AG | 1.2|2.3|

Lösung:

Wir heben den Faktor $x + 3$ heraus und erhalten die Gleichung $(x + 3) \cdot ((x - 1) + 7) = 0$.

Die erste Lösung ist die Lösung von $x + 3 = 0$, $x_1 = -3$,
die zweite ist die Lösung von $(x - 1) + 7 = 0$, also $x_2 = -6$.

Aus einer Polynomgleichung mit $a_0 = 0$, bei der alle Summanden einen gemeinsamen Faktor haben, können wir diesen gemeinsamen Faktor herausheben.

Wir erhalten ein Produkt von Gleichungen mit geringerem Grad.

Mithilfe des Produkt-Null-Satzes können wir Lösungen finden, indem wir alle Faktoren null setzen und die einfacheren Gleichungen lösen.

M 1.9

Kreuze jene Gleichung an, die durch Herausheben auf eine Gleichung reduziert werden kann, deren Faktoren höchstens von Grad 2 sind! Begründe!

AG | 1.2|2.3|

$x^4 - 3x^3 + x = 0$	☐	$8x^4 + x^3 - 3x^2 - 9x = 0$	☐
$-5x^3 + 6x^2 + 7 = 0$	☐	$(x + 1) \cdot (x - 5)^3 + 2 \cdot (8x - 40) = 0$	☐
$8x^4 - 5x^3 + x^2 = 0$	☐	$-(3x + 7)^4 - (6x + 14)^3 = 0$	☐

1.10

Forme die Polynomgleichungen durch Herausheben um und löse sie in $\mathbb{R}$! AG | 1.2|2.3|

a) $x^3 - 5x^2 + x = 0$

b) $-6x^3 + 3x = 0$

c) $5x^4 - x^2 = 0$

d) $7x^4 + 2x^3 - 8x^2 = 0$

e) $3 \cdot (x - 2)^3 + 2 \cdot (x - 2) = 0$

f) $-(x + 5)^2 - 5 \cdot (x + 5)^4 = 0$

1.11

Löse die Gleichungen in $\mathbb{R}$ durch Herausheben und wende anschließend den Produkt-Null-Satz an!

AG | 1.2|2.3|

a) $(x - 3)^2 \cdot 3 - (-2x + 6) = 0$

b) $(4x + 12) + (x + 3)^3 = 0$

c) $(x^3 - 2x^2 + x) + 2x^2 - 2x = 0$

d) $(x + 3) \cdot (x - 1) - \left(\frac{x}{3} + 1\right) = 0$

e) $(x - 2)^3 - (x^2 - 4x + 4) = 0$

f) $6 \cdot (-x + 3)^4 - 2 \cdot (3 - x)^2 = 0$

1.1.4 Polynomgleichungen durch Faktorisieren lösen

1.12 Löse die Gleichung $x^2 - 144 = 0$ in $\mathbb{R}$!

AG |1.2|2.3|

In dieser Gleichung kommt ein konstantes Glied vor, wir kommen also mit Herausheben nicht ans Ziel. Wir können jedoch mittels der binomischen Formel $x^2 - y^2 = (x + y) \cdot (x - y)$ faktorisieren, dh, wir schreiben $x^2 - 144 = (x + 12) \cdot (x - 12)$.

Um $(x + 12) \cdot (x - 12) = 0$ zu lösen, benützen wir die Tatsache, dass einer der beiden Faktoren null sein muss. Wir erhalten also die Lösungen $x_1 = -12$ und $x_2 = 12$.

Wir können auch Terme höherer Ordnung mit dieser Methode faktorisieren:

Um Terme der Form $x^n - y^n$ ($n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$) zu faktorisieren, können wir die sogenannte **Horner'sche Regel** (nach W. G. Horner) verwenden: Für $x, y \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ gilt:

$$x^n - y^n = (x - y) \cdot (x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \dots + x^2y^{n-3} + xy^{n-2} + y^{n-1})$$

Um eine Gleichung der Form $x^n - y^n = 0$ zu lösen, schreiben wir sie zuerst solcherart um, dass die Bestandteile Terme mit niedrigerem Grad sind. Wir verwenden anschließend den Produkt-Null-Satz und lösen die einfacheren Gleichungen $x - y = 0$ und $x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \dots + x^2y^{n-3} + xy^{n-2} + y^{n-1} = 0$. Falls es möglich ist, können wir den Grad des zweiten Terms (zB durch Herausheben) weiter reduzieren.

1.13 Löse die Gleichung $x^3 - 27 = 0$ in $\mathbb{R}$ mit der Horner'schen Regel!

AG |1.2|2.3|

Lösung:

Es ist $x^3 - 27 = x^3 - 3^3$, mit der Horner'schen Regel erhalten wir

$$x^3 - 3^3 = (x - 3) \cdot (x^2 + 3x + 9) = 0.$$

Um diese Gleichung zu lösen, verwenden wir den Produkt-Null-Satz und lösen zunächst $x - 3 = 0$ und erhalten als erste Lösung $x_1 = 3$.

Schließlich lösen wir noch die quadratische Gleichung $x^2 + 3x + 9 = 0$, um die restlichen Lösungen zu erhalten.

Diese Gleichung hat keine reelle Lösung, denn $x_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 9} \notin \mathbb{R}$.

Die Lösungsmenge der Ausgangsgleichung ist $L = \{3\}$.

1.14 Löse die Polynomgleichungen in $\mathbb{R}$ durch Faktorisieren mithilfe der binomischen Formel!

AG |1.2|2.3|

a) $x^2 - 64 = 0$

b) $x^2 - 100 = 0$

c) $x^2 - 0,25 = 0$

d) $x^2 - 0,0625 = 0$

e) $x^2 - \frac{1}{64} = 0$

f) $x^2 - \frac{4}{25} = 0$

1.15 Löse die Polynomgleichungen in $\mathbb{R}$ mit der Horner'schen Regel!

AG |1.2|2.3|

a) $x^3 - 64 = 0$

b) $x^3 + 1 = 0$

c) $x^3 - 0,125 = 0$

d) $x^3 - 0,01 = 0$

e) $x^3 - \frac{1}{8} = 0$

f) $x^3 - \frac{8}{125} = 0$

1.16 Kreuze die korrekte reelle Lösungsmenge für die Gleichung $x^4 - 16 = 0$ an!

AG |1.2|2.3|

$\{-2\}$	☐	$\{2\}$	☐	$\{-2, 2\}$	☐
$\{-4\}$	☐	$\{-2, 2, -4, 4\}$	☐	$\{4\}$	☐

1.1.5 Polynomgleichungen 4. Grads durch Substituieren lösen

1.17 Löse die Gleichung $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ in $\mathbb{R}$!

AG | 1.2|2.3|

In dieser Gleichung 4. Grads kommt ein konstantes Glied vor, daher können wir keinen Term herausheben. Auch ein Umschreiben in die Form $x^n - y^n$ ist nicht möglich, wir kommen also auch mit der Horner'schen Regel nicht weiter. Wir sehen aber, dass der Exponent 4 das Doppelte des anderen vorkommenden Exponenten 2 ist.

Hier haben wir es mit einer sogenannten **biquadratischen Gleichung** zu tun, dh. mit einer Gleichung, in der nur vierte und zweite Potenzen der Variablen vorkommen. Wir können diese Gleichung auf eine quadratische Gleichung reduzieren, indem wir eine neue Variable y mit $y = x^2$ definieren. Damit wird unsere ursprüngliche Gleichung zu $y^2 - 10y + 9 = 0$. Für diese Gleichung können wir wieder eine Lösungsformel für quadratische Gleichungen verwenden und wir erhalten die Lösungen $y_1 = 5 + \sqrt{25 - 9} = 9$ und $y_2 = 5 - \sqrt{16} = 1$. Schließlich müssen wir die Variable $y = x^2$ noch rücksostituieren, damit wir durch Wurzelziehen alle möglichen Lösungen der Ausgangsgleichung erhalten. Es ist $x_{1,2} = \pm 3$ und $x_{3,4} = \pm 1$; $L = \{-3, -1, 1, 3\}$

Wir verwenden das Substitutionsverfahren bei **biquadratischen Gleichungen** der Form $a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 = 0$. Wir ersetzen (substituieren) x^2 durch y und erhalten so eine quadratische Gleichung in der Variablen y : $a_0 + a_2y + a_4y^2 = 0$

Diese können wir mit den uns schon bekannten Formeln nach y lösen.

Am Schluss muss die Lösung rücksustituiert werden. $x_{1,2} = \pm\sqrt{y_1}$ und $x_{3,4} = \pm\sqrt{y_2}$.

Manchmal kann man auch Binome oder Polynome substituieren, um auf eine quadratische Gleichung zu kommen:

zB $(x + 1)^4 + (x + 1)^2 + 4 = 0 \Rightarrow$ Substitution: $y = (x + 1)^2$

M 1.18 Kreuze die biquadratische Gleichung an!

AG | 1.2|

$2x - 6x^4 = 1$	☐	$(x - 1)^4 + 3x^2 - 1 = 0$	☐
$x^4 - (2 - x)^2 = 0$	☐	$-x^2 + 3x^4 + 4x = 0$	☐
$(x + 1)^2 - 8x^4 = 0$	☐	$(x - 1)^2 + 7x^4 + 2x = 0$	☐

M 1.19 Ergänze die Textlücken durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine mathematisch korrekte Aussage entsteht!

AG | 1.2|2.3|

Die Gleichung $-x^2 \cdot (1 - x) \cdot (1 + x) - 3x^2 + 1 = 0$ ist 1 und hat 2.

1	
rein quadratisch	☐
biquadratisch	☐
gemischt quadratisch	☐

2	
den Grad 2	☐
den Grad 3	☐
den Grad 4	☐

1.20 Löse die Gleichung in $\mathbb{R}$ durch Substitution!

AG | 1.2|2.3|

a) $2x^4 - 4x^2 - 2 = 0$

b) $5 + 15x^2 - 4x^4 = 0$

c) $4x^4 - 5x^2 - 9 = 0$

d) $(x + 2)^4 - 3 \cdot (x + 2)^2 - 2 = 0$

e) $(1 - x)^4 - 7 \cdot (1 - x)^2 = 0$

f) $(x^2 - 4)^4 + (x^2 - 4)^2 - 7 = 0$

1.1.6 Abspalten von Linearfaktoren und Polynomdivision

1.21 Schreibe den quadratischen Term der Gleichung $x^2 - 5x + 4 = 0$ als ein Produkt von Linearfaktoren! AG | 1.2 |

Mithilfe des **Satzes von Vieta** kann die quadratische Gleichung der Form $ax^2 + bx + c = 0$ mit den Lösungen x_1 und x_2 als Produkt von Linearfaktoren geschrieben werden:

$$a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0.$$

Wir bestimmen also zuerst die Lösungen $x_1 = 4$ und $x_2 = 1$ und erhalten so die Gleichung $(x - 4) \cdot (x - 1) = 0$.

1.22 Löse die Gleichung 3. Grads $(x - 7) \cdot (x + 2) \cdot (x + 1) = 0$ in $\mathbb{R}$! AG | 1.2 |

Wir erhalten alle Lösungen, indem wir jeden der Faktoren null setzen:

Es ist also die erste Lösung $x_1 = 7$, die zweite ist $x_2 = -2$ und für x_3 erhalten wir $x_3 = -1$.

Die Lösungsmenge der Ausgangsgleichung ist $L = \{-2, -1, 7\}$.

1.23 Löse die Gleichung $x^3 - 4x^2 - 19x - 14 = 0$ in $\mathbb{R}$! AG | 1.2 |

Meistens müssen wir die Gleichung erst in eine gewisse Form bringen, um die Möglichkeit zu haben, den Produkt-Null-Satz anzuwenden.

Wenn eine Lösung bekannt oder zumindest leicht zu erraten ist, dann kann man das Polynom durch den entsprechenden Linearfaktor dividieren und erhält eine quadratische Gleichung, die lösbar ist. Wir erraten die erste Lösung mit $x_1 = -1$. Der Linearfaktor ist $x + 1$.

Wir führen die Division des Polynoms durch $(x + 1)$ durch:

$$(x^3 - 4x^2 - 19x - 14) : (x + 1) = x^2 - 5x - 14$$

$$\begin{array}{r} -x^3 - x^2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -5x^2 - 19x \\ 5x^2 + 5x \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -14x - 14 \\ 14x + 14 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0 \end{array}$$

Wir erhalten das um einen Grad reduzierte Polynom $x^2 - 5x - 14$ und können die Ausgangsgleichung umschreiben zu $(x + 1) \cdot (x^2 - 5x - 14) = 0$.

Die erste Lösung kennen wir schon, $x_1 = -1$.

Um die übrigen Lösungen zu bestimmen, lösen wir die quadratische Gleichung:

$$x^2 - 5x - 14 = 0, x_{2,3} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4}}, x_2 = 7, x_3 = -2$$

Die Lösungsmenge der Polynomgleichung ist $L = \{-2; -1; 7\}$.

Kennen wir eine Lösung x_1 einer Polynomgleichung, so können wir die Gleichung durch $x - x_1$ dividieren und erhalten ein Polynom vom Grad $n - 1$. Wir sagen, der Linearfaktor $x - x_1$ wird abgespalten.

Bei einer Gleichung vom Grad 3 bleibt eine quadratische Gleichung übrig, die gelöst werden kann. Wir erhalten insgesamt 3 Lösungen.

Die Gleichung lässt sich als Produkt von Linearfaktoren schreiben:

$$(x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) = 0$$

Bei einer Gleichung 4. Grads kann man den Prozess bei der übriggebliebenen Gleichung vom Grad 3 wiederholen. Wir erhalten ein Polynom vom Grad 2 und somit insgesamt 4 Lösungen.

Die Gleichung mit Linearfaktoren lautet: $(x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) \cdot (x - x_4) = 0$

Es kann vorkommen, dass eine Lösung mehr als einmal auftritt. Wir sagen, dass eine **Mehrfachlösung** vorliegt bzw. die **Vielfachheit der Lösung** größer als 1 ist.

1.24 Zerlege den quadratischen Term der Gleichungen in ein Produkt von Linearfaktoren! AG | 1.2 |

- a) $-x^2 - 5x - 4 = 0$ b) $5x^2 - 4x - 1 = 0$
 c) $2x^2 + 0,5x - 0,75 = 0$ d) $12x^2 - \frac{14}{3}x - \frac{2}{3} = 0$

1.25 Erstelle eine quadratische Gleichung zur gegebenen Lösungsmenge! AG | 1.2 |

- a) $L = \{-1; 3\}$ b) $L = \{7; 11\}$
 c) $L = \{-2; 5\}$ d) $L = \{-5; -3\}$

M 1.26 Kreuze an, welche Gleichung die Lösungsmenge $L = \{-1; 2; 3\}$ hat! AG | 1.2 | 2.3 |

$(x - 1) \cdot (x + 2) \cdot (x + 3) = 0$	☐	$(x + 1) \cdot (x^2 - 5x + 6) = 0$	☐
$(x + 1) \cdot (x - 2) \cdot (x + 3) = 0$	☐	$(x^2 + x - 2) \cdot (x + 3) = 0$	☐
$(x^2 + 4x - 3) \cdot (x - 2) = 0$	☐	$x^3 - 4x^2 + 11x + 6 = 0$	☐

1.27 Löse die Gleichung mithilfe der Polynomdivision in $\mathbb{R}$! AG | 1.2 | 2.3 |

- a) $x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0$; $x_1 = 1$ b) $2x^3 - 3x^2 - 39x + 20 = 0$; $x_1 = 5$
 c) $-x^3 - 2x^2 + x + 2 = 0$; $x_1 = 1$ d) $x^3 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{16} = 0$; $x_1 = \frac{1}{2}$

1.28 Gib den Grad der Gleichung sowie die Lösungen mit ihrer Vielfachheit an! AG | 1.2 | 2.3 |

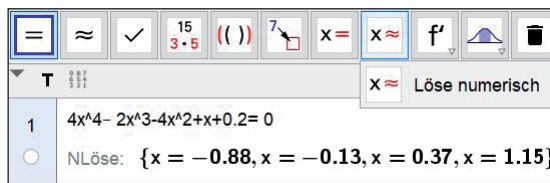
- a) $(x - 5)^2 \cdot (x + 6)^2 = 0$ b) $4 \cdot (2x - 1)^2 \cdot (x + 3) \cdot (x - 3) = 0$
 c) $-(x + 4) \cdot (-5x + 2)^3 = 0$ d) $8 \cdot (-x + 2)^3 \cdot (3x + 1)^0 \cdot (5x - 2) = 0$

1.1.7 Polynomgleichungen mithilfe von Technologie lösen

Polynomgleichungen höheren Grads mit beliebigen Hochzahlen und beliebigen Koeffizienten können immer mit Technologieeinsatz über den Gleichungslöser ermittelt werden. Im Folgenden zeigen wir den Rechengang mithilfe von Geogebra.

TE 1.29 Löse die Polynomgleichung $4x^4 - 2x^3 - 4x^2 + x + 0,2 = 0$ in $\mathbb{R}$! AG | 1.2 | 2.3 |

Öffne in Geogebra das CAS-Fenster!
 Gib in Zeile 1 die Gleichung ein und
 klicke auf „**Löse numerisch**“!



TE 1.30 Löse die Polynomgleichung in $\mathbb{R}$! Runde auf 2 Nachkommastellen! AG | 1.2 | 2.3 |

- a) $x^4 - 10x + 9 = 0$ b) $x^6 - 4x^4 + x^2 + 5x + 6 = 0$
 c) $x^3 - 5x^2 + 6x - 1 = 0$ d) $-x^3 - x^2 + x + 12 = 0$
 e) $-x^5 - 2x^2 + x + 2 = 0$ f) $x^5 - \frac{1}{4}x^2 - x = 0$

1.2 Polynomgleichungen und Polynomfunktionen

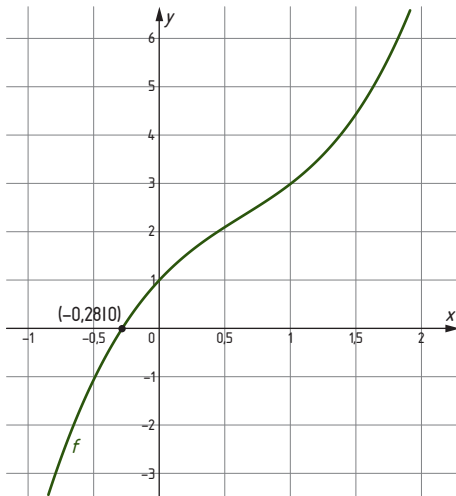
Eine Polynomgleichung kann als Vorschrift für eine Polynomfunktion herangezogen werden. Die reellen Lösungen der Polynomgleichung können dann als Nullstellen des Funktionsgraphen verstanden werden.

Sehr häufig löst man eine Polynomgleichung über das grafische Verfahren mithilfe von Technologieinsatz.

TE

- 1.31** Bestimme grafisch die Anzahl und die Werte der Lösungen der Polynomgleichung $x^3 - 2x^2 + 3x + 1 = 0$!

FA |4.3|4.4|



Die Lösungen von Polynomgleichungen entsprechen grafisch den Nullstellen der Polynomfunktion f mit $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 1$. Wir zeichnen den Graphen der Funktion f .

Der Graph weist nur eine Nullstelle auf, daher hat die Polynomgleichung nur eine reelle Lösung.

Wir lesen die Lösung ab oder bestimmen sie mit dem Geogebra-Befehl

„Nullstelle“ von f .

$$x \approx -0,28$$

Eine Polynomfunktion f vom Grad n kann höchstens n reelle Nullstellen haben. Daher hat eine Polynomgleichung vom Grad n auch höchstens n reelle Lösungen.

Ist der Grad n ungerade, so gibt es immer mindestens eine Nullstelle.

Es kann vorkommen, dass f eine (oder mehrere) mehrfache Nullstellen hat, das bedeutet dann, dass ein x -Wert mehrmals als Lösung der Gleichung $f(x) = 0$ vorkommt.

TE

- 1.32** Bestimme grafisch die Anzahl und die Werte der Lösungen der Polynomgleichung!

FA |4.3|4.4|

- a) $2x^3 - 4x^2 - 2x + 4 = 0$
 b) $x^3 - 3x - 2 = 0$
 c) $x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0$
 d) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$
 e) $3x^4 - 6x^3 - 9x^2 + 24x = 0$
 f) $x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4 = 0$

M TE

- 1.33** Ordne der Anzahl von Nullstellen jeweils die passende Funktion f aus A bis F zu!

FA |4.3|4.4|

1	
2	
3	
4	

A	$f(x) = x^2 + 5x$
B	$f(x) = x^3 - 5x^4 - 2$
C	$f(x) = x - 5x^3 - 2$
D	$f(x) = x^0 + 5x^4 + 2$
E	$f(x) = 5x^2 - 5x^3 - 0,5$
F	$f(x) = -5x^2 + 5x^4 + 0,5$

Polynomgleichungen sind Gleichungen der Form $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = 0$ mit $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Ihr Grad ist durch die höchste vorkommende Hochzahl n gegeben. Lösungen dieser Gleichung sind die Nullstellen der zugehörigen **Polynomfunktion** $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$.

Um diese Lösungen zu bestimmen, gibt es mehrere Möglichkeiten:

Polynomgleichungen 1. Grads sind lineare Gleichungen mit einer Lösung, die durch Äquivalenzumformungen berechnet wird.

Polynomgleichungen 2. Grads sind quadratische Gleichungen mit höchstens 2 Lösungen,

die mit der Lösungsformel berechnet werden: $x_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_2}$

Polynomgleichungen höheren Grads werden durch Herausheben, durch Substitution, durch Faktorisieren, durch die Horner'sche Regel oder durch Polynomdivision in eine Form gebracht, dass sie über die **quadratische Lösungsformel** oder durch den **Produkt-Null-Satz** gelöst werden können.

Ist das konstante Glied $a_0 = 0$, so können wir durch **Herausheben** eines Faktors die ursprüngliche Gleichung als ein Produkt von Faktoren niedrigeren Grads schreiben und mittels des Produkt-Null-Satzes lösen.

Ist $a_0 \neq 0$ und der Ausdruck von der Form $x^n - y^n$, so können wir ihn mithilfe der **Horner'schen Regel** in ein Produkt umschreiben und den Produkt-Null-Satz anwenden.

$$x^n - y^n = (x - y) \cdot (x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \dots + x^2y^{n-3} + xy^{n-2} + y^{n-1})$$

Haben wir es mit einer **biquadratischen Gleichung**, dh. mit einer Gleichung der Form $a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 = 0$ zu tun, so ersetzen wir x^2 durch y und erhalten so eine quadratische Gleichung in der Variablen y : $a_0 + a_2y + a_4y^2 = 0$. Diese können wir mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen lösen. Am Schluss müssen wir noch die Variable rücksostituieren, um die Werte für x zu erhalten.

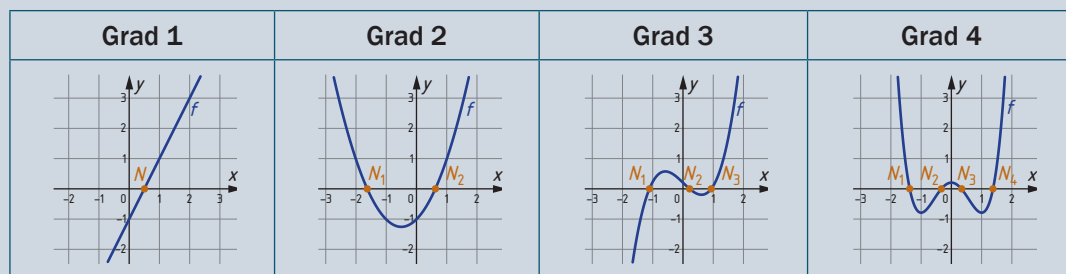
Manchmal können auch Binome (oder Polynome bis Grad 2) durch y substituiert werden.

Wir können Polynome auch als Produkte von **Linearfaktoren** schreiben und dann den Produkt-Null-Satz anwenden. Dazu müssen wir eine Lösung „erraten“ und dann mittels **Polynomdivision** den zugehörigen Linearfaktor abspalten. Das können wir so oft machen, bis alle vorkommenden Faktoren nur noch linear sind. Die Lösungen lassen sich dann direkt ablesen.

Da die Lösungen von Polynomgleichungen die **Nullstellen** der zugehörigen Polynomfunktion sind, erhalten wir für eine Gleichung vom Grad n höchstens n reelle Lösungen.

Ist der Grad ungerade, erhalten wir mindestens eine Lösung.

Mithilfe von Technologieeinsatz können die Lösungen aller Polynomgleichungen über den Gleichungslöser oder mithilfe der Funktionsgraphen ermittelt werden.



Vermischte Aufgaben zur Vorbereitung auf die Reifeprüfung

M TE 1.34
Typ 2

Die Bälle im Turnsaal sollen zu Pyramiden gestapelt werden.

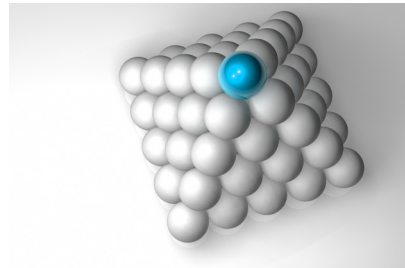
Für eine quadratische Pyramide aus n Schichten braucht man in Summe

$$\frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} \text{ Bälle.}$$

Der Durchmesser eines Balls beträgt 22 cm.

- Berechne, wie hoch eine Pyramide ist, die aus 30 Bällen besteht!
- Berechne, wie viele Bälle verwendet werden können, wenn die Pyramide höchstens 1,1 m hoch sein darf!

AG | 1.2 | 2.3 |



M TE 1.35
Typ 2

Das Volumen eines Swimmingpools beträgt 100 m^3 . Seine Breite ist um 2,5 m geringer als die Länge, und die Tiefe ist um 1,5 m geringer als die Breite.

- Erstelle eine Gleichung, mit der die Maße des Pools berechnet werden können! Berechne die Maße des Pools!
- Argumentiere, wie die Länge des Pools geändert werden muss, wenn sein Volumen gleich bleiben soll, die Tiefe jedoch um 1,2 m verringert und die Breite um 50 cm vergrößert wird!

AG | 1.2 | 2.3 |



M TE 1.36
Typ 2

Aus einem rechteckigen Karton mit einer Länge von 20 cm und einer Breite von 12 cm soll eine quaderförmige Schachtel geformt werden, indem man an den Ecken Quadrate ausschneidet und die übriggebliebenen Rechtecke hochbiegt. Das Volumen der Schachtel soll 252 cm^3 betragen.

Erstelle die Gleichung zur Berechnung der Seitenlänge der ausgeschnittenen Quadrate!

Berechne die Seitenlänge der Quadrate! (Ganzzahlige Lösung!)

AG | 1.2 | 2.3 |



TE 1.37

Für welchen Wert von k hat die Gleichung $x^4 - 2x^2 + k = 0$ die Lösung $x = -2$?

Bestimme in diesem Fall die übrigen Lösungen und ihre Vielfachheiten! AG | 1.2 | 2.3 |

TE 1.38

Gegeben ist die Gleichung $x^4 + kx^3 + 4x^2 = 0$.

Bestimme die Anzahl der Lösungen in Abhängigkeit von k !

AG | 1.2 | 2.3 |

M TE 1.39
Typ 2

Die Gesamtkosten K für die Herstellung der Menge x eines Produkts lassen sich durch die Gleichung $K = 1,4x^3 - 54x^2 + 1\,016x + 2\,559$ beschreiben.

$x \dots$ Menge in Mengeneinheiten (ME); $K \dots$ Kosten in Geldeinheiten (GE)

Beim Verkauf des Produkts wird ein Durchschnittspreis von 840 GE/ME verlangt.

Hinweis: Erlös = Preis mal der Verkaufsmenge; Gewinn = Erlös minus Kosten

Berechne die Gewinn Grenzen!

Erkläre die Bedeutung von negativen Werten für den Gewinn!

Berechne jene Mengen, die man verkaufen muss, damit ein Gewinn von genau 2 500 GE erzielt wird!

AG | 1.2 | 2.3 |

MTE 1.40 Typ 2

Nathan erbt € 20.000. Er möchte das Kapital so anlegen, dass es in 15 Jahren doppelt so hoch sein würde.

Hinweis: Zinssatz $i = \frac{\text{Prozentsatz}}{100}$

K_0 ... Anfangskapital; K_n ... Endkapital nach n Jahren,

n ... Verzinsungsdauer in Jahren,

Zinseszinsformel: $K_n = K_0 \cdot (1 + i)^n$

- Erkläre, um welche Art von Funktion es sich bei K_n handelt!
- Berechne, wie hoch die jährliche Verzinsung sein müsste!
Berechne das Guthaben nach 5 Jahren bei diesem Prozentsatz!
- Das tatsächliche Angebot der Bank würde das Kapital in 15 Jahren nur auf € 25.000 vermehren.
Berechne den von der Bank angebotenen Jahreszinssatz!

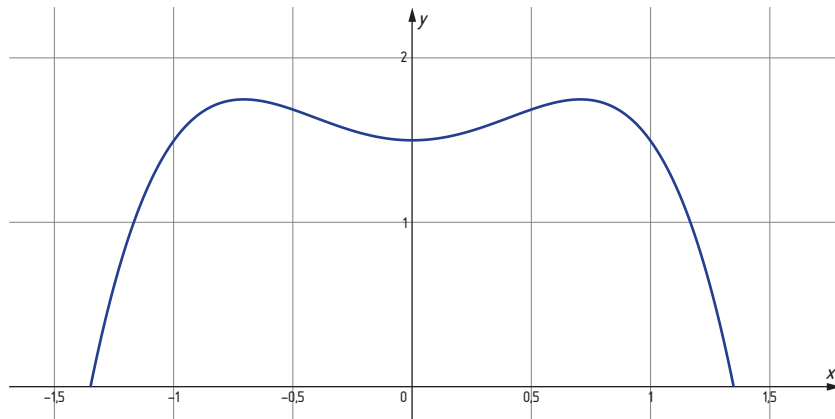
AG | 1.2|2.3|

MTE 1.41 Typ 2

Der Verlauf eines Bogens kann durch die folgende Polynomgleichung beschrieben werden:

$$y = -x^4 + x^2 + 1,5$$

x und y sind die Koordinaten in Meter (m).



Gib den Grad der Polynomfunktion an!

Berechne die Spannweite des Bogens (= Entfernung zwischen den Nullstellen)!

Erkläre, um welche besonderen Stellen es sich bei $x = \pm 0,707$ m handelt!

Berechne die Höhe des Bogens an diesen Stellen!

AG | 1.2|2.3| FA | 4.3|4.4|

MTE 1.42 Typ 2

Der Temperaturverlauf wurde an einer bestimmten Messstation von 6 Uhr ($t = 0$) bis 18 Uhr gemessen.

Aufgrund der Messungen lässt sich die Höhe der Temperatur T in Abhängigkeit von der Zeit t mit der folgenden Funktionsgleichung beschreiben:

$$T(t) = -0,002t^3 - 0,08t^2 + 1,1t + 2$$

t ... Zeit in Stunden

T ... Temperatur in Grad Celsius

Stelle den Temperaturverlauf grafisch dar!

Lies den Zeitpunkt ab, zu dem die Temperatur ein Maximum erreicht!

Berechne die Temperatur zu Beginn und am Ende der Messperiode!

Beschreibe die Monotonie der Funktion!

AG | 1.2|2.3| FA | 4.3|4.4|



Wissens-Check

Bearbeite die Aufgaben! **Begründe** jeweils deine Auswahl!

- 1 Ordne den Polynomgleichungen die passenden Lösungsmengen aus A bis F zu!

$(x + 3) \cdot (2x - 1) = 0$		A	$L = \{-4; -3\}$
$(2x + 6)^2 \cdot (-7x + 14) = 0$		B	$L = \{0, 25\}$
$(-x - 3)^2 \cdot (x + 4)^2 = 0$		C	$L = \{-1; 2; 4\}$
$(8x - 2)^3 \cdot (4x - 1) = 0$		D	$L = \{-3; 2\}$
		E	$L = \{-3; 0, 5\}$
		F	$L = \{4\}$

- 2 Kreuze die beiden Gleichungen an, die Mehrfachlösungen haben!

$x^2 - 8x + 16 = 0$	☐	$(14x + 7) \cdot (2x - 1) = 0$	☐
$x^2 - 6x + 3 = 0$	☐	$-2x^3 + 13x^2 - 3x - 18 = 0$	☐
$x^3 + 9x^2 + 13x + 16 = 0$	☐		

- 3 Kreuze die beiden Gleichungen an, die mittels Heraushebens gelöst werden können!

$5x^3 - 2x^2 + 5 = 0$	☐	$(x + 1) \cdot (x - 4) + (x + 1)^2 = 0$	☐
$-x^3 + 2x + 6 = 0$	☐	$x^4 + 2x^3 + 2x + 4 = 0$	☐
$x^4 + 2x^3 + x^2 = 0$	☐		

- 4 Kreuze die beiden biquadratischen Gleichungen an!

$x^4 - 5x = 0$	☐	$-x^4 + 3x^2 - 1 = 0$	☐
$5x^4 + 3x - 5 = 0$	☐	$x^2 - 8x^4 + 4x = 0$	☐
$x^2 + 7x^4 + 2 = 0$	☐		

- 5 Ordne den Gleichungen die Vielfachheiten ihrer Lösungen zu!

$(x - 2)^0 \cdot (x + 1)^3 = 0$		A	3 bzw. 1
$(3x + 5)^2 \cdot (x - 2)^2 = 0$		B	2 bzw. 2
$-(x + 2) \cdot (3x + 5)^2 = 0$		C	0 bzw. 4
$(x + 8)^2 \cdot (2x + 7) \cdot (3x + 24) = 0$		D	0 bzw. 3
		E	1 bzw. 2
		F	2 bzw. 1 bzw. 1

Gib die Lösungen an!

Lösung:
 1) E, D, A, B 2) 1. Zeile, 1. Spalte; 3. Zeile, 1. Spalte 3) 1. Zeile, 2. Spalte; 3. Zeile, 1. Spalte
 4) 1. Zeile, 2. Spalte; 3. Zeile, 1. Spalte 5) D, B, E, A $\{-1\}$, $\{-\frac{5}{3}, 2\}$, $\{-2, -\frac{3}{5}\}$, $\{-8, -\frac{2}{7}\}$

Die Differenzialrechnung wurde – unabhängig voneinander – von **Gottfried Wilhelm Leibniz** (1646 – 1716) und **Isaac Newton** (1643 – 1727) entwickelt.

Leibniz ging das Problem anders an als Newton. Während Newton das Problem physikalisch über den Begriff der Momentangeschwindigkeit behandelte, arbeitete Leibniz an dem Problem, Tangenten an Kurven zu legen. Beide benötigten in ihren Berechnungen Intervalle. Das Neue bestand darin, dass dabei sogenannte infinitesimale („unendlich kleine“) Intervalle einbezogen wurden.

Die Differenzialrechnung ist ein Teilgebiet der Analysis (oder auch Infinitesimalrechnung) und eines der wichtigsten Hilfsmittel bei mathematischen Berechnungen in den Naturwissenschaften und der Technik.



Gottfried Wilhelm
Leibniz



Isaac Newton

2.1 Differenzen- und Differenzialquotient

2.1.1 Differenzenquotient – mittlere Änderungsrate

2.1 Gegeben ist der Graph der Funktion f .



Lies die mittlere Änderungsrate der Funktion f im Intervall $[2; 4]$ aus der Grafik ab! Stelle den Zusammenhang mit dem Differenzenquotienten her!

AN |1.3|

Der Begriff „mittlere Änderungsrate“ ist dir bereits bekannt. Wir verstehen darunter den Quotienten der Änderung der Funktionswerte $f(b) - f(a)$ und der Änderung der Argumente $b - a$ im Intervall $[a; b]$, also $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Es handelt sich um den Quotienten aus zwei Differenzen, weshalb die mittlere Änderungsrate auch „Differenzenquotient“ genannt wird.

Für unser Beispiel bedeutet dies nun: $\frac{1 - 5}{4 - 2} = \frac{-4}{2} = -2$

Für die Funktion f , die im Intervall $[a; b]$ definiert ist, heißt die Zahl $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ **Differenzenquotient** oder **mittlere Änderungsrate** von f in $[a; b]$.

Tipp: Unterscheide die mittlere Änderungsrate von der absoluten Änderung $f(b) - f(a)$, der relativen Änderung $\frac{f(b) - f(a)}{f(a)}$ und dem Änderungsfaktor $\frac{f(b)}{f(a)}$.

- 2.2** Ein bestimmtes Produkt kostet zu Jahresbeginn 325 €, 6 Monate später bereits 350 €. Berechne **a)** die absolute Änderung, **b)** die relative Änderung, **c)** die mittlere Änderungsrate pro Monat und **d)** den Änderungsfaktor im angegebenen Zeitraum!

AN | 1.1 |

Lösung:

a) $350 - 325 = 25$

Das Produkt ist in 6 Monaten um 25 € teurer geworden.

b) $\frac{350 - 325}{325} \approx 0,08$

Der Preis des Produkts ist in 6 Monaten um ca. 8 % gestiegen.

c) $\frac{350 - 325}{6} \approx 4,17$

Pro Monat ist das Produkt im Mittel um 4,17 € teurer geworden.

d) $\frac{350}{325} \approx 1,08$

Wird der Preis des Produkts zu Jahresbeginn mit dem Faktor 1,08 multipliziert, so erhält man 350 €. Das entspricht dem Anfangspreis plus der 8%igen Verteuerung.

- 2.3** Die Anzahl der aufrechten Ehen in einer Großstadt wurde innerhalb von 8 Jahren erhoben. Die Zahlen sind in der folgenden Tabelle dargestellt:

1	2	3	4	5	6	7	8
37 545	36 426	38 592	36 140	37 458	44 502	44 890	44 981

Bestimme die mittlere Änderungsrate in den angegebenen Intervallen! Interpretiere das Ergebnis!

AN | 1.3 |

a) [1; 8]

b) [2; 6]

Lösung:

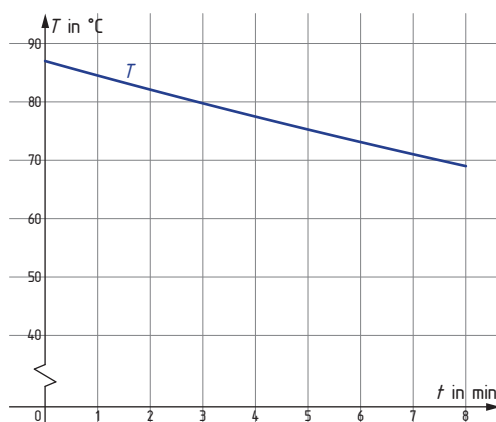
a) $\frac{f(8) - f(1)}{8 - 1} = \frac{44 981 - 37 545}{7} = \frac{7 436}{7} \approx 1 062,29$

Vom 1. bis zum 8. Jahr kamen im Mittel pro Jahr 1 062 Ehen dazu.

b) $\frac{f(6) - f(2)}{6 - 2} = \frac{44 502 - 36 426}{4} = \frac{8 076}{4} = 2 019$

Vom 2. bis zum 6. Jahr kamen im Mittel pro Jahr 2 019 Ehen dazu.

2.4



Beim Abkühlungsprozess eines Tees innerhalb der ersten 8 Minuten wurde jeweils die Temperatur nach der verstrichenen Minute gemessen und in der nebenstehenden Abbildung grafisch dargestellt.

Berechne den Differenzenquotienten der Funktion T im Intervall $[0; 8]$!

Interpretiere das Ergebnis! AN | 1.3 |

2 Grundlagen der Differenzialrechnung

TE 2.5

Bestimme den Differenzenquotienten zwischen den angegebenen Punkten:

- a) Gegeben ist eine reelle Funktion f mit $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$.
 $P(-1|f(-1))$ und $Q(2|f(2))$!
- b) Gegeben ist die Winkelfunktion f mit $f(x) = \cos(x)$ in den Punkten $A(1|f(1))$ und $B(5|f(5))$ (x in Radiant)!

AN | 1.3 |

M 2.6

Gegeben ist die Funktion $f(x) = 2x - 1$. Es werden unterschiedliche Änderungsmaße im Intervall $[3; 7]$ bestimmt.

Ordne den Änderungsmaßen jeweils den passenden Wert aus A bis F zu!

AN | 1.1 |

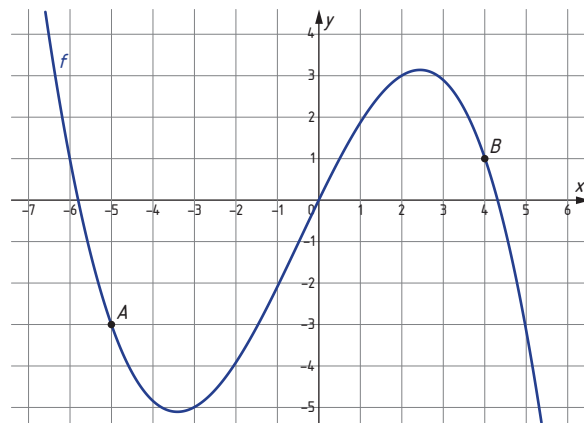
Absolute Änderung		A	-8
Relative Änderung		B	2
Mittlere Änderungsrate		C	2,6
Änderungsfaktor		D	8
		E	$\frac{8}{13}$
		F	1,6

M 2.7

Gegeben ist der Graph der Funktion f .

Kreuze die beiden zutreffenden Aussagen an!

AN | 1.1 |



Die relative Änderung im Intervall $[x_A; x_B]$ ist größer als die im selben Intervall betrachtete mittlere Änderungsrate.	☐
Die mittlere Änderungsrate der Funktion im Intervall $[x_A; x_B]$ beträgt $\frac{4}{9}$.	☐
Der Änderungsfaktor wird im Intervall $[x_A; x_B]$ durch den Quotienten $\frac{f(4)}{f(-5)}$ angegeben.	☐
Der Differenzenquotient ist im Intervall $[x_A - 1; x_B]$ negativ.	☐
Die absolute Änderung ist im Intervall $[x_A - 1; x_B]$ positiv.	☐

TE 2.8

Berechne den Differenzenquotienten der angegebenen Funktion jeweils im Intervall $[-3; 2]$!

a) $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$

b) $f(x) = \frac{x-4}{x+5}$

c) $f(x) = -\frac{1}{3}x^4 + x^2 + 6$

d) $f(x) = \ln(2x + 10)$

AN | 1.3 |

2.9

Die Einwohnerzahl der Stadt Bregenz wird durch die Funktion $E(t)$ mit t in Jahren beschrieben. Zu Beginn der Aufzeichnung hatte Bregenz 27 300 Einwohner, 9 Jahre später betrug die registrierte Einwohnerzahl 29 791.

Berechne den Ausdruck $\frac{E(9) - E(0)}{9}$ und interpretiere ihn im vorgegebenen Kontext!

AN | 1.3 |

2.10

Der Flächeninhalt A eines Kreises ist abhängig von seinem Radius r (in Meter). Berechne die mittlere Änderungsrate von A in den Intervallen $[0; 10]$ und $[50; 100]$! Deute die Ergebnisse!

AN | 1.3 |

2.1.2 Differenzenquotient und Sekantenanstieg

TE

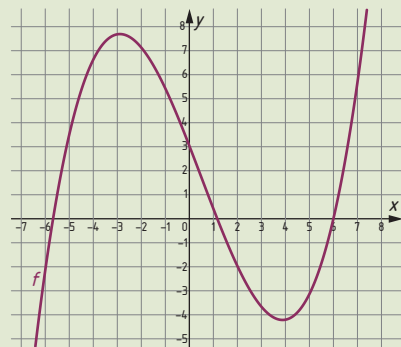
2.11 Gegeben ist der Graph der Funktion f .

a) Zeichne in das Koordinatensystem eine Gerade durch die Punkte $A(0|3)$ und $B(6|0)$ ein!

b) Ermittle den Differenzenquotienten im Intervall $[x_A; x_B]$!

c) Stelle die Funktionsgleichung der Sekante durch A und B auf!

AN | 1.3 |



a) In einem ersten Schritt legen wir eine Gerade durch die Punkte A und B und zeichnen das Steigungsdreieck ein.

b) Der Differenzenquotient im Intervall $[0; 6]$ entspricht zugleich der Steigung k der Geraden A und B :

$$k = \frac{f(x_B) - f(x_A)}{x_B - x_A} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0 - 3}{6 - 0} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2} = -0,5$$

Die Steigung k lässt sich auch direkt aus dem Koordinatensystem durch das Steigungsdreieck ablesen:

$$k = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2} = -0,5$$

(Tipp: 6 nach rechts = Nenner, -3 nach unten = Zähler)

c) Vervollständigen der Funktionsgleichung der Sekante:

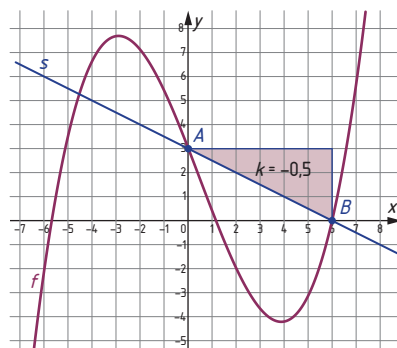
Variante 1: Ablesen aus dem Koordinatensystem: $d = 3$ (Tipp: $d = f(0)$)

Variante 2: Ermitteln durch: $y = kx + d$

Wir setzen den Punkt A und das bereits in **b)** bestimmte k in die Hauptform ein, formen nach d um und stellen im Anschluss die Geradengleichung auf:

$$3 = -0,5 \cdot 0 + d \Rightarrow d = 3$$

$$s: y = -0,5x + 3$$



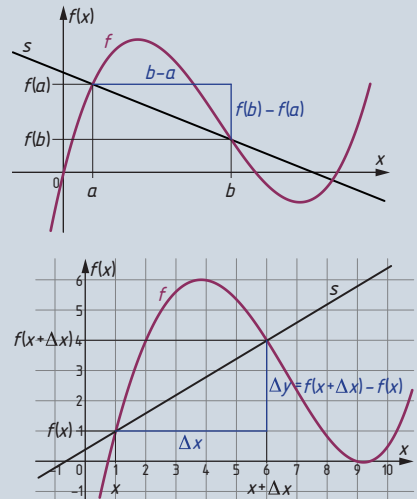
Der **Differenzenquotient** oder die **mittlere Änderungsrate** einer Funktion f in $[a; b]$ lässt sich auch als **Steigung k** der **Sekante** von f in $[a; b]$ interpretieren.

Man schreibt: $k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Die Steigung entspricht der mittleren Änderung der Funktionswerte von f , wenn das Argument **um 1 erhöht** wird.

Eine andere Schreibweise ergibt sich durch das Intervall $[x; x + \Delta x]$:

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{(x + \Delta x) - x}$$



2.12 Bestimme den Differenzenquotienten von f im Intervall $[-2; 3]$ und interpretiere diesen!

AN | 1.3 |

a) $f(x) = x^3 - 6x + 1$

b) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 4x^2 + 3$

Lösung:

a) $\frac{f(3) - f(-2)}{3 - (-2)} = \frac{(3^3 - 6 \cdot 3 + 1) - ((-2)^3 - 6 \cdot (-2) + 1)}{5} = \frac{10 - 5}{5} = 1$

Die Funktion wächst im Intervall $[-2; 3]$ im Mittel pro Einheit um 1.

b) $\frac{f(3) - f(-2)}{3 - (-2)} = \frac{\left(\frac{1}{2} \cdot 3^4 - 4 \cdot 3^2 + 3\right) - \left(\frac{1}{2} \cdot (-2)^4 - 4 \cdot (-2)^2 + 3\right)}{5} = \frac{\frac{15}{2} + 5}{5} = \frac{\frac{25}{2}}{5} = \frac{5}{2}$

Die Funktion wächst im Intervall $[-2; 3]$ im Mittel pro Einheit um $\frac{5}{2}$.



2.13 Bestimme den Differenzenquotienten von f im Intervall $[-3; 1]$ und interpretiere diesen!

a) $f(x) = 3x$

b) $f(x) = \frac{1}{4} \cdot (x - 3) \cdot (x + 2)$

c) $f(x) = (x - 1)^2 - 3$

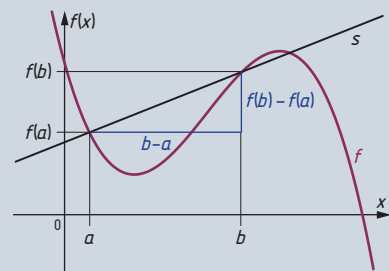
d) $f(x) = 5$

e) $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 4x + 2$

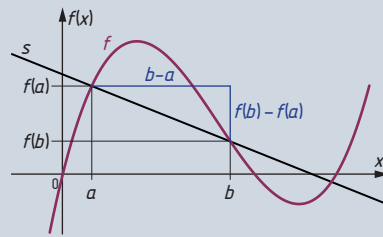
f) $f(x) = \sqrt{3x + 13}$

AN | 1.3 |

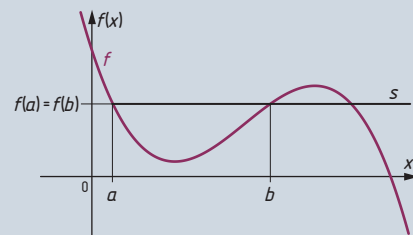
Der **Differenzenquotient** und damit die **Sekantensteigung** sind im Intervall $[a; b]$ **positiv**.



Der **Differenzenquotient** und die **Sekantensteigung** sind im Intervall $[a; b]$ **negativ**.



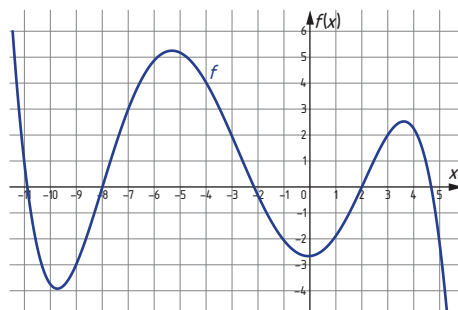
Der **Differenzenquotient** ist im Intervall $[a; b]$ **gleich null**.
Die **Sekante** ist **parallel** zur x-Achse.



M 2.14

Gegeben ist der Graph der Funktion f .
Kreuze die beiden zutreffenden Aussagen an!

AN | 1.3 |



Die mittlere Änderungsrate von f ist im Intervall $[-1; 4]$ negativ.	☐
Der Differenzenquotient von f beträgt in $[-3; 3]$ null.	☐
Die Steigung der Sekante beträgt im Intervall $[-8; -3]$ $\frac{2}{5}$.	☐
Die mittlere Änderungsrate der Funktionswerte ist im Intervall $[0; 2]$ kleiner als im Intervall $[-2; 0]$.	☐
Der Differenzenquotient von f ist im Intervall $[-11; -8]$ negativ.	☐

TE 2.15

- Gib die Funktionsgleichung einer linearen Funktion f an, deren mittlere Änderungsrate im Intervall $[1; 2]$ 3 beträgt und deren Nullstelle bei 1 ist!
- Gib die Gleichung einer linearen Funktion f durch den Punkt $(2|4)$ an, die im Intervall $[-3; 0]$ den Differenzenquotienten null hat!
- Gib die Gleichung einer quadratischen Funktion f mit $f(x) = ax^2 + bx + c$ durch den Punkt $(2|0)$ an, deren Differenzenquotient für $x > 0$ negativ ist und die den Scheitelpunkt $(0|4)$ hat!

AN | 1.3 |

TE 2.16

Der Differenzenquotient einer quadratischen Funktion f mit $f(x) = ax^2 + bx + c$ beträgt -2 im Intervall $[-1; 0]$ und 2 im Intervall $[0; 1]$.
Der Punkt $(1|3,5)$ ist ein Element von f .
Ermittle die Funktionsgleichung der Funktion f !
Gib die mittlere Änderungsrate im Intervall $[-1; 1]$ an!

AN | 1.3 |

TE 2.17

Skizziere in einem Koordinatensystem den Graphen jener Polynomfunktion f , die folgende Bedingungen erfüllt!

- (1) f hat den Grad 1.
(2) Der Differenzenquotient im Intervall $[-1; 3]$ ist 2.
(3) $(1|1) \in f$
- (1) f hat den Grad 2.
(2) Die Sekantengleichung im Intervall $[-1; 1]$ lautet $y = -3x + 2$.
(3) $f(x)$ ist ab $x > -1$ streng monoton fallend.
- (1) f hat den Grad 2.
(2) Die mittlere Änderungsrate im Intervall $[-1; 3]$ beträgt 2.
(3) 3 ist eine Nullstelle der Funktion.
(4) Das Minimum der Funktion liegt an der Stelle -1 .

AN |1.3|

2.1.3 Lokale bzw. momentane Änderungsrate

TE

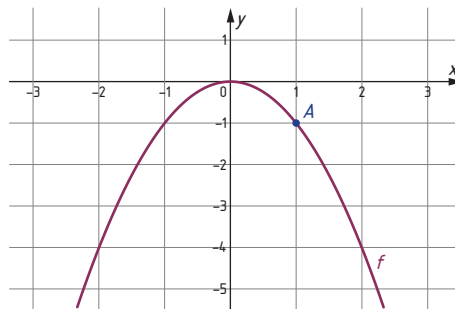
2.18 Die Funktion $f(x) = -x^2$ und der Punkt $A(1|-1)$ auf der Kurve sind gegeben.

- Zeichne die Kurve mithilfe von Technologieeinsatz und eine Sekante durch den Punkt $B(-2|-4)$! Lies die Steigung der Sekante ab!
- Verändere den x -Wert des Punkts B , so dass sich B dem Punkt A auf der Kurve immer mehr nähert! ($x_B = -1; 0; 0,5; 0,9; 0,99$ usw.)
Lies jeweils die Steigung ab!
- Stelle eine Vermutung über die Änderung der Steigung durch die Wahl immer kleinerer Intervalle $\Delta x = x_B - x_A$ auf!
- Gib die **lokale** Änderungsrate an der Stelle $x = 1$ an!

AN |1.2|

Bei diesem Beispiel wird Technologie eingesetzt, hier Geogebra.

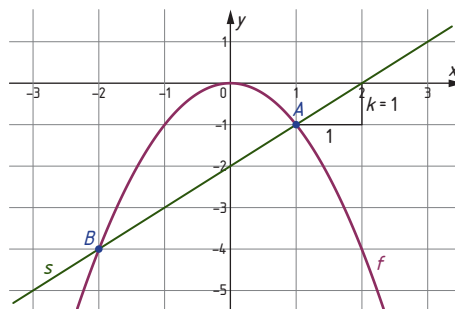
- Zuerst werden die Funktion f und der Punkt A in die Eingabezeile des Algebra-Fensters eingegeben. In der Grafik-Ansicht erhält man das Bild der Angabe.



Nun wird der Punkt B eingezeichnet. Mithilfe des Geradensymbols wird die Gerade AB gezeichnet.

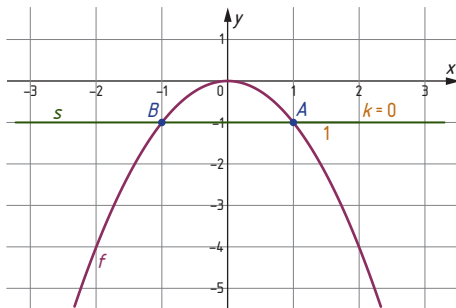
Über den Befehl $k = \text{Steigung}(\text{Gerade}(A, B))$ kann die Steigung unmittelbar in der Grafik abgelesen werden.

$k = 1$, die Steigung entspricht der mittleren Änderungsrate bzw. dem Differenzenquotienten im Intervall $[-2; 1]$.

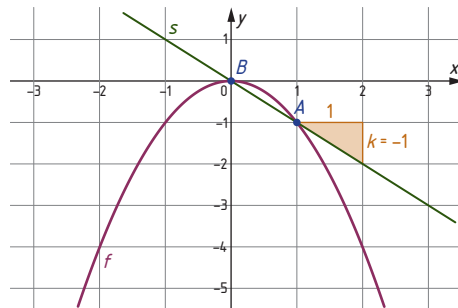


- b) Im Folgenden kann man mit dem Greifwerkzeug den Punkt B auf der Kurve verschieben und an den angegebenen Stellen jeweils k ablesen:

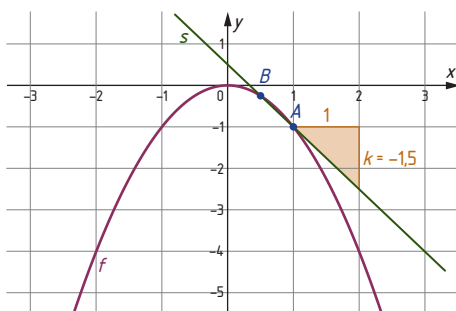
$$x_B = -1$$



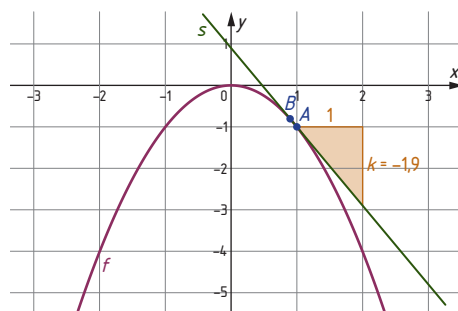
$$x_B = 0$$



$$x_B = 0,5$$



$$x_B = 0,9$$



Für $x_B = 0,99$ berechnen wir den Differenzenquotienten im Intervall $[0,99; 1]$:

$$k = \frac{-1^2 - (-0,99)^2}{1 - 0,99} = -1,99$$

- c) Die Annäherung an $x_A = 1$ kann man weiter fortsetzen, zB mit $x_B = 0,999$ usw. Man erkennt, dass sich der Funktionswert dadurch immer mehr der Zahl $k = -2$ nähert.
- d) Die **lokale Änderungsrate** an der Stelle $x = -1$ kann durch die Steigung der Sekanten mit immer kleiner werdenden Abständen der beiden Punkte A und B ermittelt werden. Dh, der Grenzwert des Differenzenquotienten für $\Delta x \rightarrow 0$ wird gebildet.

Man nennt die lokale Änderungsrate auch den **Differenzialquotienten**:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = -2$$

Zur Abschätzung genügt es auch, wenn man keine schrittweise Näherung durchführt, sondern gleich mit einem besonders kleinen Δx rechnet, zB $\Delta x = 10^{-5}$.

Wir setzen diesen Wert in den Differenzenquotienten ein und erhalten

$$\frac{f(1,00001) - f(1)}{0,00001} = -2,00001 \approx -2.$$

Für die Funktion f , die im Intervall $[x; x + \Delta x]$ definiert ist, heißt der **Grenzwert des Differenzenquotienten** $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ **Differenzialquotient** oder **lokale Änderungsrate** von f in $[x; x + \Delta x]$.

Die so genannte **momentane Änderungsrate** entspricht dem Differenzialquotienten einer zeitabhängigen Funktion: $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$.

2.19 Ein Wassertank verliert Wasser. Der Inhalt V in Liter des Tanks nach t Sekunden ist durch $V(t) = 1\,600 - t^2$ gegeben. Berechne die momentane Änderungsrate der Funktion V zum Zeitpunkt $t = 20$ s näherungsweise mithilfe des Differenzenquotienten durch die Wahl von immer kleiner werdenden Intervallen! AN | 1.2 |

Wir wählen zu Beginn das Intervall $[20; 30]$ und bestimmen die mittlere Änderungsrate durch $\frac{f(30) - f(20)}{30 - 20} = \frac{700 - 1\,200}{10} = -50$ l/s.

Das Volumen nimmt im Mittel um 50 Liter pro Sekunde ab.

Wir wählen nun immer engere Intervalle rund um 20 s, um uns der momentanen Änderungsrate bei $t = 20$ Sekunden anzunähern:

$$[20; 25]: \frac{f(25) - f(20)}{25 - 20} = \frac{975 - 1\,200}{5} = -45$$

$$[20; 22]: \frac{f(22) - f(20)}{22 - 20} = \frac{1\,116 - 1\,200}{2} = -42$$

$$[20; 20,5]: \frac{f(20,5) - f(20)}{20,5 - 20} = \frac{1\,179,75 - 1\,200}{0,5} = -40,5$$

$$[20; 20,1]: \frac{f(20,1) - f(20)}{20,1 - 20} = \frac{1\,195,99 - 1\,200}{0,1} = -40,1$$

$$[20; 20,01]: \frac{f(20,01) - f(20)}{20,01 - 20} = \frac{1\,195,999 - 1\,200}{0,01} = -40,01$$

Statt dieser schrittweisen Näherung können wir auch gleich $\Delta t = 10^{-5}$ s wählen:

$$\frac{1\,199,9996 - 1\,200}{0,00001} = -40,00001$$

Nun lässt sich vermuten, dass sich die Volumsabnahmegeschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 20$ s bei -40 l/s einpendelt.

2.20 Gegeben ist die Funktion $f(x) = (x - 3)^2$. Bestimme näherungsweise durch die Wahl geeigneter Intervalle den Differenzialquotienten an der Stelle $x = 2$! AN | 1.2 |

Lösung:

$$\text{Intervall } [1; 3]: \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{(3 - 3)^2 - (1 - 3)^2}{2} = \frac{0 - (-2)^2}{2} = -2$$

$$\text{Intervall } [2; 3]: \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = \frac{(3 - 3)^2 - (2 - 3)^2}{1} = \frac{0 - (-1)^2}{1} = -1$$

$$\text{Intervall } [2; 2,5]: \frac{f(2,5) - f(2)}{2,5 - 2} = \frac{(2,5 - 3)^2 - (2 - 3)^2}{0,5} = \frac{(-0,5)^2 - (-1)^2}{0,5} = -1,5$$

$$\text{Intervall } [2; 2,1]: \frac{f(2,1) - f(2)}{2,1 - 2} = \frac{(2,1 - 3)^2 - (2 - 3)^2}{0,1} = \frac{(-0,9)^2 - (-1)^2}{0,1} = -1,9$$

$$\text{Intervall } [2; 2,001]: \frac{f(2,001) - f(2)}{2,001 - 2} = \frac{(2,001 - 3)^2 - (2 - 3)^2}{0,001} = \frac{(-0,999)^2 - (-1)^2}{0,001} = -1,999$$

Die lokale Änderungsrate oder der Differenzialquotient an der Stelle $x = 2$ beträgt ungefähr -2 .

$$\text{Oder mit } \Delta x = 10^{-5} \text{ erhält man: } \frac{(2,00001 - 3)^2 - (2 - 3)^2}{0,00001} = -1,99999 \approx -2$$

2.21 Gegeben ist die Funktion f . Bestimme näherungsweise durch die Wahl geeigneter Intervalle den Differenzialquotienten an der Stelle x ! AN | 1.2 |

a) $f(x) = (x + 1)^2, x = 2$

b) $f(x) = 4x + 2, x = 1$

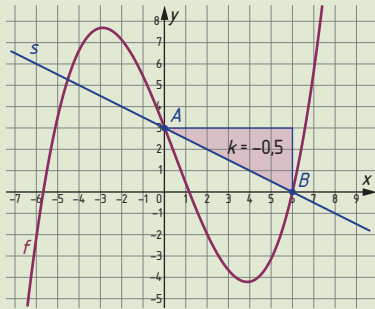
c) $f(x) = \frac{1}{3}x^2, x = -3$

d) $f(x) = x^2 - 3x + 2, x = -1,5$

2.1.4 Differenzialquotient und Tangentensteigung

TE

2.22



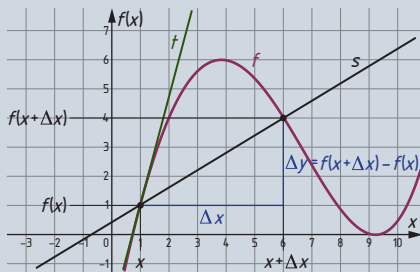
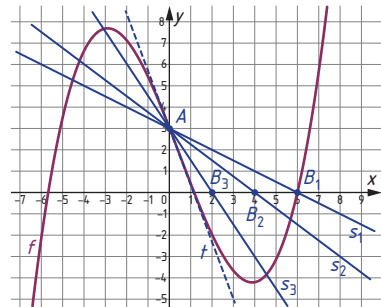
Gegeben ist der Graph der Funktion f und die Sekante durch die Punkte A und B mit der Steigung $k = -0,5$.

Beschreibe eine Vorgehensweise, die Steigung einer Geraden an die Funktion f zu ermitteln, die nur noch durch den Punkt A verläuft!

AN | 1.2 |

Um die Steigung einer Geraden an einer Stelle zu bestimmen, werden wir die Sekante, die durch zwei Punkte bestimmt ist, zu einer Tangente werden lassen, die die Funktion nur noch in einem Punkt berührt. Dafür ist es zielführend, den x -Wert des Punkts B immer näher zum x -Wert des Punkts A wandern zu lassen. Dadurch werden mehrere Sekanten bestimmt, bis schließlich die Sekante in eine Tangente übergeht.

Die grafische Darstellung verdeutlicht, dass die Sekanten immer steiler werden. Die Differenz der x -Werte wandert gegen null. Mathematisch bedeutet dies, dass der Differenzialquotient als Grenzwert des Differenzenquotienten gedeutet werden kann und die Sekantensteigung gegen die Tangentensteigung strebt.

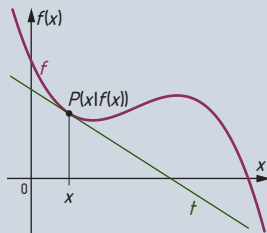


Der **Differenzialquotient** oder die **lokale Änderungsrate** einer Funktion f an der Stelle x lässt sich auch als **Steigung k der Tangente** an den Graphen von f an der Stelle x interpretieren.

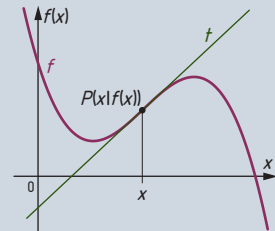
Man schreibt:

$$k = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

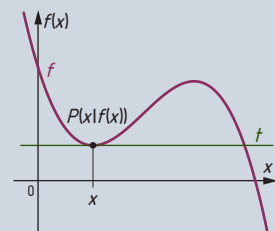
Ist die **Steigung k der Tangente** in einem Punkt $P(x | f(x))$ **positiv**, so gilt für den **Differenzialquotienten $f'(x) > 0$** .



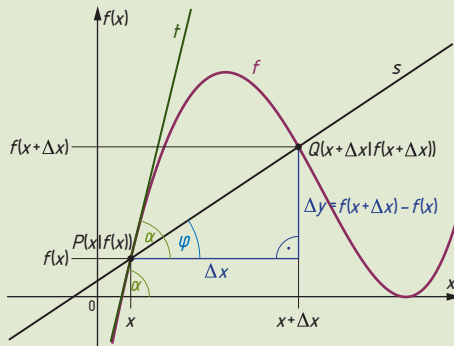
Ist die **Steigung k der Tangente** in einem Punkt $P(x | f(x))$ **negativ**, so gilt für den **Differenzialquotienten $f'(x) < 0$** .



Ist die **Steigung k der Tangente** in einem Punkt $P(x | f(x))$ **null**, so gilt für den **Differenzialquotienten $f'(x) = 0$** .



2.23



Betrachte die Abbildung und gib an, wie der Steigungswinkel φ der Sekante s und der Steigungswinkel α der Tangente t berechnet werden können!

AN | 1.2 |

Die Strecke $\overline{PQ}$ bildet mit den Strecken Δx und Δy ein rechtwinkeliges Dreieck, das wir bisher als Steigungsdreieck zur Berechnung der Sekantensteigung durch den Differenzenquotienten (mittlere Änderungsrate) $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ betrachtet haben.

Aus den Berechnungen im rechtwinkelligen Dreieck wissen wir, dass das Seitenverhältnis „Gegenkathete durch Ankathete“ als Tangens des zugehörigen Winkels angesehen werden kann.

In unserem Fall ist die dem Winkel φ gegenüberliegende Seite (Gegenkathete) Δy und die am Winkel φ anliegende Seite (Ankathete) Δx .

Es gilt: $\tan(\varphi) = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) \text{ oder andere Schreibweise: } \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$$

Der Winkel α ist jener Winkel, den die Funktion f mit der x -Achse einschließt. Da die Funktion f an der Stelle x von der Tangente berührt wird, kann der Winkel auch als Winkel zwischen der Tangente t und der Strecke Δx interpretiert werden.

Wir haben im vorangegangenen Abschnitt die Steigung der Tangente als Grenzwert der Sekantensteigung erkannt.

Daher gilt: $\tan(\alpha) = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Der **Differenzialquotient** wird neben der **Tangentensteigung** auch als Tangens des **Neigungswinkels** α der Tangente an den Graphen einer Funktion f an der Stelle x definiert:

$$k = \tan(\alpha) = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

TE

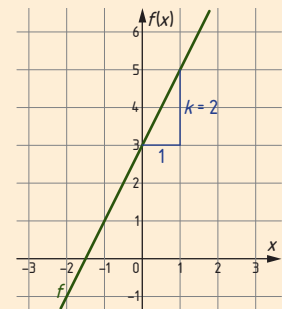
2.24 Gegeben ist die Funktion $f(x) = 2x + 3$ mit $x \in \mathbb{R}$. Beschreibe, wie man bei einer linearen Funktion den Differenzen- und den Differenzialquotienten interpretiert!

Lösung:

Der Graph der linearen Funktion ist eine Gerade. Daher hat der Begriff Tangente oder Sekante hier keinen Sinn.

Der Differenzenquotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ entspricht – wie hier im Intervall $[0; 1]$ gezeigt – der Steigung der Geraden. Egal, welches Intervall man wählt, k ist konstant, $k = 2$.

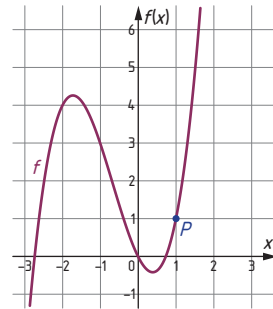
Bilden wir den Grenzwert $f'(x)$ zB an der Stelle $x = 0$, dann ergibt dies ebenfalls 2. Man kann jede beliebige Stelle einsetzen, $f'(x) = k = 2$.



Bei einer linearen Funktion entsprechen sowohl der Differenzenquotient als auch der Differenzialquotient der Steigung der Geraden.

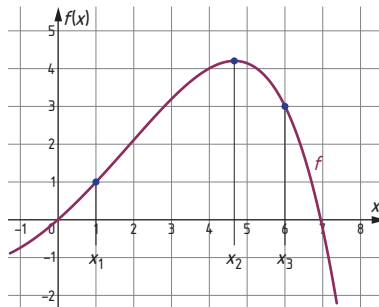
M 2.25 a) Gegeben ist der Graph der Funktion f .

Bestimme den Differenzialquotienten näherungsweise durch Einzeichnen der Tangente an die Funktion f im Punkt P !



AN |1.2|

b) Gegeben ist der Graph der Funktion f .

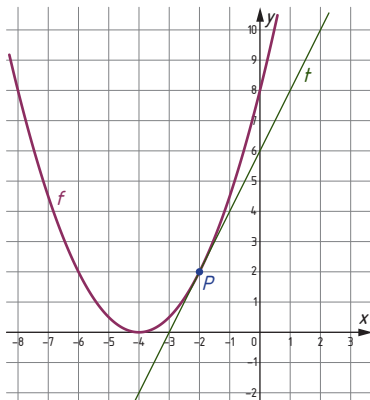


Kreuze die beiden zutreffenden Aussagen an!

AN |1.2|

Der Differenzialquotient von f an der Stelle x_3 beträgt ungefähr -2 .	☐
Die lokale Änderungsrate an der Stelle x_1 ist kleiner als der Differenzialquotient an der Stelle x_3 .	☐
Die Steigung der Tangente an der Stelle x_1 ist kleiner als die mittlere Änderungsrate von f im Intervall $[x_1; x_3]$.	☐
Die lokale Änderungsrate der Funktion f an der Stelle x_2 ist negativ.	☐
Der Differenzenquotient von f ist im Intervall $[x_1; x_2]$ größer als der Differenzenquotient von f im Intervall $[x_1; x_3]$.	☐

2.26



Gegeben ist der Graph der Funktion f . Die Tangente t an die Funktion im Punkt P ist eingezeichnet.

Lies $f'(-2)$ ab und gib die Gleichung der Tangente an!

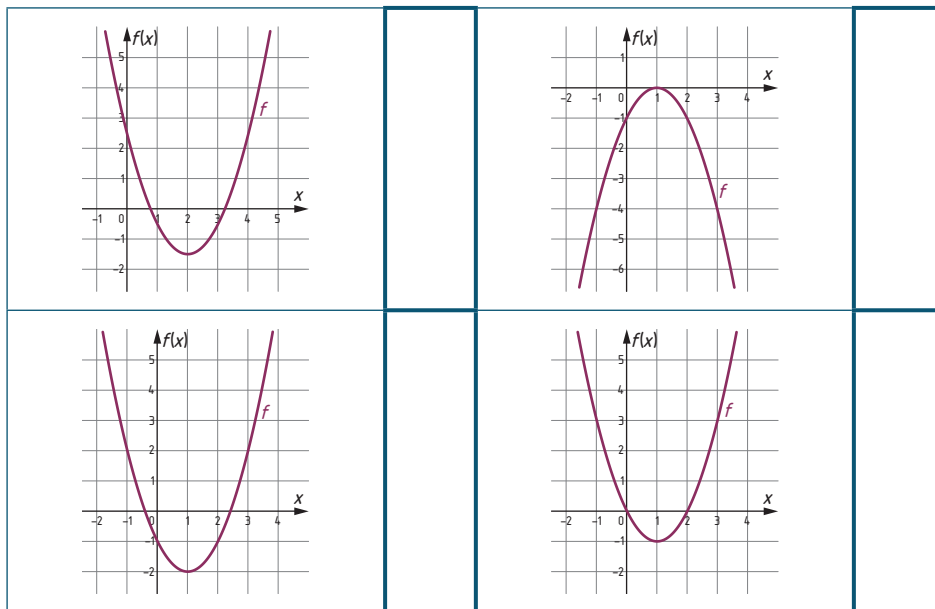
Berechne den Neigungswinkel α der Tangente!

AN |3.2|

2.27

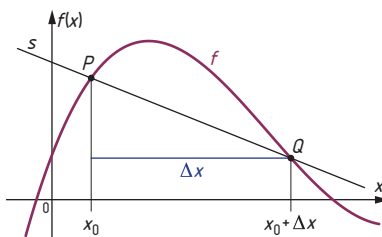
Ordne den Graphen jeweils die korrekte Beschreibung aus A bis F zu!

AN |3.2|



A	$f'(2) > 0$ und $f(2) < 0$	B	$f'(2) = 0$ und $f(2) = 0$
C	$f'(2) > 0$ und $f(2) = 0$	D	$f'(2) = 0$ und $f(2) < 0$
E	$f'(2) < 0$ und $f(2) < 0$	F	$f'(2) < 0$ und $f(2) > 0$

2.28

Gegeben sind die Graphen der Funktion f und der Sekante s zwischen den Punkten $P(x_0 | f(x_0))$ und $Q(x_0 + \Delta x | f(x_0 + \Delta x))$.

Ergänze die Textlücken durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine korrekte Aussage entsteht!

AN |1.2|

Der Ausdruck 1 beschreibt 2.

1	
$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$	☐
$\frac{f(x_0) - f(x_0 + \Delta x)}{\Delta x}$	☐
$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$	☐

2	
die mittlere Änderungsrate im Intervall $[x_0; x_0 + \Delta x]$	☐
die Tangentensteigung an der Stelle x_0	☐
den Differenzenquotienten von f an der Stelle $x_0 + \Delta x$	☐

2.2 Ableitungsfunktionen

Eine Funktion f' nennt man **Ableitungsfunktion von f** oder **Ableitung von f** , wenn man an jeder Stelle x der Funktion f die Tangentensteigung bestimmen kann. Die Ableitungsfunktion f' ordnet jedem x die Steigung im Punkt $(x | f(x))$ an den Graphen von f zu. Das Berechnen der Ableitungsfunktion nennt man **Differenzieren** oder **Ableiten**.

Bevor wir uns aber den Ableitungsregeln widmen, wenden wir uns zuerst dem grafischen Differenzieren zu, dh wir ermitteln die Ableitungsfunktion rein grafisch.

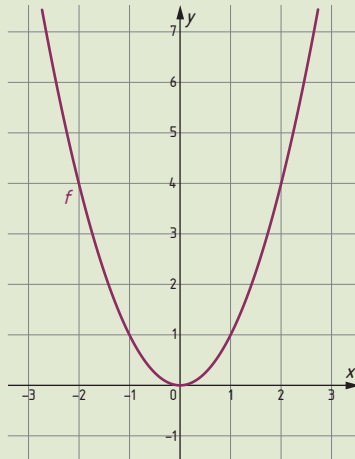
2.2.1 Grafisches Differenzieren

Der Einfachheit halber wird in diesem Kapitel die Funktion f stets rot gehalten und die Ableitungsfunktion f' wird grün eingezeichnet.

Wir beginnen mit der quadratischen Funktion $f(x) = x^2$, deren Graph eine Parabel ist.

TE

2.29 Gegeben ist der Graph der Funktion $f(x) = x^2$.



Stelle die Ableitungsfunktion f' grafisch dar!

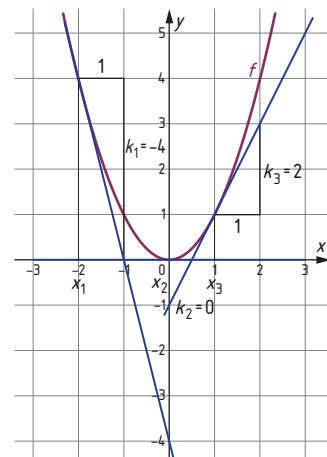
Verzichte zunächst auf den Technologieeinsatz und kontrolliere erst im Anschluss!

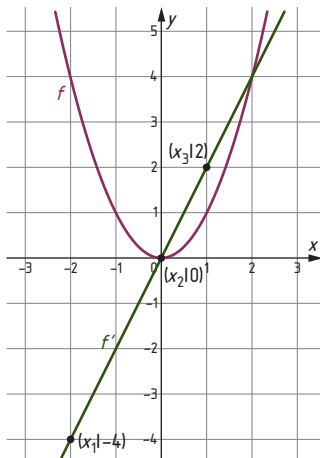
AN | 3.2 |

Der Differenzialquotient kann als Grenzwert des Differenzenquotienten und grafisch als Tangentenanstieg k gedeutet werden.

Wenn wir nun grafisch ableiten, bestimmen wir an jeder Stelle des Graphen den Anstieg der Tangente an die Funktion im entsprechenden x -Wert.

Exemplarisch zeichnen wir in der obigen Funktion an den Stellen $x_1 = -2$, $x_2 = 0$ und $x_3 = 1$ kurze Tangenten mit der jeweils ausgewiesenen Steigung k (Steigungsdreieck) ein.





Diese Tangentensteigungen werden nun als Funktionswerte (y-Werte) in das Koordinatensystem eingetragen und mit den Werten x_1 , x_2 und x_3 zu Punkten ergänzt, in unserem Fall $(x_1 | k(x_1))$, also $(-2 | -4)$, $(x_2 | k(x_2))$, also $(0 | 0)$, und $(x_3 | k(x_3))$, also $(1 | 2)$.

Diese Punkte werden nun miteinander zu einer Geraden mit der Gleichung $g: y = 2x$ verbunden.

Die Kontrolle mit Technologieeinsatz, zB mit Geogebra, ergibt, dass die Funktion $f(x) = x^2$ abgeleitet die Funktion $f'(x) = 2x$ ergibt.

Wir können folgende Schlüsse aus dem obigen Beispiel ziehen:

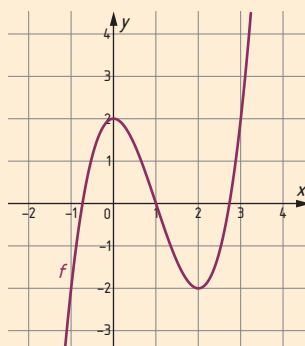
- Eine Funktion 2. Grads wird beim Ableiten zu einer Funktion 1. Grads (lineare Funktion).
- Im Scheitelpunkt (Extrempunkt) der quadratischen Funktion ist die Steigung null, da die Tangente auf der x-Achse liegt.
- Die Steigungen werden als y-Werte eingetragen und ergeben mit den entsprechenden x-Werten jene Punkte, die die Ableitungsfunktion grafisch bestimmen.
- Die quadratische Funktion $f(x) = x^2$ ist für alle $x < 0$ streng monoton fallend. Daher ist die Steigung im Intervall $(-\infty; 0)$ negativ. In der Ableitungsfunktion sind die Funktionswerte aus diesem Grund ebenso negativ, dh unterhalb der x-Achse. Für alle $x > 0$ ist die Funktion streng monoton steigend und die Steigung positiv. Die aus den Steigungen resultierenden y-Werte sind in der Ableitungsfunktion alle oberhalb der x-Achse, also positiv.

Merke: Beim **grafischen Differenzieren** bestimmt man an beliebig vielen Stellen der Funktion die entsprechende **Steigung**, indem man Tangenten an den Funktionsgraphen legt und näherungsweise die Steigung abliest.

Die Punkte für die Ableitungsfunktion erhält man, indem man die Argumente (x-Werte) unverändert lässt und die y-Werte durch die Werte der Steigung ersetzt, zB $(x_1 | k(x_1))$. Trage diese Punkte in das Koordinatensystem ein und verbinde sie zum Graphen.

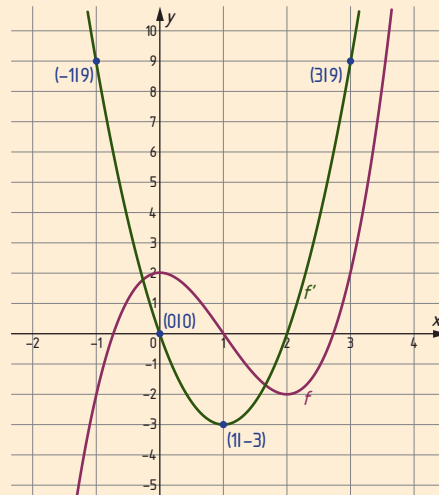
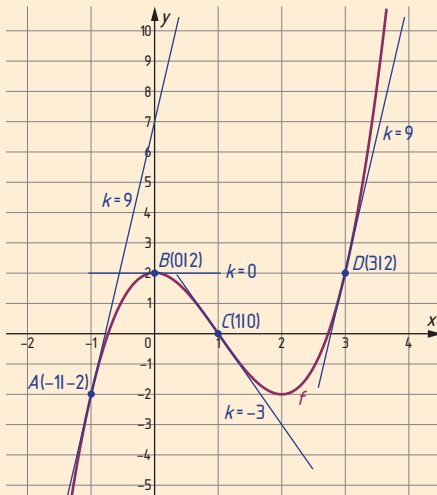
2.30 Zeichne den Graphen der Ableitungsfunktion in das gegebene Koordinatensystem ein!

AN | 3.2 |



Lösung:

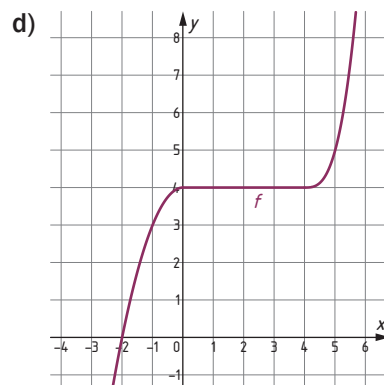
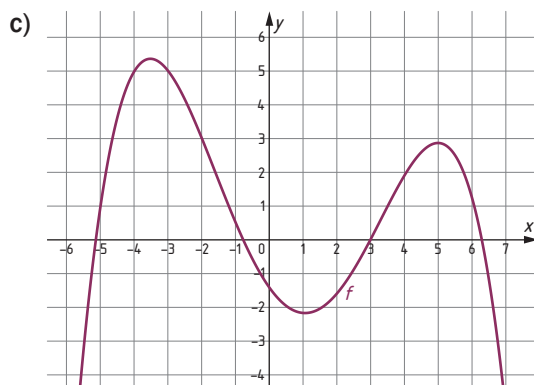
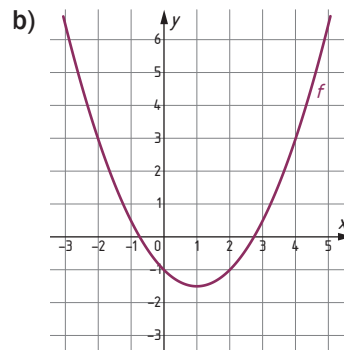
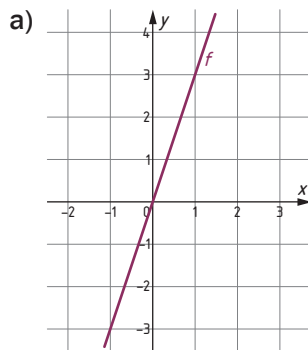
In den Argumenten (Stellen, x-Werte) der vier beliebig gewählten Punkten A, B, C und D wird jeweils die Steigung k bestimmt und in der Ableitungsfunktion als Funktionswert (y -Wert) eingetragen (linke Abbildung). Der Graph der Ableitungsfunktion ist in der rechten Abbildung grün eingezeichnet.



M 2.31

Skizziere in das Koordinatensystem den Graphen der Ableitungsfunktion!
Begründe deine Vorgehensweise!

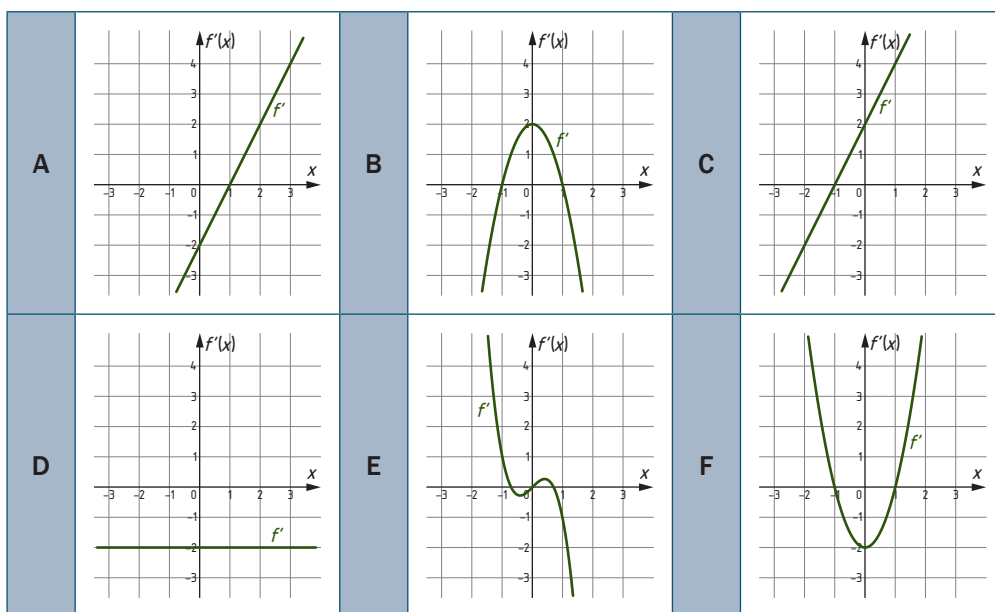
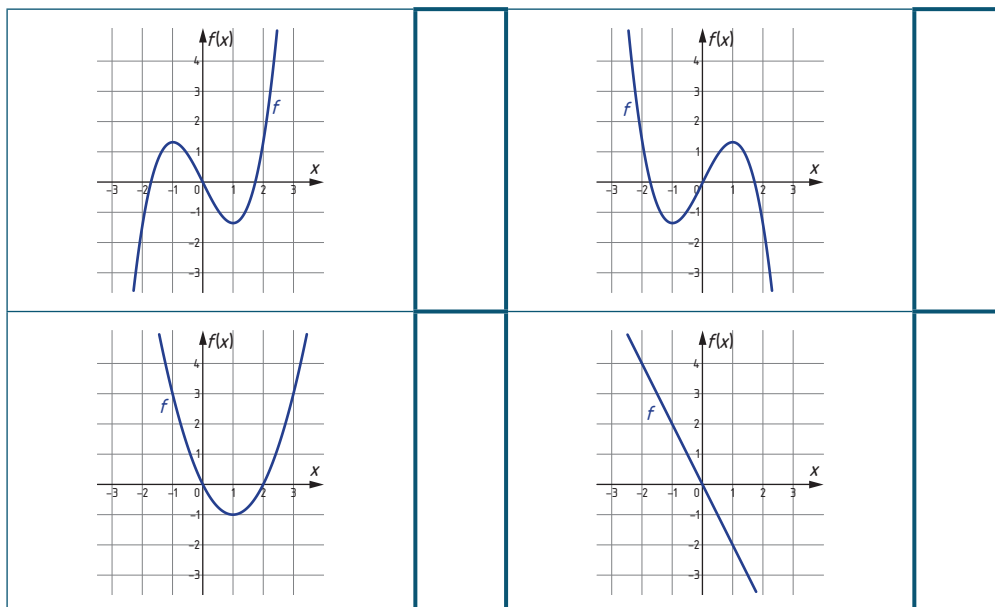
AN | 3.2 |



2.32

Ordne den Funktionsgraphen jeweils den passenden Graphen ihrer Ableitungsfunktionen aus A bis F zu!

AN |3.2|



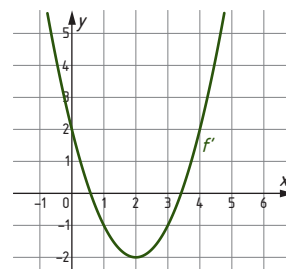
2.33

Gegeben ist der Graph der Ableitungsfunktion f' .

Skizziere näherungsweise den zugehörigen Graphen der Funktion f , der durch den Ursprung des Koordinatensystems verläuft!

Tipp: Bedenke, dass die Funktionswerte von f' an jeder Stelle den Tangentensteigungen der Funktion f entsprechen!

AN |3.2|



2.2.2 Ableitungsregeln für Potenz- und Polynomfunktionen

2.34 Bestimme mithilfe des Differenzialquotienten die Ableitung der Funktion

a) $f(x) = x^2$

b) $g(x) = x^3$

Formuliere anschließend eine Vermutung über eine mögliche Ableitungsregel!

AN | 1.2 | 2.1 |

$$\begin{aligned} \text{a) } f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } g'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2) = 3x^2 \end{aligned}$$

Wenn für $f(x) = x^2$ die erste Ableitung $f'(x) = 2x$ ergibt und $g(x) = x^3$ abgeleitet zu $g'(x) = 3x^2$ wird, dann kann man vermuten, dass der Exponent (Hochzahl) beim Ableiten als Koeffizient vor das x gestellt wird und die Hochzahl selber um 1 vermindert wird.

Potenzregel:

$$f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1} \text{ mit } n \in \mathbb{N}^*; \text{ andere Schreibweise: } (x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$

2.35 Leite mithilfe der Potenzregel ab!

AN | 2.1 |

a) $f(x) = x^4$

b) $f(x) = x^{10}$

c) $f(x) = x^{37}$

d) $f(x) = x^{100}$

2.36 Sonderfälle: Leite ab!

AN | 2.1 |

a) die identische Funktion $f(x) = x$

b) die Potenzfunktion mit negativem Exponenten $f(x) = x^{-n}$ mit $n \in \mathbb{N}^*$

c) die konstante Funktion $f(x) = k$ mit $k \in \mathbb{R}$

a) $f(x) = x = x^1 \Rightarrow f'(x) = 1 \cdot x^{(1-1)} = 1 \cdot x^0 = 1 \cdot 1 = 1$

b) $f(x) = x^{-n} \Rightarrow f'(x) = -n \cdot x^{(-n-1)}$

c) Die Funktion mit $f(x) = k$ hat als Schaubild eine waagrechte Gerade mit Steigung null. Daher ergibt die Ableitung jeder konstanten Funktion immer null. (Weil die Potenz $x^0 = 1$, also konstant ist, ergibt die Ableitung von x^0 auch null.)

Ableiten der identischen und einer konstanten Funktion:

$$f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1 \text{ und } f(x) = k \Rightarrow f'(x) = 0 \text{ mit } k \in \mathbb{R}$$

Ableiten einer Potenzfunktion mit negativem Exponenten:

$$f(x) = x^{-n} \Rightarrow f'(x) = -n \cdot x^{(-n-1)} \text{ mit } n \in \mathbb{N}^*$$

2.37 Zeichne jeweils die Funktion und leite ab!

Zeichne die zugehörige Ableitungsfunktion!

AN | 2.1 |

a) $f(x) = 3$

b) $f(x) = 0,2$

c) $f(x) = \frac{1}{2}$

d) $f(x) = -9,3$

e) $f(x) = x$

f) $f(x) = x^{-1}$

g) $f(x) = x^2$

h) $f(x) = x^{-2}$

i) $f(x) = x^{-3}$

j) $f(x) = x^5$

k) $f(x) = x^{-4}$

l) $f(x) = x^{19}$

- 2.38** Bestimme auf Grundlage der letzten beiden Ableitungsregeln die 1. Ableitung der Funktion $f(x) = x^2 + 1$! AN |2.1|

Die Funktion $f(x) = x^2 + 1$ ist eine zusammengesetzte Funktion.

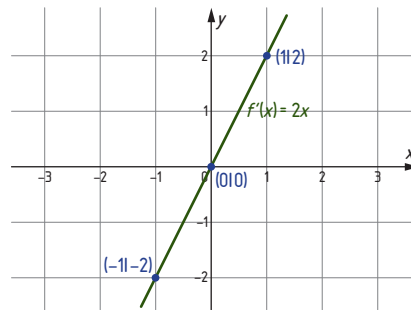
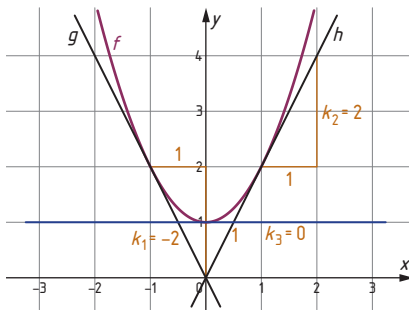
Wir setzen die bekannten Ableitungsregeln zunächst getrennt ein und überprüfen anschließend die Gültigkeit dieser Vorgehensweise durch grafisches Differenzieren.

x^2 mit der Potenzregel ableiten: $(x^2)' = 2x$.

1 mit der Regel für die Ableitung konstanter Funktionen ableiten: $(1)' = 0$.

Demnach wäre die Ableitung: $f'(x) = 2x + 0 = 2x$.

Überprüfung:



Summen-/Differenzregel: Die Ableitung einer Summe/Differenz ist gleich der Ableitungen der Summanden/des Minuenden und des Subtrahenden.

$$(f_1(x) \pm f_2(x))' = f_1'(x) \pm f_2'(x)$$

- 2.39** Leite mithilfe der Potenz- und der Differenzregel ab!

AN |2.1|

a) $f(x) = x^3 - x$

b) $f(x) = x^2 - 4$

c) $f(x) = x^{15} - x^{10}$

Lösung

a) $f'(x) = 3x^2 - 1$

b) $f'(x) = 2x$

c) $f'(x) = 15x^{14} - 10x^9$

- 2.40** Leite die folgenden Funktionen mithilfe der Potenz- und der Summen- bzw. der Differenzregel ab!

Ermittle den Wert der Ableitung an der Stelle $x_0 = 1$!

Interpretiere, was dieser Wert aussagt!

AN |2.1|

a) $f(x) = x^3 + x^2 - 1$

b) $f(x) = -x^5 + x$

c) $f(x) = x^5 + 100$

d) $f(x) = \pi + x^4$

e) $f(x) = x^7 - 1$

f) $f(x) = 1 - x^{10}$

g) $f(x) = -x + 0,25$

h) $f(x) = x + 4$

i) $f(x) = x^2 - \ln(5)$

Es stellt sich nun die Frage, wie du eine Funktion ableiten kannst, die einen Koeffizienten vorangestellt hat, zB $f(x) = 3 \cdot x^2$.

Wir helfen uns zuerst durch den Differenzialquotienten und werden dann anschließend eine allgemeine Regel formulieren.

2.41 Bestimme mithilfe des Differenzialquotienten die Ableitung der Funktion $f(x) = k \cdot x^2$ mit $k \in \mathbb{R}$!

AN | 1.2 | 2.1 |

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{k \cdot (x + \Delta x)^2 - k \cdot x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{k \cdot (x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2) - k \cdot x^2}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{kx^2 + 2kx\Delta x + k(\Delta x)^2 - kx^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{k \cdot \Delta x \cdot (2x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} k \cdot (2x + \Delta x) = k \cdot 2x \end{aligned}$$

k wandert als multiplikative Konstante mit und bleibt beim Ableiten erhalten. Sie wird i.A. **vor** die Ableitungsfunktion gestellt.

Regel vom konstanten Faktor: $(k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x)$ mit $k \in \mathbb{R}$

2.42 Leite mithilfe der Regel für den konstanten Faktor ab!

AN | 2.1 |

a) $f(x) = 2x$ b) $f(x) = 7x^4$ c) $f(x) = -3x^{11}$ d) $f(x) = 0,5x^{30}$

Lösung:

a) $f'(x) = 2 \cdot 1 \cdot x^0 = 2$ b) $f'(x) = 7 \cdot 4 \cdot x^3 = 28x^3$
 c) $f'(x) = -3 \cdot 11 \cdot x^{10} = -33x^{10}$ d) $f'(x) = 0,5 \cdot 30 \cdot x^{29} = 15x^{29}$

M 2.43

Kreuze jene beiden Aussagen an, bei denen richtig abgeleitet wurde!

AN | 2.1 |

$(3x^3 - 3x^2 - 3x - 3)' = 9x^2 - 6x - 3$	☐
$(3x^3 - 3x^2 - 3x)' = 9x^2 - 6x - 3x$	☐
$(3x^3 - 3x^2 - 3)' = 9x^2 - 6x$	☐
$(3x^3 - 3x^2 - 3x - 3)' = 9x^2 - 9$	☐
$(3x^3 - 3x^2 - 3x)' = 9x^2 - 9x$	☐

M 2.44

Ordne den Funktionen jeweils die richtige Ableitungsfunktion aus A bis F richtig zu!

AN | 2.1 |

$s(t) = \frac{1}{2}t^4 - 2t^2 - 4t$		A	$s'(t) = t^3 - 4$
$s(t) = \frac{1}{4}t^4 - 2t^2 - 4t$		B	$s'(t) = 4t^2 - 4$
$s(t) = \frac{1}{2}t^4 - 2t - 4$		C	$s'(t) = 2t^3 - 4t - 4$
$s(t) = \frac{1}{4}t^4 - 2 - 4t$		D	$s'(t) = 2t^3 - 2t - 4$
		E	$s'(t) = t^3 - 4t - 4$
		F	$s'(t) = 2t^3 - 2$

2.45 Leite mithilfe der Ableitungsregeln ab!

AN | 2.1 |

a) $f(x) = x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 2$ b) $f(x) = 13x^{11} + 1,2x^8 - 24x^3 - 0,9$
 c) $f(x) = -6x$ d) $f(x) = 3x - 7$
 e) $f(x) = 0,5x^7 + \frac{1}{8}x^6 - \frac{3}{5}x^5$ f) $f(x) = x - 5x^3 - \frac{1}{10}x^5$
 g) $f(x) = -0,3x^4 + \frac{1}{2}x^3 - x$ h) $f(x) = -1,5x^5 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{7}{8}$

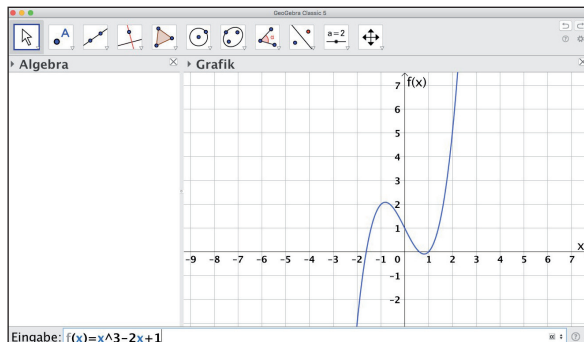
Auch mit Technologieeinsatz kann man ableiten. Wir besprechen hier das Ableiten mit Geogebra. Hierbei lässt sich prinzipiell zwischen zwei Möglichkeiten wählen:

Variante 1 im Grafik- und im Algebra-Fenster:

In die Eingabezeile des Algebra-Fensters wird der **Funktionsterm** eingegeben:

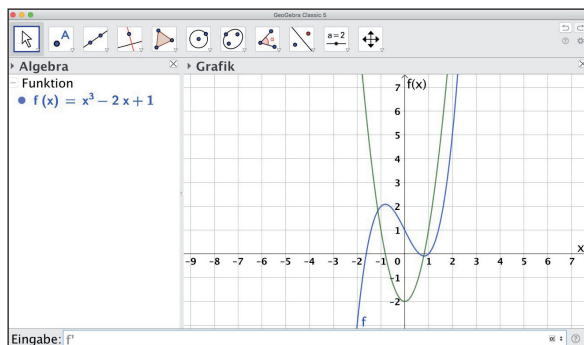
$$f(x) = x^3 - 2x + 1$$

Der Funktionsgraph wird im Grafik-Fenster dargestellt.

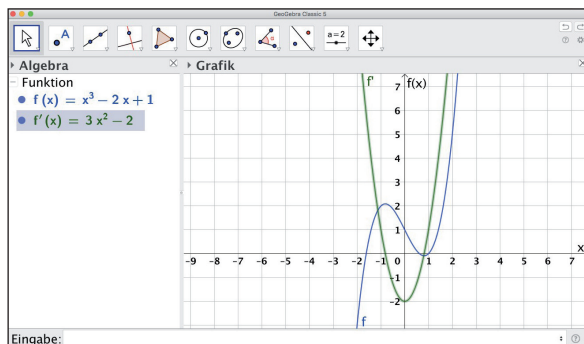


In die Eingabezeile gibt man den Befehl $f'(x)$ oder einfach nur f' ein.

Die Ableitungsfunktion wird im Grafik-Fenster gezeichnet.



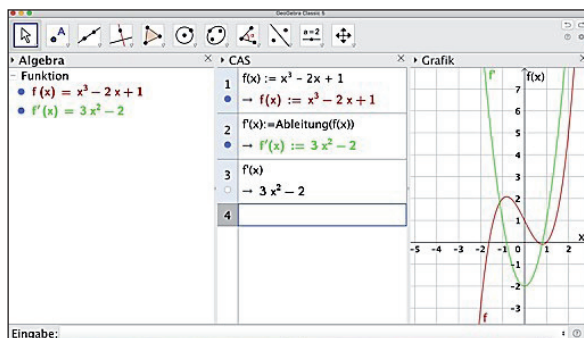
Im Algebra-Fenster wird die Funktionsgleichung angezeigt.



Variante 2 mit CAS:

Damit die Funktion auch gleichzeitig im Algebra- und Grafik-Fenster aufscheint, muss $f(x)$ mithilfe von $:=$ definiert werden. Die Ableitung erfolgt über den Befehl „**Ableitung**($f(x)$)“ oder durch die Eingabe von „ $f'(x)$ “.

Der Graph wird gezeichnet, wenn die Zeile in CAS am Rand links aktiviert ist.



TE

- 2.46** Leite $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 6$ ab, bestimme rechnerisch die Steigung der Tangente an der Stelle $x = 2$ (Kurzschreibweise $f'(2)$) und gib die Gleichung der Tangente an! Erkläre, wie die Tangente mit Technologieeinsatz bestimmt werden kann! AN | 2.1 |

Lösung:

$$f'(x) = \frac{1}{4} \cdot 2x = \frac{1}{2}x$$

$$f'(2) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

Für die Tangentengleichung $y = kx + d$ benötigt man noch den Punkt $P(2 | f(2))$:

$$f(2) = \frac{1}{4} \cdot 2^2 - 6 = -5 \Rightarrow A(2 | -5)$$

$$y = kx + d$$

$$-5 = 1 \cdot 2 + d \Rightarrow d = -7$$

$$t: y = x - 7$$

Technologieeinsatz,

zB Geogebra CAS:

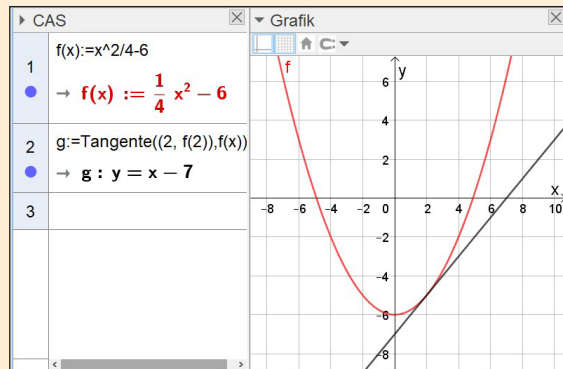
$f(x)$ definieren.

Zeile aktivieren, die Grafik wird angezeigt.

Den Befehl „Tangente

(Punkt, Objekt)“ verwenden und die Tangentengleichung ablesen.

Zeile aktivieren, die Tangente wird gezeichnet.



TE 2.47

- Leite ab, bestimme die Steigung der Tangente an der Stelle $x = 2$ (Kurzschreibweise $f'(2)$) und gib die Gleichung der Tangente an! AN | 2.1 |

a) $f(x) = -3x^2$

b) $f(x) = x^4 + x^3 - x^2 - x$

c) $f(x) = 4x - 8$

d) $f(x) = -0,3x^4 + 2,2x^2 - 0,7$

e) $f(x) = 2x^3 - \frac{1}{2}x^2$

f) $f(x) = x - 2x^2$

M TE 2.48

Gegeben sind Geradengleichungen, die zur Tangente t an den Funktionsgraphen von f mit $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ an der Stelle $x = -1$ parallel sind.

Kreuze jene zu t parallele Gerade an, die durch den Punkt $P(-2 | 18)$ geht! AN | 2.1 |

$y = -2x - 8$	☐	$y = -8x + 2$	☐	$y = -2x + 8$	☐
$y = 2x - 8$	☐	$y = 8x - 2$	☐	$y = -8x - 2$	☐

2.49

- Berechne die Ableitung der Funktion $f(x) = x^{-2}$ an der Stelle $x = 3$! Gib die Funktionsgleichung der Tangente t an dieser Stelle und den Neigungswinkel α an! AN | 2.1 |

2.50

- Berechne die Ableitung der Funktion f an der Stelle $x = x_0$! Gib die Gleichung der Tangente und den zugehörigen Neigungswinkel an! AN | 2.1 |

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2, x_0 = 2$

b) $f(x) = x^{-3} + 2, x_0 = -2$

c) $f(x) = 3x^{-2} - 1, x_0 = -1$

d) $f(x) = \frac{1}{3} \cdot (x^3 + 4x), x_0 = 3$

e) $f(x) = 0,6x^{-4}, x_0 = 1$

f) $f(x) = x^4 + 2x^2 + 4, x_0 = 2$

- 2.51** Ermittle jene Punkte des Graphen der Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 6x$, in denen die Tangentensteigung $k = -4$ beträgt!

AN | 2.1 |

Lösung:

Anhand einer Handskizze erkennt man, dass 2 Lösungen zu erwarten sind.

$$f'(x) = \frac{3}{2} \cdot x^2 - 6$$

$$-4 = \frac{3}{2} \cdot x^2 - 6 \quad | +6$$

$$2 = \frac{3}{2} \cdot x^2 \quad | \cdot \frac{2}{3}$$

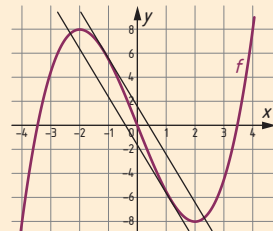
$$x^2 = \frac{4}{3} \quad | \sqrt{\quad}$$

$$x_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}, x_2 = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$f\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3 - 6 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{3\sqrt{3}} - \frac{12}{\sqrt{3}} = \frac{4}{3\sqrt{3}} - \frac{36}{3\sqrt{3}} = -\frac{32}{3\sqrt{3}}$$

$$f\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3 - 6 \cdot \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{8}{3\sqrt{3}}\right) + \frac{12}{\sqrt{3}} = -\frac{4}{3\sqrt{3}} + \frac{36}{3\sqrt{3}} = \frac{32}{3\sqrt{3}}$$

$$A\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \mid -\frac{32}{3\sqrt{3}}\right), B\left(-\frac{2}{\sqrt{3}} \mid \frac{32}{3\sqrt{3}}\right)$$



TE 2.52

- Ermittle jene Punkte des Graphen der Funktion, in denen die Steigung der Tangente $k = 4$ beträgt!

Gib die Gleichung der Tangente an!

AN | 2.1 |

- a) Polynomfunktion $f(x) = 2x^3 - x^2 + 1$ b) Potenzfunktion $f(x) = 0,5x^{-2}$

2.2.3 Differenzen- und Differenzialquotient als mittlere und momentane Geschwindigkeit

- 2.53** Beim freien Fall fällt ein Körper gemäß der Formel $s(t) = \frac{g}{2} \cdot t^2$ mit t in Sekunden und der Erdbeschleunigung $g \approx 10 \text{ m/s}^2$ zu Boden. Es gilt daher:

$$s(t) = 5t^2$$

- a) Berechne den jeweils zurückgelegten Weg für die Zeitpunkte $t = 0 \text{ s}$ bis $t = 5 \text{ s}$ und gib die Werte in einer Tabelle wieder!
- b) Bestimme rechnerisch die mittlere Geschwindigkeit $\bar{v}$ in m/s des fallenden Körpers im Zeitintervall $[0; 1]$, $[0; 5]$ und $[1; 3]$!
- c) Berechne die momentane Geschwindigkeit v in m/s des fallenden Körpers zu den Zeitpunkten $t_1 = 0,5 \text{ s}$, $t_2 = 1 \text{ s}$, $t_3 = 2 \text{ s}$ und $t_4 = 5 \text{ s}$!

AN | 1.2 | 1.3 | 2.1 |

- a) Man setzt die Werte für t der Reihe nach in die Funktion $s(t)$ ein und bestimmt die Funktionswerte (= Weglängen).

$$s(0) = 5 \cdot 0^2 = 0 \text{ m}, \quad s(1) = 5 \cdot 1^2 = 5 \text{ m}, \quad s(2) = 5 \cdot 2^2 = 20 \text{ m}$$

$$s(3) = 5 \cdot 3^2 = 45 \text{ m}, \quad s(4) = 5 \cdot 4^2 = 80 \text{ m}, \quad s(5) = 5 \cdot 5^2 = 125 \text{ m}$$

t in s	0	1	2	3	4	5
$s(t)$ in m	0	5	20	45	80	125

- b) Für die mittlere Geschwindigkeit $\bar{v}$ benötigt man den Differenzenquotienten

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} \text{ im Zeitintervall } [t; t + \Delta t]:$$

$$\text{Zeitintervall } [0; 1]: \bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(1) - s(0)}{1 - 0} = \frac{5 - 0}{1} = 5 \text{ m/s (Beachte die Einheit!)}$$

Die Geschwindigkeit beträgt in der ersten Sekunde im Mittel 5 m/s.

$$\text{Zeitintervall } [0; 5]: \bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(5) - s(0)}{5 - 0} = \frac{125 - 0}{5} = 25 \text{ m/s}$$

Die Geschwindigkeit beträgt in den ersten 5 Sekunden im Mittel 25 m/s.

$$\text{Zeitintervall } [1; 3]: \bar{v} = \frac{s(3) - s(1)}{3 - 1} = \frac{45 - 5}{2} = 20 \text{ m/s}$$

Die Geschwindigkeit beträgt zwischen der ersten und dritten Sekunde im Mittel 20 m/s.

- c) Für die momentane Geschwindigkeit wähle die Ableitung $v = s'(t) = 10t$

$$s'(0,5) = 5 \text{ m/s}, s'(1) = 10 \text{ m/s}, s'(2) = 20 \text{ m/s}, s'(5) = 50 \text{ m/s}$$

Der Körper hat zum Zeitpunkt $t = 0,5$ s eine Geschwindigkeit von 5 m/s, bei einer Sekunde eine Geschwindigkeit von 10 m/s, zum Zeitpunkt $t = 2$ s eine Geschwindigkeit von 20 m/s und bei 5 Sekunden eine Geschwindigkeit von 50 m/s.

Bei einer Weg-Zeit-Funktion wird der **Differenzenquotient** im Zeitintervall $[t; t + \Delta t]$ als **mittlere Geschwindigkeit** $\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$ im Intervall $[t; t + \Delta t]$ bezeichnet und die **Ableitung** $s'(t) = v$ als **Momentangeschwindigkeit** zum Zeitpunkt t .

- 2.54** Die Funktion s mit $s(t) = \frac{1}{4}t^2 + 3t$ beschreibt den von einem Radfahrer in t Sekunden zurückgelegten Weg in m.

Ermittle den Differenzenquotienten der Funktion s im Intervall $[0; 5]$!

Deute das Ergebnis!

Berechne die Ableitungsfunktion zum Zeitpunkt

$t = 5$ s!

Interpretiere das Ergebnis!

AN |1.3|2.1|

Lösung:

$$\frac{s(5) - s(0)}{5 - 0} = \frac{21,25 - 0}{5} = 4,25$$

Die mittlere Geschwindigkeit des Radfahrers in den ersten 5 s beträgt 4,25 m/s.

$$s'(t) = \frac{1}{2}t + 3$$

$$s'(5) = 5,5$$

Die momentane Geschwindigkeit 5 s nach dem Start beträgt 5,5 m/s.



TE 2.55

Für den freien Fall gilt, dass der von einem Körper zurückgelegte Weg s in m durch die Funktion s mit $s(t) = \frac{g}{2} \cdot t^2$ mit der Zeit t in Sekunden und der Erdbeschleunigung $g \approx 10 \text{ m/s}^2$ beschrieben wird.

- Ermittle, aus welcher Höhe ein Körper fallen muss, damit er nach $t = 5$ s auf dem Boden aufkommt!
- Berechne jeweils die mittlere Geschwindigkeit des fallenden Körpers in den Zeitintervallen $[0; 0,5]$, $[1; 4]$ und $[3; 4]$!
- Berechne jeweils die momentane Geschwindigkeit des fallenden Körpers zu den Zeitpunkten $t = 0,5$ s, $t = 3$ s und $t = 4$ s!

AN |1.3|2.1|

TE 2.56

Ein Ball wird mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 lotrecht nach oben geworfen. Der Weg, den er dabei zurücklegt, wird durch die Funktion s mit $s(t) = v_0 \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2$ beschrieben (t in Sekunden, $s(t)$ in Meter, Erdbeschleunigung $g \approx 10 \text{ m/s}^2$).

- Berechne die momentane Geschwindigkeit des Balls nach 3 Sekunden, wenn er mit einer Anfangsgeschwindigkeit von 20 m/s in die Luft geworfen wird! Interpretiere das Ergebnis in diesem Kontext!
- Bestimme jenen Zeitpunkt, an dem der Ball wieder auf dem Boden aufkommt!
- Berechne den Zeitpunkt, zu dem $s'(t) = 0$ gilt! Deute das Ergebnis in diesem Zusammenhang!

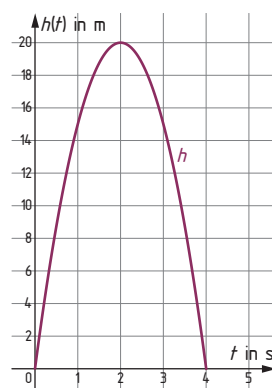
FA | 1.4 | 1.7 | AN | 1.3 | 2.1 |

M 2.57

Der Graph der Funktion $h(t)$ stellt den lotrechten Wurf eines Körpers dar. Kreuze die beiden zutreffenden Aussagen an!

FA | 1.5 | 1.7 | AN | 1.3 |

Der Graph von h entspricht der Flugbahn des Körpers.	☐
Bei $t = 2 \text{ s}$ ändert der Körper die Flugrichtung.	☐
Die mittlere Geschwindigkeit im Zeitintervall $[0; 2]$ entspricht jener im Zeitintervall $[2; 4]$.	☐
Der Körper wird mit der Anfangsgeschwindigkeit von 20 m/s lotrecht nach oben geworfen.	☐
Die momentane Geschwindigkeit hat bei $t = 2 \text{ s}$ den größten Wert.	☐

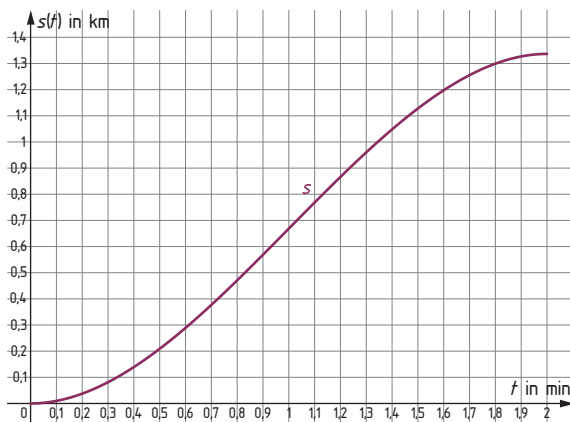


M 2.58

Gegeben ist der Graph $s(t)$, der die Bewegung eines E-Scooters innerhalb von 2 Minuten simuliert.

Kreuze die beiden zutreffenden Aussagen an!

FA | 1.5 | 1.7 | AN | 1.3 |



Die mittlere Geschwindigkeit beträgt im abgebildeten Zeitintervall ca. 11 km/h.	☐
Nach einer Sekunde hat der E-Scooter die geringste Geschwindigkeit.	☐
Die Geschwindigkeit des E-Scooters nimmt in der zweiten Fahrthälfte kontinuierlich ab.	☐
Die Geschwindigkeit ist nach 1 Minute Fahrzeit am größten.	☐
Die zurückgelegte Strecke beträgt mehr als 1,5 km.	☐

2.2.4 Höhere Ableitungen

2.59 Leite die Polynomfunktion $f(x) = 3x^4 + 2x^2 - 15x + 9$ so oft ab, bis die sich ergebende Funktion konstant ist!

AN |2.1|

$$f'(x) = 12x^3 + 4x - 15$$

$$f''(x) = 36x^2 + 4$$

$$f'''(x) = 72x$$

$$f^{IV}(x) = 72$$

Wir haben nun 4-mal hintereinander abgeleitet und uns dabei immer auf die vorige Ableitungsfunktion bezogen.

f' ist die Ableitungsfunktion der Funktion f ,

f'' die Ableitung der Funktion f' ,

f''' die Ableitung der Funktion f'' usw.

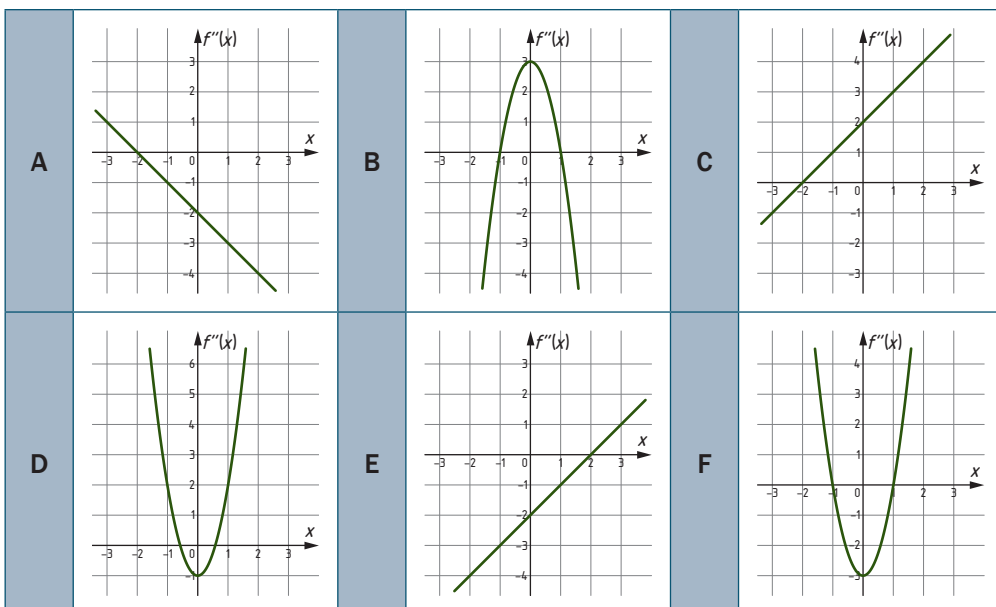
Die letzte (und damit 4.) Ableitung ist nun konstant, da kein x mehr in der Funktionsgleichung vorhanden ist.

Für eine **reelle** und **differenzierbare** Funktion f heißt die Funktion f' die erste Ableitungsfunktion von f , $f'' = (f')'$ die zweite Ableitung von f , $f''' = (f'')'$ die dritte Ableitung von f usw. Ab der zweiten Ableitung spricht man von **höheren Ableitungen** von f .

2.60 Ordne den Ableitungsfunktionen f' jeweils den Graphen der zweiten Ableitungsfunktion f'' aus A bis F zu!

AN |2.1|3.2|

$f'(x) = x^3 - 3x + 1$		$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot (x - 2)^2$	
$f'(x) = -x^3 + 3x - 1$		$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot (x + 2)^2$	



2.61

Berechne die ersten vier Ableitungen der Funktion $f(x)$!

AN | 2.1 |

a) $f(x) = 5x^3 - 7x^2 + 6x - 2$

b) $f(x) = \frac{1}{10}x^5 - 6,5x^3 + 8x + 1$

c) $f(x) = \frac{x^4}{12} + \frac{3x^3}{5} - \frac{5x^2}{4} - \frac{x}{8}$

d) $f(x) = 2x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 8x$

e) $f(x) = \frac{x^4}{9}$

f) $f(x) = \frac{x^4}{5} + \frac{2x^2}{9} - \frac{5}{2}$

g) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 4$

h) $f(x) = \frac{5x^4}{3} + \frac{12x^3}{5} - \frac{3x}{2} - \frac{1}{9}$

i) $f(x) = 2x^4 + \frac{4x}{3} - 6$

j) $f(x) = 4 \cdot \frac{x^4}{5} + \frac{2x^2}{3} - \frac{7x}{2} - \frac{1}{4}$

M

2.62

Gegeben ist die Funktion $f(x) = 2x^3 - 8x - 1$. Ordne richtig zu!

FA | 1.4 | AN | 2.1 |

$f'(0)$		$f''(-1)$		$f'(1)$		$f'''(0)$					
A	-2	B	-12	C	-8	D	8	E	12	F	2

$s(t)$ ist die **Weg-Zeit-Funktion**, sie beschreibt den bis zum Zeitpunkt t zurückgelegten Weg.
 $s'(t) = v(t)$ ist die **Geschwindigkeitsfunktion**, sie beschreibt den Wert der Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t .

$s''(t) = v'(t) = a(t)$ ist die **Beschleunigungsfunktion**, sie beschreibt den Wert der Beschleunigung zum Zeitpunkt t .

TE

2.63

Eine Kugel wird im Zuge eines Experiments vom 252 m hohen Donauturm in die Tiefe fallen gelassen. Der Weg, den sie dabei zurücklegt, wird durch die Weg-Zeit-Funktion s mit $s(t) = 252 - 5t^2$ beschrieben (Zeit t in Sekunden).

- Berechne den Zeitpunkt, an dem die Kugel (unter Vernachlässigung des Luftwiderstands) auf dem Boden aufkommt!
- Berechne die Geschwindigkeit $v(t)$ zum Zeitpunkt $t = 5$ s!
- Berechne die Beschleunigung $a(t)$!

FA | 1.5 | 1.7 | AN | 1.3 | 2.1 |

M

2.64

Eine Schnellbahn verlässt eine Station und benötigt 240 Sekunden zur nächsten Station. Der dabei zurückgelegte Weg wird durch die Funktion s mit $s(t)$ mit t in Sekunden beschrieben.
 Ordne richtig zu!

FA | 1.7 | AN | 1.3 |

zurückgelegter Weg nach 50 Sekunden	
mittlere Geschwindigkeit in den ersten 50 Sekunden	
Momentangeschwindigkeit in der 50. Sekunde	
Beschleunigung in der 50. Sekunde	

A	$s''(50)$
B	$\frac{v(50) - v(0)}{50}$
C	$\frac{s(50) - s(0)}{50}$
D	$s(240) - s(0)$
E	$s(50)$
F	$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(50 + \Delta t) - s(50)}{\Delta t}$

2.2.5 Funktionen und ihre Ableitungsfunktionen

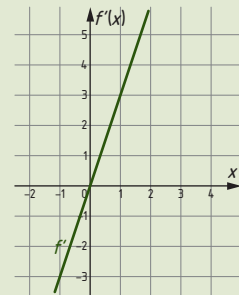
Zwischen den Funktionen und ihren Ableitungsfunktionen bestehen Zusammenhänge, die im Folgenden anhand von Graphen untersucht werden sollen.

M TE

2.65 Gegeben ist der Graph der ersten Ableitung der Funktion f .
Kreuze die beiden zutreffenden Aussagen an!

FA |1.4|1.5| AN |3.2|

Die Funktion f ist eine lineare Funktion.	☐
f'' ist eine lineare Funktion.	☐
$f'(1) = 3 \Rightarrow f''(1) = 3$	☐
Da die Funktion f' für jedes $x \in \mathbb{R}$ streng monoton steigend ist, gilt das auch für f .	☐
Die Funktion f ändert mindestens einmal ihre Monotonie.	☐



Die Funktionsgleichung von $f'(x)$ lautet $f'(x) = 3x$.

Die Funktion f muss einen Term mit x^2 enthalten, (genauer $1,5x^2$, weil dann die Ableitung $3x$ ist). Die 1. Aussage ist demnach falsch.

Wenn man f' nochmals ableitet, erhält man $f''(x) = 3$.

Grafisch bedeutet dies, dass eine zur x -Achse parallele Gerade vorliegt, die um 3 Einheiten auf der y -Achse nach oben verschoben ist. Diese Gerade ist der Graph einer konstanten Funktion. Die 2. Aussage ist daher falsch.

Wenn man $x = 1$ in f' einsetzt, ergibt dies 3, und f'' ist immer 3. Die 3. Aussage ist richtig.

Jede quadratische Funktion hat einen Scheitelpunkt (Extrempunkt), dh, die Monotonie ist vor und nach dem Scheitelpunkt nicht gleich.

f ist daher nicht in $\mathbb{R}$ streng monoton steigend, Aussage 4 ist falsch.

Aussage 5 ist korrekt.

Eine lineare Funktion wird durch die Ableitung zu einer konstanten Funktion.
Eine quadratische Funktion wird durch die Ableitung zu einer linearen Funktion.

Es gilt ganz allgemein:

Beim Ableiten verringert sich der Grad der Polynomfunktion um 1. Für $n = 4$ gilt zB

$$f(x) = a_4 \cdot x^4 + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

$$f'(x) = 4 \cdot a_4 \cdot x^3 + 3 \cdot a_3 \cdot x^2 + 2 \cdot a_2 \cdot x + a_1$$

Umgekehrt ist die ursprüngliche Funktion um einen Grad höher als ihre Ableitungsfunktion.

M 2.66

Die Funktion f hat an der Stelle $x = 0$ den Funktionswert 0.

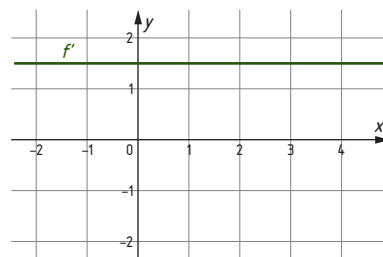
Die Ableitungsfunktion f' ist mit ihrem Graphen gegeben.

Beschreibe, wie man anhand der Grafik die Funktion f finden kann!

Zeichne sie ein!

Lies ihre Gleichung ab!

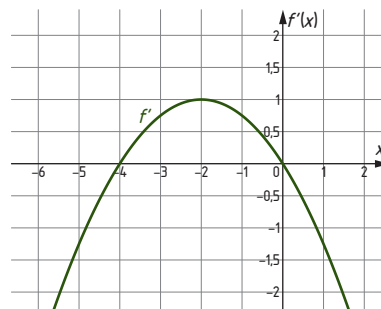
FA |1.4| AN |3.2|



Gegeben ist der Graph der ersten Ableitung der Funktion f .

Kreuze die beiden zutreffenden Aussagen an!

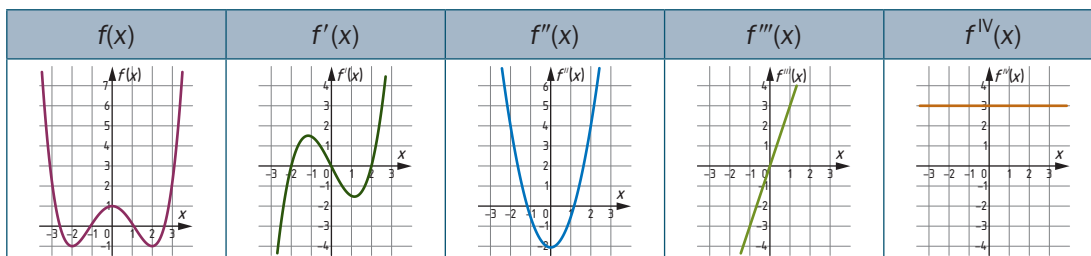
FA |1.4|1.5| AN |3.2|



Die Funktion f' ist für $x < -2$ streng monoton fallend.	☐
Die Funktion f ist eine Polynomfunktion 3. Grads.	☐
Es gilt: $f'(-2) > f''(-2)$	☐
Der Graph der Funktion f' ist eine steigende Gerade.	☐
Der Graph der Funktion f'' ist eine waagrechte Gerade.	☐

2.68 Zeichne den Graphen der Funktion $f(x) = 0,125x^4 - x^2 + 1$ in $\mathbb{R}$ und die Graphen ihrer 4 Ableitungen! (Wähle den Ausschnitt so, dass stets alle möglichen Nullstellen sichtbar sind.)
Beschreibe den Zusammenhang zwischen den lokalen Extrempunkten (Minima und Maxima) und den Nullstellen der jeweiligen Ableitungsfunktion! FA |1.5| AN |3.2|

Die Graphen der Funktion und ihrer Ableitungen:



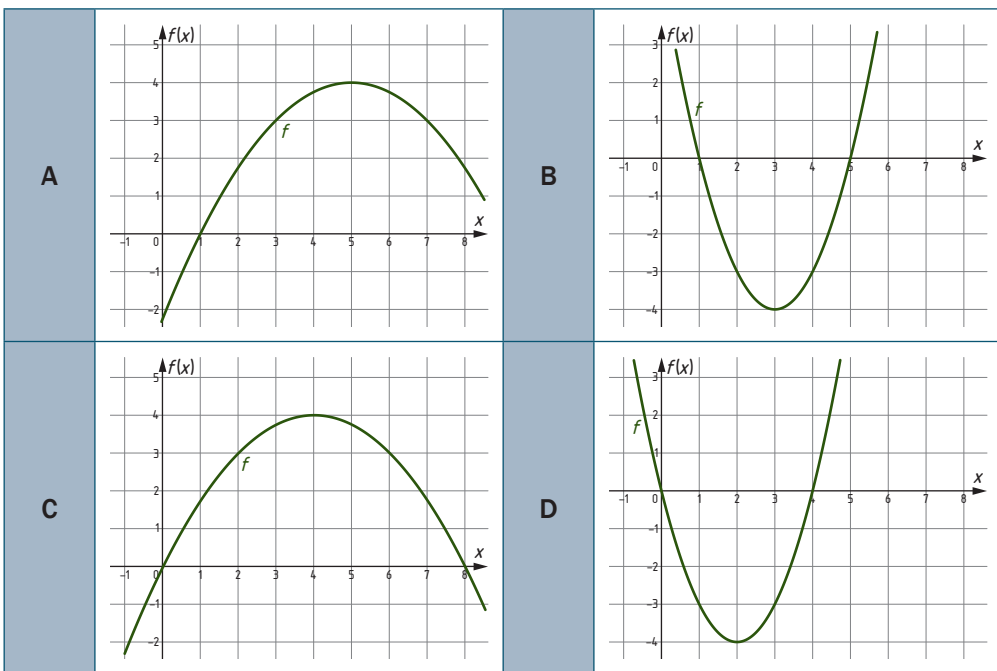
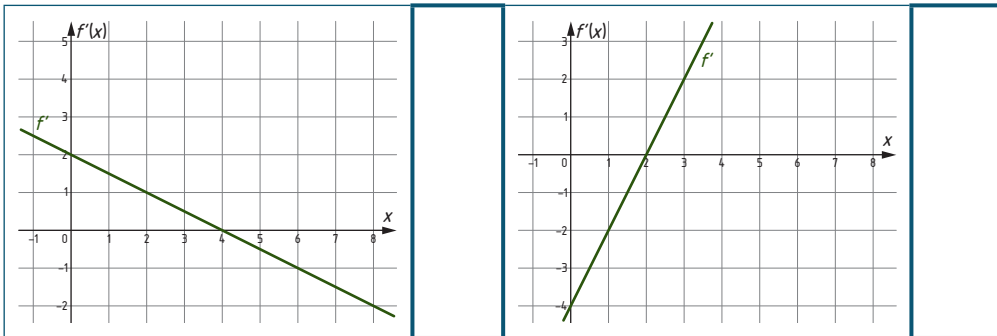
Der Grad der Polynomfunktion nimmt durch die Ableitungen jeweils um 1 von 4 auf 0 ab. Die Anzahl der Nullstellen dieser Funktion nimmt durch die einzelnen Ableitungen ebenfalls jeweils um 1 von 4 auf 0 ab. (Das gilt aber nicht allgemein für alle Polynomfunktionen!) Wir erinnern uns: Lokale Extrempunkte einer reellen Funktion sind jene Stellen, bei denen in einer beliebig kleinen Umgebung alle benachbarten Funktionswerte kleiner (Maximum) oder größer (Minimum) sind. An den lokalen Extrempunkten der Funktion hat die Ableitungsfunktion eine Nullstelle. Das heißt nun, dass die Steigungen der Tangenten in den lokalen Extrempunkten null sind, und demnach dort jeweils waagrechte Tangenten vorliegen. Dabei fällt auf, dass bei einem Minimum der Funktion die Funktionswerte bei der Nullstelle der Ableitungsfunktion von negativen zu positiven wechseln und bei einem Maximum von positiven zu negativen.

Die Steigungen der Tangenten sind in den lokalen Extrempunkten null. Die lokalen Extrempunkte einer Funktion werden zu Nullstellen der abgeleiteten Funktion. Die Anzahl der Nullstellen und der Extrempunkte verändert sich durch das Ableiten ebenfalls. Deren Anzahl hängt aber von der Art der Funktion ab.

M 2.69

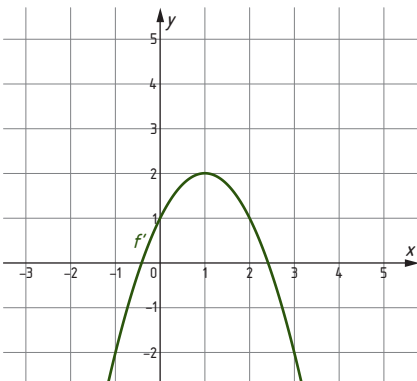
Ordne den Ableitungsfunktionen oben die jeweils richtige Funktion aus A bis D zu, wobei $f(0) = 0$ sein soll!

Begründe, warum die anderen Funktionen nicht in Frage kommen! FA | 1.5 | AN | 3.2 |



M 2.70

Die Ableitungsfunktion f' ist durch den Graphen gegeben.



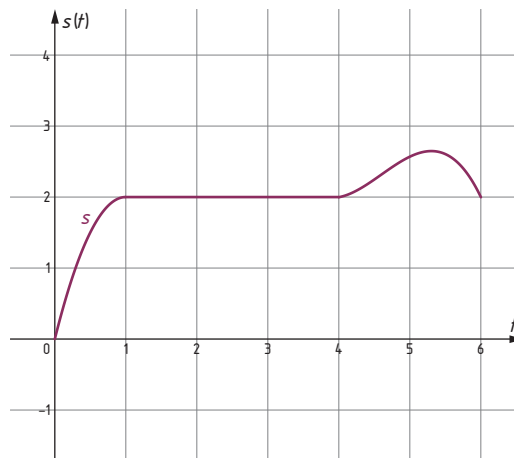
Skizziere den Graphen von f'' !
Gib die Stellen an, an denen die Funktion f ein Maximum bzw. ein Minimum hat!

FA | 1.4 | 1.5 | 4.3 | AN | 3.2 | 3.3 |

Maximum bei $x =$ _____

Minimum bei $x =$ _____

Die Bewegung eines Körpers wird durch die Weg-Zeit-Funktion s beschrieben und ist in der Grafik abgebildet.



Erkläre, zu welchen Zeitpunkten die Geschwindigkeit null ist und in welchen Intervallen sie positive bzw. negative Funktionswerte hat!
Gib den Zeitpunkt an, zu dem der Körper die höchste Geschwindigkeit hat!
Skizziere den ungefähren Verlauf des Graphen der Geschwindigkeits- und der Beschleunigungsfunktion in jeweils eigene richtig beschriftete Koordinatensysteme!

FA | 1.4 | 1.5 | 1.7 | AN | 3.2 |

2.2.6 Anwendung der Ableitungsfunktionen in verschiedenen Kontexten

2.72

Die Funktion $H: [0; 24] \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ ordnet jedem Zeitpunkt t in Stunden die Höhe $H(t)$ in Meter des Wassers in einem Swimmingpool mit einem Leck zu.

Interpretiere den Ausdruck $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{H(3 + \Delta t) - H(3)}{\Delta t}$ in diesem Zusammenhang! AN | 1.3 |

2.73

Aus Interesse beobachtet eine Person die Entwicklung ihrer Gehaltserhöhungen im Verlauf von 15 Jahren.

Zu Beginn der Beobachtung erhält sie einen Gehalt von G_0 in Euro.

Nach 15 Jahren beträgt ihr Gehalt G_{15} in Euro.

Deute den Ausdruck $\frac{G_{15} - G_0}{15}$ in diesem Kontext! AN | 1.3 |

TE 2.74
Typ 2

Die Fahrt eines Snowboarders wird auf einer bestimmten Strecke aufgezeichnet und durch die Funktion s beschrieben:

$$s(t) = 0,8t^2 + 1,2t$$

$s(t)$ in Meter, t in Sekunden

- a) Gib den Term für die mittlere Geschwindigkeit im Intervall $[t_0; t_0 + \Delta t]$ an!

$$v_m = \underline{\hspace{10cm}}$$

- b) Berechne die momentane Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t_0 = 5$ s!
Zeige rechnerisch, dass die momentane Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t_0 = 5$ s größer ist als die mittlere Geschwindigkeit im Intervall $[0; 6]$! AN | 1.2 | 1.3 |



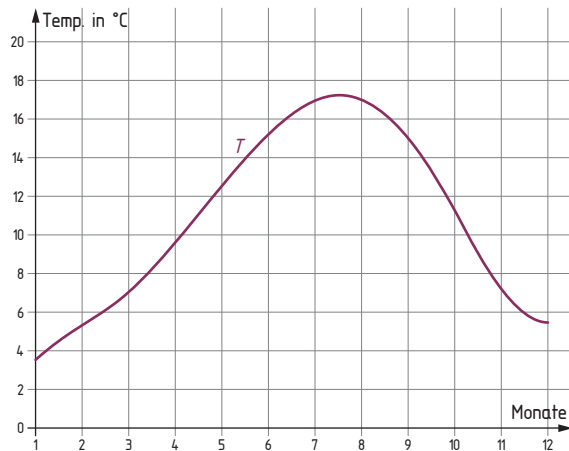
TE 2.75
Typ 2

In einem Ferienort wurden in einem Jahr folgende Temperaturen in °C gemessen:

	Jän.	Feb.	Mär.	Apr.	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sep.	Okt.	Nov.	Dez.
Max Temp.	12,3	14,1	16,2	18,1	24,4	27,9	35,2	39,8	29,7	25,2	18,2	14,1
Min. Temp.	3,4	5,8	6,9	9	13,1	15,2	16,8	18,5	13,6	11,7	8	5,4

- a) Bestimme die durchschnittliche Temperatur der Maximalwerte über das gesamte Jahr!
- b) Berechne für die maximalen Temperaturwerte den Ausdruck $\frac{T(4) - T(1)}{3}$ und interpretiere ihn im gegebenen Kontext!
- c) Die minimalen Temperaturen können näherungsweise durch die in der nebenstehenden Grafik dargestellten Polynomfunktion T modelliert werden. Kreuze die beiden zutreffenden Aussagen an!

FA | 4.3 | AN | 1.2 | 1.3 |



$T'(7,5) = 0$	☐	$\frac{T(6) - T(4)}{2} < T'(7,5)$	☐	$T'(2) < T'(6)$	☐
$T'(0) = 0$	☐	$T(10) < T(4)$	☐		

M TE 2.76
Typ 2

Eine Silvesterrakete wird mit einer Anfangsgeschwindigkeit von 42 m/s lotrecht nach oben geschossen. Der Weg, den sie dabei zurücklegt, wird durch die Funktion h mit $h(t) = v_0 \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2$ beschrieben.

t ... Zeit in Sekunden, s ... zurückgelegter Weg in Meter,
 $g \approx 10 \text{ m/s}^2$... Erdbeschleunigung.

- a) Gib in einer Tabelle den Weg der Rakete an, den sie jeweils nach 1, 2, 3 und 4 Sekunden zurückgelegt hat!
- b) Bestimme jene Zeitpunkte, an denen die Rakete eine Flughöhe von 80 m erreicht!
Erkläre, warum es zwei unterschiedliche Zeitpunkte gibt!
- c) Berechne die momentane Geschwindigkeit der Silvesterrakete nach 3 Sekunden!
- d) Gib jenen Zeitpunkt an, an dem die Geschwindigkeit null ist, und bestimme die dabei erreichte Flughöhe!
- e) Stelle die Funktionen h und h' grafisch dar! Bedenke, dass die Rakete zwar in der Luft explodiert, aber der Stock, an dem der Feuerwerkskörper befestigt ist, wieder zu Boden fällt!

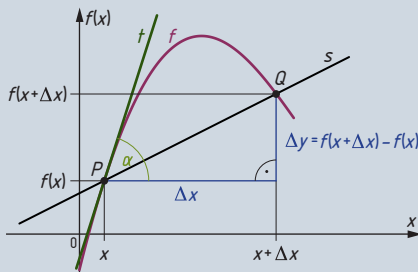
FA | 1.3 | 1.4 | 1.7 | AN | 1.2 | 1.3 |

Für die Funktion f , die im Intervall $[x; x + \Delta x]$ definiert ist, heißt die Zahl $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

Differenzenquotient oder **mittlere Änderungsrate** von f in $[x; x + \Delta x]$.

Der Differenzenquotient lässt sich grafisch als **Steigung der Sekante** im Intervall $[x; x + \Delta x]$ interpretieren.

Der Grenzwert $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ wird **Differenzialquotient** oder **lokale Änderungsrate** von f in $[x; x + \Delta x]$ genannt und lässt sich als Tangentensteigung und als **Tangens des Neigungswinkels** α der Tangente an den Graphen einer Funktion f an der Stelle x auffassen.



Im Intervall $[x; x + \Delta x]$ wird der **Differenzialquotient** folgendermaßen angeschrieben:

$$k = \tan(\alpha) = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Bei einer zeitabhängigen Funktion $f(t)$ nennt man den Differenzialquotienten

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} \text{ **momentane Änderungsrate.**}$$

Bei Bewegungen wird die **mittlere Geschwindigkeit** als Differenzenquotient in einem

$$\text{Zeitintervall angegeben: } \bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

Die **momentane Geschwindigkeit** entspricht der 1. Ableitung der Weg-Zeit-Funktion $s(t)$ zu einem bestimmten Zeitpunkt: $v = s'(t)$

Eine Funktion f' nennt man **Ableitungsfunktion von f** oder **Ableitung von f** , wenn man an jeder Stelle x der Funktion f die **Tangentensteigung** bestimmen kann. Die Ableitungsfunktion f' ordnet jedem x die Steigung im Punkt $(x|f(x))$ an den Graphen von f zu.

Beim **grafischen Differenzieren** wird an beliebig vielen Stellen des Graphen die Tangentensteigung ermittelt und in das Koordinatensystem als Funktionswert eingetragen.

Man kann eine Funktion mehrmals hintereinander ableiten, erhält auf diese Weise f' , f'' , f''' und fasst die Ableitungen ab f'' unter dem Begriff „**höhere Ableitungen**“ zusammen.

Im Kontext von Bewegungsaufgaben ergibt die **erste Ableitung** einer **Weg-Zeit-Funktion** $s(t)$ die **Geschwindigkeitsfunktion** v mit $v(t) = s'(t)$ und die **zweite Ableitung** die **Beschleunigungsfunktion** a mit $a(t) = v'(t) = s''(t)$.

Es gelten folgende **Ableitungsregeln**:

Potenzregel: $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$ mit $n \in \mathbb{N}^*$
 $f(x) = x^{-n} \Rightarrow f'(x) = -n \cdot x^{-n-1}$ mit $n \in \mathbb{N}^*$; $f'(x^0) = 0$

Regel von der konstanten Funktion: $f(x) = k \Rightarrow f'(x) = 0$ mit $k \in \mathbb{R}$

Summen-/Differenzregel: $(f_1(x) \pm f_2(x))' = f_1'(x) \pm f_2'(x)$

Regel vom konstanten Faktor: $(k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x)$ mit $k \in \mathbb{R}$

Vermischte Aufgaben zur Vorbereitung auf die Reifeprüfung

M TE 2.77
Typ 2

- a) Im Dezember 2018 wurden von der Messstation am Hafen in Bregenz vom „Hydrographischen Dienst“ folgende Tagesmittelwerte über den Pegelstand des Bodensees gemessen (392,14 m ü.A.)



Tag	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
cm	277	276	278	283	288	290	291	291	292	294	296

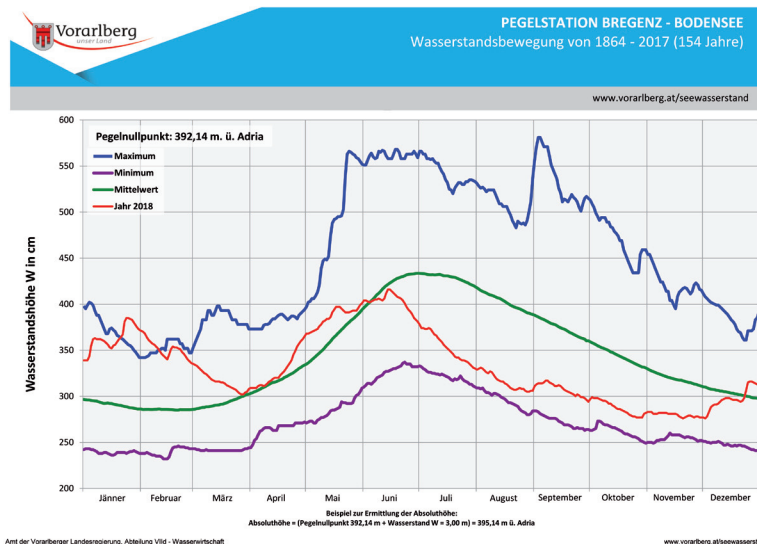
Tag	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
cm	297	298	298	298	297	296	296	296	295	294	295

Tag	23	24	25	26	27	28	29	30	31
cm	298	306	315	316	316	315	314	313	312

Quelle: <https://wovis.vorarlberg.at/images/see/archiv/SeeWasserstand/Tabelle/2018%20See%20Wasserstand%20Tagesmittel.pdf>, 30.1.19

Berechne die mittlere Änderungsrate der Tagesmittelwerte in den Intervallen [1; 31], [1; 16]; [16; 31], vergleiche sie und interpretiere die Ergebnisse! AN | 1.3 |

- b) Die nachfolgende Abbildung zeigt die Wasserstands-bewegung von 1864 bis 2017:



Quelle: <https://wovis.vorarlberg.at/images/see/archiv/SeeWasserstand/2018%20See%20Jahresganglinie.pdf>, 30.1.19

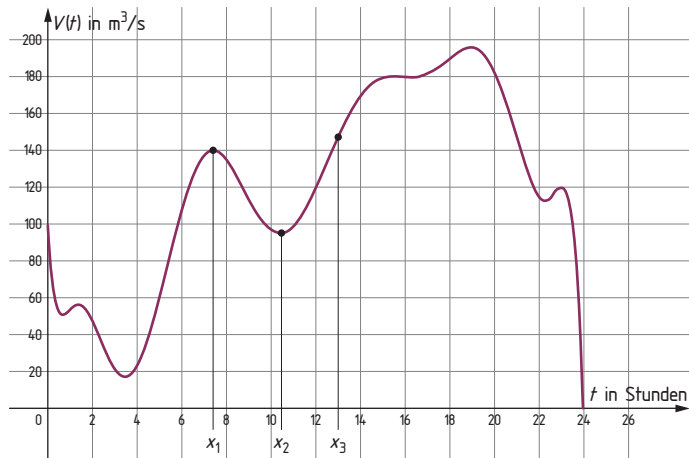
Beschreibe den Verlauf der Werte aus dem Jahr 2018 (rot) und vergleiche ihn mit der Darstellung des Graphen für den Mittelwert (grün)!

Erläutere mögliche Gründe für die maximalen Werte zwischen Mai und September der letzten 154 Jahre!

FA | 1.7 |

2.77 (Fortsetzung)

- c) Der Rhein gilt als wichtigster Zufluss für den Bodensee und trägt damit für den Pegelstand des Bodensees eine hohe Mitverantwortlichkeit. Der Graph stellt den Wasserzufluss des Rheins in m^3/s über 24 Stunden dar (gemessen in Lustenau in Vorarlberg).



Quelle: <https://www.bodensee.net/pegel/>, 30.1.19

Kreuze die beiden zutreffenden Aussagen an!

FA | 1.7 | AN | 1.2 | 1.3 |

Die mittlere Änderungsrate von f an der Stelle x_2 ist negativ.	☐
Der Differenzenquotient von f im Intervall $[x_1; x_3]$ ist größer als der Differenzialquotient an der Stelle x_1 .	☐
Die momentane Änderungsrate an der Stelle x_1 ist kleiner als $f'(x_2)$.	☐
$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$	☐
Die Steigung der Tangente an der Stelle x_1 ist kleiner als die mittlere Änderungsrate von f im Intervall $[x_2; x_3]$.	☐

MTE 2.78
Typ 2



Bei dem nebenstehenden Bild ist ein Tandem-Sprung zu sehen, bei dem sich zwei Personen gemeinsam an einem Seil befestigt von einer Brücke in die Tiefe fallen lassen.

Die Höhe der Brücke über der Wasseroberfläche beträgt 43 m.

Der während des freien Falls zurückgelegte Weg wird durch die Funktion s mit

$$s(t) = \frac{g}{2} \cdot t^2$$

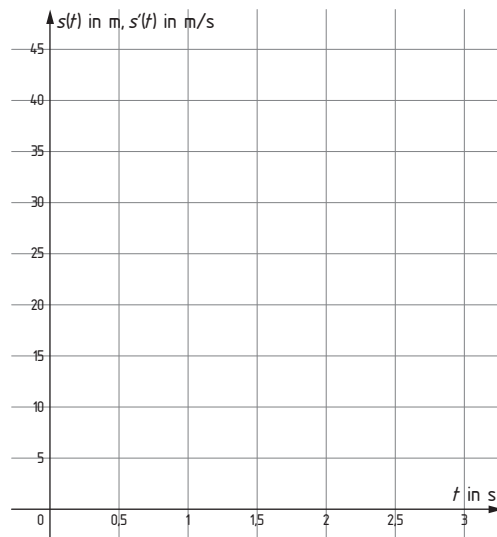
mit der Zeit t in Sekunden und der Erdbeschleunigung $g \approx 10 \text{ m/s}^2$ beschrieben.

- a) Berechne die Dauer des freien Falls, bis die Personen die Flussoberfläche unter der Brücke berühren würden!

2.78 (Fortsetzung)

- b) Bestimme die mittlere Geschwindigkeit der fallenden Körper im Zeitintervall $[0; 0,5]$, $[0; 1]$ und $[1; 2]$!
- c) Berechne die momentane Geschwindigkeit der fallenden Körper jeweils zum Zeitpunkt $t = 1$ s und $t = 2$ s!
- d) Vervollständige die Wertetabelle und stelle die beiden Graphen der Funktion $s(t)$ und $s'(t)$ im Intervall $[0; 3]$ dar!

t	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$s(t)$							
$s'(t)$							



Kreuze die beiden zutreffenden Aussagen an!

FA | 1.3|1.7| AN | 1.3|2.1|

Nach 2 Sekunden hat das Paar im freien Fall ca. 30 m zurückgelegt.	☐
Die Geschwindigkeit wird kleiner, je länger der freie Fall dauert.	☐
Das Paar benötigt ungefähr 3 Sekunden, um die 43 m Distanz zwischen der Brücke und der Flussoberfläche zu überwinden.	☐
Die mittlere Geschwindigkeit im Intervall $[0; 2]$ ist gleich der momentanen Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 1$ s.	☐
Der Graph der Geschwindigkeitsfunktion $s'(t)$ ist während der gesamten Falldauer monoton fallend.	☐

TE 2.79
Typ 2

Die Bewegung eines Körpers im freien Fall kann durch die Weg-Zeit-Funktion h mit $h(t) = 30 - 5t^2$ für $t \geq 0$ dargestellt werden.

t ... Zeit in Sekunden (s), $h(t)$... Höhe über dem Grund in Meter (m)

Stelle die Funktion h grafisch dar!

Gib einen Ausdruck für die mittlere Geschwindigkeit im Zeitintervall $[3; 3 + \Delta t]$ an!

Berechne den Betrag der momentanen Geschwindigkeit 3 Sekunden nach dem Start!

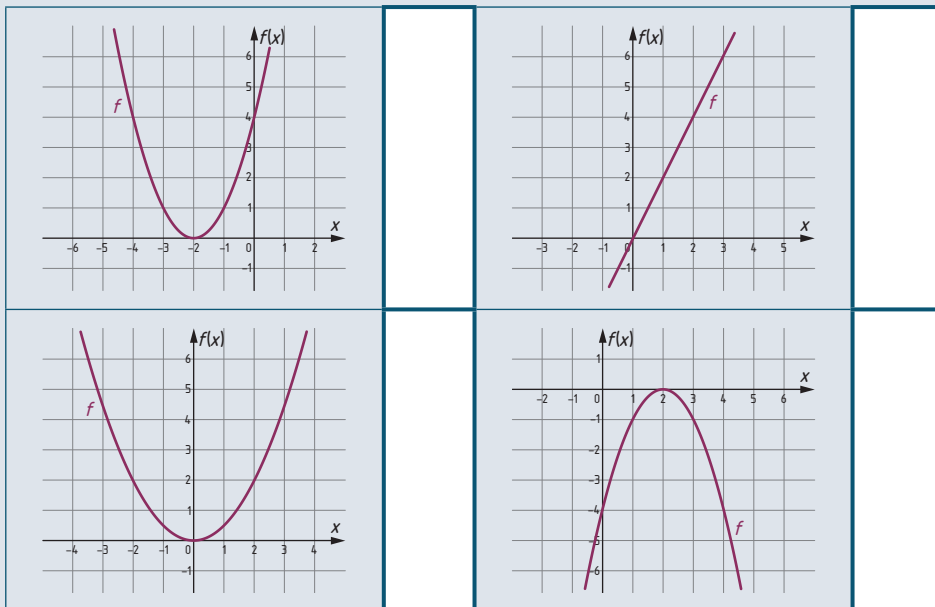
Zeichne den Graphen der Geschwindigkeitsfunktion und deute dessen Nullstelle!

FA | 1.3|1.7| AN | 1.3|2.1|

Wissens-Check

Bearbeite die Aufgaben! **Begründe** jeweils deine Auswahl!

1 Ordne den Funktionen f jeweils die richtige Gleichung von f' aus A bis F zu!



A	$f'(x) = x$	B	$f'(x) = 2x$
C	$f'(x) = -2 \cdot (x - 2)$	D	$f'(x) = -2$
E	$f'(x) = 2$	F	$f'(x) = 2 \cdot (x + 2)$

2 Ergänze die Textlücken durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine korrekte Aussage entsteht!

Ist der Differenzenquotient $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ im Intervall $[x_0; x_0 + \Delta x]$ **1** _____, dann ist **2** _____.

1		2	
positiv	☐	die Sekante fallend	☐
negativ	☐	der Neigungswinkel der Tangente in x_0 gleich 90°	☐
null	☐	der Differenzialquotient $f'(x_0) = 0$	☐

3 Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^4 + 2x^2$.
Kreuze die zutreffende Aussage an!

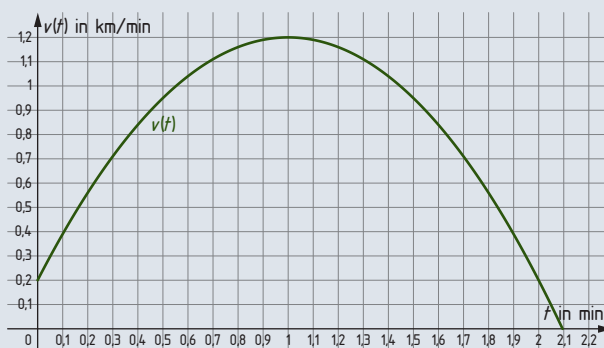
$f(1) = 6$	☐	$f'(-1) = -8$	☐	$f''(0) = 0$	☐
$f'(1) = 16$	☐	$f(-1) = -3$	☐	$f''(0) = -4$	☐

Wissens-Check

- 4 Gegeben ist der Graph der Geschwindigkeitsfunktion v eines Radfahrers.

Ergänze die Textlücken durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine korrekte Aussage entsteht!

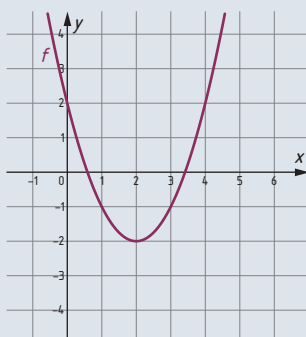
Der Ausdruck 1 beschreibt die 2 innerhalb der ersten Minute.



1	
$v'(1) - v'(0)$	☐
$v(1) - v(0)$	☐
$v'(1)$	☐

2	
mittlere Geschwindigkeit	☐
momentane Geschwindigkeit	☐
mittlere Beschleunigung	☐

- 5 Zeichne den Graphen der Ableitungsfunktion in das Koordinatensystem ein!



- 6 Kreuze beide Aussagen an, bei denen die Ableitungsregeln richtig dargestellt wurden!

$(g(x) + h(x))' = g'(x) + h'(x)$	☐
$(k \cdot s(t))' = k \cdot s'(t)$	☐
$f(x) = z$ mit $z \in \mathbb{R}$, dann gilt $f'(x) = 1$	☐
$(k \cdot (a(x) - b(x)))' = k \cdot a'(x) - b'(x)$	☐
$(x^r)' = r \cdot x^{r+1}$	☐

- 7 Kreuze jene beiden Aussagen an, bei denen richtig differenziert wurde!

$(-5x^2 + 2)' = -10x + 2$	☐	$(x^3 + x + 1)'' = 6x$	☐
$(-5x^2 + 2)' = -10x$	☐	$(x^3 + x + 1)'' = 6x + 1$	☐
$(x^3 + x + 1)' = 3x^2$	☐		

Lösung:
 1) 1. Zeile: F, E; 2. Zeile: A, C
 2) 1 → 2. Zeile, 2 → 1. Zeile
 3) 1. Zeile, 2. Spalte
 4) 1 → 2. Zeile, 2 → 3. Zeile
 5) Siehe Lösungshilfe
 6) 1. und 2. Zeile
 7) 1. Zeile, 2. Spalte; 2. Zeile, 1. Spalte

Anfang des 19. Jahrhunderts gelang es dem französischen Mathematiker **Augustin-Louis Cauchy** (1789 – 1857), der Differenzialrechnung die heute übliche Form zu geben. Er ging vom Begriff der infinitesimalen Größen aus und definierte die Ableitung als Grenzwert von Sekantensteigungen bzw. Differenzenquotienten. Ende desselben Jahrhunderts wurde der Grenzwertbegriff, wie er heute noch benützt wird, vom deutschen Mathematiker **Karl Weierstraß** (1815 – 1897) formuliert.

So liefert uns die Differenzialrechnung das geeignete Werkzeug, um Funktionsgraphen auf wichtige Stellen wie Extremwerte und Wendestellen zu untersuchen.

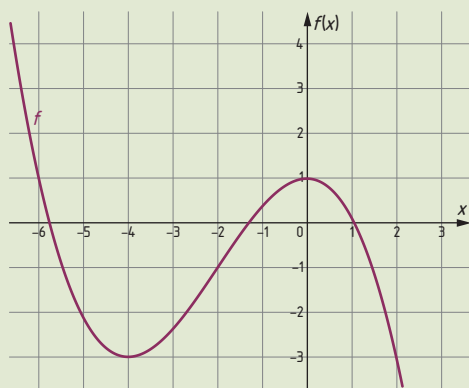


Augustin-Louis Cauchy

3.1 Monotonie und Krümmung einer Kurve

3.1.1 Monotonie und Extremstelle

3.1



Gegeben ist die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Gib ein Intervall an, in dem die Funktion

- a) streng monoton fallend ist!
- b) streng monoton steigend ist!
- c) nicht monoton ist!

FA |1.5|

Wir wissen bereits von früher, dass eine reelle Funktion f in M

streng monoton steigt,	streng monoton fällt,	konstant ist,
wenn für alle $x_1, x_2 \in M$ gilt: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$	wenn für alle $x_1, x_2 \in M$ gilt: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$	wenn für alle $x_1, x_2 \in M$ gilt: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

Die gegebene Funktion ist ...

- a) streng monoton fallend in $(-\infty; -4)$ und in $(0; \infty)$.

–4 ist eine Extremstelle, hier befindet sich ein lokales Minimum. An dieser Stelle steigt die Funktion nicht, sie fällt auch nicht, daher zählt man die Stelle selbst nicht zum Bereich mit strenger Monotonie.

0 ist eine Extremstelle, hier befindet sich ein lokales Maximum. An dieser Stelle steigt die Funktion nicht, sie fällt auch nicht, daher zählt man die Stelle selbst nicht zum Bereich mit strenger Monotonie.

Wenn man die Extremstellen in den beiden Bereichen dazunimmt, dann spricht man von „monoton fallend“.

- b) streng monoton steigend in $(-4; 0)$, die Extremstellen selber zählen nicht zum Bereich mit strenger Monotonie. Zählt man sie dazu, dann spricht man von „monoton steigend“.

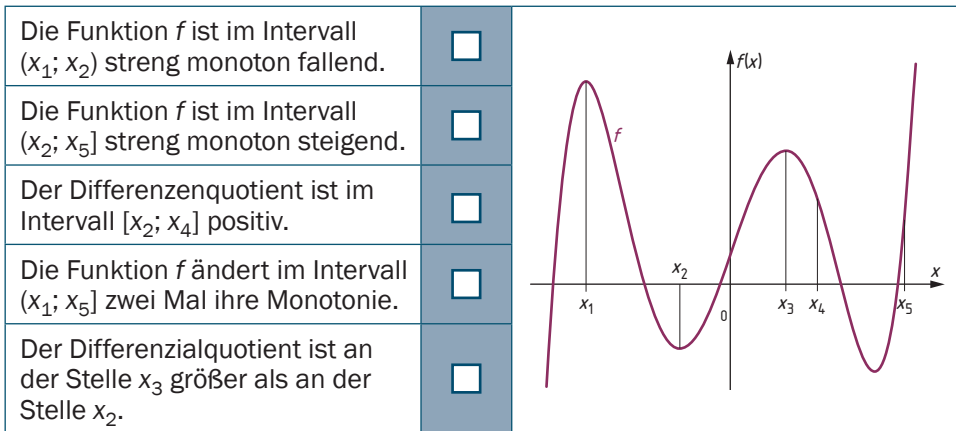
- c) Nicht monoton ist die Funktion zB in $[-5; -2]$, da sich die Monotonie im Intervall ändert, zuerst ist sie fallend, dann steigend.

Die Extremstellen grenzen die Monotoniebereiche voneinander ab.

3.2

Gegeben ist der Graph der Funktion f .
Kreuze die beiden zutreffenden Aussagen an!

FA | 1.5 | AN | 1.3 |



3.3 Ermittle die Monotoniebereiche der Funktion $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4$ mithilfe der 1. Ableitung!

AG | 2.3 | 2.4 | FA | 1.5 | AN | 2.1 | 3.3 |

Wir wählen den Weg über die Differenzialrechnung, um die Monotonie einer Funktion zu untersuchen. Da die erste Ableitung geometrisch die Steigung der Tangente an die Kurve bedeutet, können wir jene Stellen berechnen, die eine waagrechte Tangente haben.

Es gilt dann nämlich: $f'(x) = 3x^2 - 4x = 0$

Die Tangenten sind an den lokalen Extremstellen waagrecht zur x-Achse. So können wir durch das Differenzieren die Grenzen der Monotoniebereiche berechnen.

$$3x^2 - 4x = 0$$

$$x \cdot (3x - 4) = 0 \text{ (Produkt-Null-Satz)} \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ 3x - 4 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{4}{3} \approx 1,3 \end{cases}$$

Diese beiden x-Werte grenzen die Monotoniebereiche voneinander ab.	Die Tangentensteigung ist null bei $x_1 = 0$ und bei $x_2 = \frac{4}{3}$.
Wir untersuchen x-Werte mit positiven Tangentensteigungen: $x < 0$ und $x < \frac{4}{3} \Rightarrow x < 0$ $x > 0$ und $x > \frac{4}{3} \Rightarrow x > \frac{4}{3}$	Im Intervall $(-\infty; 0)$ setzen wir einzelne x-Werte ein und erkennen, dass die Tangentensteigungen positiv sind. Zum Extremwert bei $x = 0$ werden sie aber immer kleiner, dh, die Funktion f ist hier streng monoton steigend und nähert sich einem lokalen Extremwert (Maximum). Im Intervall $(\frac{4}{3}; \infty)$ ist die Funktion nach dem Minimum ebenfalls streng monoton steigend.
Wir untersuchen x-Werte mit negativen Tangentensteigungen: $x < 0$ und $x > \frac{4}{3}$, dh keine Lösung $x > 0$ und $x < \frac{4}{3} \Rightarrow 0 < x < \frac{4}{3}$	Im Intervall $(0; \frac{4}{3})$ setzen wir einzelne x-Werte ein und erkennen, dass die Tangentensteigungen negativ sind, dh, die Funktion f fällt zwischen den beiden Extremstellen streng monoton ab zu einem lokalen Minimum.

In $\mathbb{R}$ ist die Funktion f in $(-\infty; 0) \cup (1,3; \infty)$ streng monoton steigend und in $(0; 1,3)$ streng monoton fallend.

Gegeben ist eine reelle Funktion f mit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ und eine Teilmenge M von D .
Die reelle Funktion f ist in M

streng monoton steigend , wenn für alle $x_1, x_2 \in M$ gilt: $f'(x) > 0 \forall x \in [x_1; x_2]$	streng monoton fallend , wenn für alle $x_1, x_2 \in M$ gilt: $f'(x) < 0 \forall x \in [x_1; x_2]$	konstant , wenn für alle $x_1, x_2 \in M$ gilt: $f'(x) = 0 \forall x \in [x_1; x_2]$
monoton steigend , wenn für alle $x_1, x_2 \in M$ gilt: $f'(x) \geq 0 \forall x \in [x_1; x_2]$	monoton fallend , wenn für alle $x_1, x_2 \in M$ gilt: $f'(x) \leq 0 \forall x \in [x_1; x_2]$	

3.4 Gegeben ist die Funktion $f(x) = 0,8x^3 - 5,4x$.

- Gib Stellen an, an der die Funktion keine Steigung hat!
- Nenne zwei Intervalle, in denen die Funktion $f(x)$ streng monoton steigt!
- Gib zwei Intervalle an, in denen die Funktion $f(x)$ streng monoton fällt!
- Begründe, warum die Steigung an der Stelle $x = 0$ am kleinsten ist!

AG | 2.3 | FA | 1.5 | AN | 2.1 | 3.3 |

3.5 Gegeben ist die quadratische Funktion $f(x)$.
Ermittle die Koordinaten des Scheitelpunkts!

Gib jeweils ein Intervall an, in dem die Funktion streng monoton fällt, streng monoton steigt oder nicht monoton ist!

FA | 1.5 | AN | 2.1 | 3.3 |

- $f(x) = (x + 2)^2$
- $f(x) = (x + 1)^2 - 4$
- $f(x) = x^2 - 6$
- $f(x) = (x - 1)^2$
- $f(x) = -(x + 3)^2 + 2$
- $f(x) = -\frac{1}{2}(x - 2)^2$

3.6 Gegeben ist die Funktion $f(x) = (x - 3)^2 + 1$.

Löse die folgenden Teilaufgaben mithilfe der Differenzialrechnung!

- Bestimme den Scheitelpunkt!
- Gib ein Intervall an, in dem die Funktion f streng monoton wächst!
- Ermittle ein Intervall, in dem die Funktion f streng monoton fällt!

FA | 1.5 | AN | 2.1 | 3.3 |

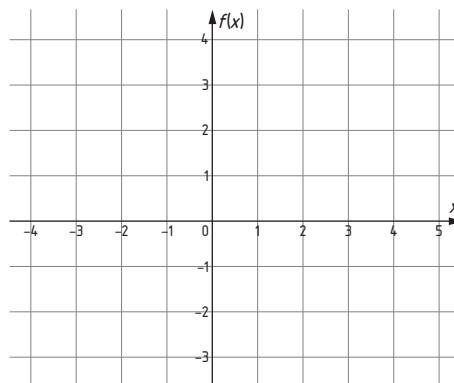
3.7 Ermittle die Monotoniebereiche der Funktion f mithilfe der Ableitung!

FA | 1.5 | AN | 2.1 | 3.3 |

- $f(x) = x^2 + x - 1$
- $f(x) = x^3 - 3x - 2$
- $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 1$
- $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^3$

M 3.8

Skizziere einen möglichen Funktionsgraphen mit den folgenden Eigenschaften in das Koordinatensystem:
 f ist für $x < 0$ streng monoton steigend.
 Der Punkt $(0|4)$ ist ein lokaler Extremwert.
 f ist im Intervall $(0; \frac{8}{3})$ streng monoton fallend.
 f ist für $x > \frac{8}{3}$ streng monoton steigend.
 f hat eine Nullstelle bei 2.



FA | 1.5 | AN | 2.1 | 3.3 |

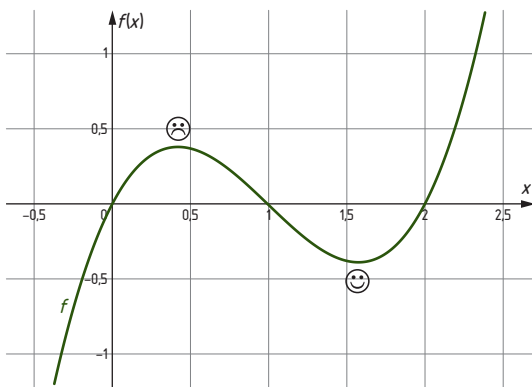
3.1.2 Krümmungsverhalten und Wendestelle

Neben der Monotonie ist auch das Krümmungsverhalten wesentlich für den Verlauf des Funktionsgraphen.

3.9 Ermittle die Krümmungsbereiche der Funktion $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ mithilfe der Differenzialrechnung!

AG |2.3| FA |1.5| AN |2.1|3.3|

Eine Kurve krümmt sich, wenn die Steigungen der Kurve mit wachsendem x laufend ab- bzw. zunehmen. Wir skizzieren die gegebene Funktion:



Wie **ändern** sich die Tangentensteigungen? Vom Beginn der Kurve bis zur 1. lokalen Extremstelle ($x \approx 0,4$) sind die Tangentensteigungen positiv, nehmen aber allmählich bis zu null ab.

Nach der Extremstelle nehmen die Tangentensteigungen mit wachsendem x weiter ab, sie werden negativ.

Ab $x = 1$ ist keine Abnahme mehr zu erkennen, die Tangentensteigungen sind negativ, beginnen aber allmählich größer zu werden.

Bei ca. 1,7 sind sie wieder null, werden anschließend positiv und steigen weiterhin immer stärker an.

An dem Graphen erkennt man 2 Bereiche mit unterschiedlicher Krümmung.

Nehmen die Tangentensteigungen mit wachsendem x zu, dann liegt eine **positive Krümmung** vor. (Man nennt die Kurve auch linksgekrümmt oder konvex bzw. im Anwendungsbereich spricht man auch von progressiver Krümmung.) Merkhilfe: ☺

Nehmen die Tangentensteigungen ab, dann liegt eine **negative Krümmung** vor. (Sie heißt auch rechtsgekrümmt, konkav oder degressiv.) Merkhilfe: ☹

Der Punkt auf der Kurve, bei dem sich das Krümmungsverhalten ändert, heißt **Wendepunkt**. Er liegt hier an der Stelle $x = 1$. Der Wendepunkt grenzt also den Bereich mit positiver von jenem mit negativer Krümmung ab.

Wie können wir mittels Differenzialrechnung diese Bereiche bestimmen?

Die Steigung der Tangente wird durch die 1. Ableitung berechnet.

Die **Änderung der Steigung** müssen wir daher mit der 2. Ableitung berechnen:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2, \quad f''(x) = 6x - 6.$$

Wenn wir $f''(x) = 0$ setzen, dann erhalten wir jene Stellen, an denen die Funktion keine Krümmung hat. Das sind die gesuchten Wendestellen, die Begrenzungen der Bereiche mit unterschiedlichem Krümmungsverhalten.

$$\begin{aligned} 6x - 6 &= 0 \\ 6x &= 6 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Bei $x = 1$ befindet sich eine Wendestelle.

Wir schauen uns das Krümmungsverhalten vor und nach der Wendestelle genauer an:

$$\begin{aligned} f''(-1) &= 6 \cdot (-1) - 6 = -12 \\ f''(0) &= -6 \\ f''(0,5) &= 6 \cdot 0,5 - 6 = -3 \end{aligned}$$

Im Intervall $[-1; 1)$ sind die Funktionswerte der zweiten Ableitung negativ, dh, die Funktion f ist in diesem Bereich negativ gekrümmt (rechtsgekrümmt).

$$\begin{aligned} f''(1,5) &= 6 \cdot 1,5 - 6 = 3 \\ f''(2) &= 6 \cdot 2 - 6 = 6 \\ f''(3) &= 6 \cdot 3 - 6 = 12 \end{aligned}$$

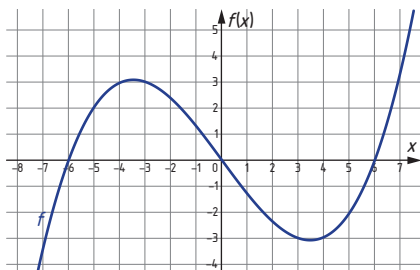
Im Intervall $(1; 3]$ sind die Funktionswerte der zweiten Ableitung positiv, dh, die Funktion f ist in diesem Bereich positiv gekrümmt (linksgekrümmt).

Die **Wendestelle** erfüllt die Bedingung: $f''(x) = 0$

Die Wendestellen begrenzen die Bereiche mit unterschiedlichem Krümmungsverhalten:
 $f''(x) > 0$... positive Krümmung; $f''(x) < 0$... negative Krümmung

In $\mathbb{R}$ ist die Funktion f in $(-\infty; 1)$ negativ gekrümmt und in $(1; \infty)$ positiv gekrümmt.

3.10



Gib an, wo die zum Ursprung punktsymmetrische Funktion f

- a) positiv gekrümmt ist!
- b) negativ gekrümmt ist!
- c) weder positiv noch negativ gekrümmt ist!

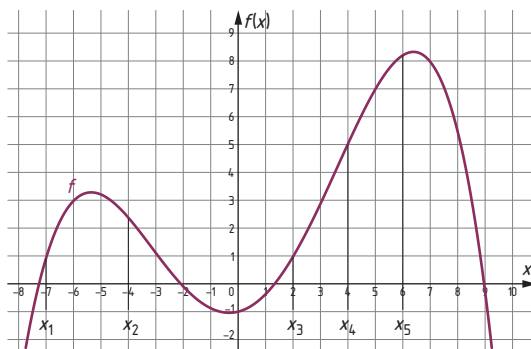
FA | 1.5 |

M 3.11

Gegeben ist der Graph der Funktion f .

Kreuze die beiden zutreffenden Aussagen zum Krümmungsverhalten an!

AN | 3.2 |



$f''(x_5) > 0$	☐	$f''(x_3) > 0$	☐	$f''(x) > 0$ $\forall x \in [x_4; x_5]$	☐
$f''(x) < 0$ $\forall x \in [x_1; x_2]$	☐	$f''(x_1) = 0$	☐		

3.12

Berechne die Krümmung der Funktion f an der Stelle x_1 !

AN | 2.1 | 3.3 |

a) $f(x) = x^3 - 7x^2 + 1, x_1 = 2$

b) $f(x) = (x + 3)^3, x_1 = -4$

c) $f(x) = -3x^3 - 2x^2, x_1 = -\frac{1}{3}$

d) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{6}x^2, x_1 = 3$

e) $f(x) = 0,5x^3 - x^2, x_1 = \frac{1}{2}$

f) $f(x) = x^3 - 2x + 1, x_1 = -\frac{1}{2}$

3.13

Beschreibe das Krümmungsverhalten der Funktion f !

Berechne die Wendestellen und die Wendepunkte!

FA | 1.5 | AN | 2.1 | 3.3 |

a) $f(x) = 2x^3 - 4x$

b) $f(x) = \frac{1}{6}x^3 + x^2 - 2$

c) $f(x) = -\frac{1}{12}x^4 + \frac{5}{12}x^3$

d) $f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{6}x^3 - x^2$

3.2 Charakteristische Kurvenpunkte

3.2.1 Lokale Extrempunkte

TE

3.14 Gegeben ist die Funktion $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x - 2$.

- Berechne die Extremstellen der Funktion!
- Bestimme grafisch mithilfe von Technologieinsatz die Hoch- und Tiefpunkte! Unterscheide Hoch- und Tiefpunkt anhand der Krümmung der Kurve!

AG |2.3| AN |2.1|3.1|3.3|

Um das Beispiel rechnerisch lösen zu können, müssen wir die Bedingungen kennen, die für lokale Extremstellen gültig sind.

Lokale Extrema an einer Stelle p haben – wie von früher schon bekannt – die höchsten bzw. tiefsten Funktionswerte in einer gewissen Umgebung von p .

Daher ist die **notwendige Bedingung**, dass die Tangentensteigung an der Extremstelle p null sein muss.

$$f'(p) = 0$$

Notwendig heißt, wir wissen, dass ein lokaler Extremwert vorliegt, aber nicht jede Stelle mit der ersten Ableitung null ist ein Extremwert.

Daher muss die **hinreichende Bedingung** für eine lokale Extremstelle noch angefügt werden: Eine mindestens 2-mal differenzierbare Funktion hat mit Sicherheit einen lokalen Extremwert an der Stelle p , wenn die 2. Ableitung an dieser Stelle nicht null ist (also eine Krümmung vorliegt!), dh $f''(p) \neq 0$.

Ist $f''(p) < 0$ (= negativ gekrümmt), so liegt ein lokales Maximum (ein **Hochpunkt**) vor.

Ist $f''(p) > 0$ (= positiv gekrümmt), so liegt ein lokales Minimum (ein **Tiefpunkt**) vor.

Mit diesen Kenntnissen ausgestattet können wir die Aufgabe nun lösen.

a) $f'(x) = 6x^2 - 10x - 4$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 6x^2 - 10x - 4 = 0$$

Wir verwenden die große Lösungsformel:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4 \cdot 6 \cdot (-4)}}{12}$$

$$x_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 + 96}}{12}$$

$$x_{1,2} = \frac{10 \pm 14}{12}$$

$$x_1 = \frac{10 + 14}{12} = 2$$

$$x_2 = \frac{10 - 14}{12} = -\frac{4}{12} = -\frac{1}{3}$$

Punkte vervollständigen:

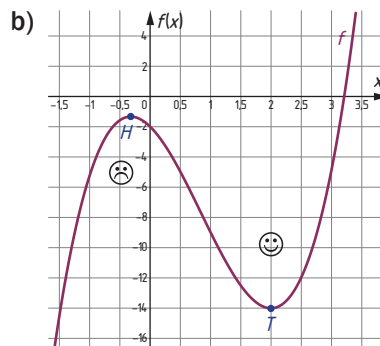
$$f(x_1) = f(2) = -14 \Rightarrow E_1(2 | -14)$$

$$f(x_2) = f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{35}{27} \Rightarrow E_2\left(-\frac{1}{3} | -\frac{35}{27}\right)$$

c) Die Entscheidung mithilfe der Differenzialrechnung:

$$f''(x) = 12x - 10 \Rightarrow f''(2) = 14 > 0 \rightarrow \text{An der Stelle 2 befindet sich der Tiefpunkt.}$$

$$f''\left(-\frac{1}{3}\right) = -4 - 10 = -14 < 0 \rightarrow \text{An der Stelle } -\frac{1}{3} \text{ liegt der Hochpunkt.}$$



Wie aus der Darstellung entnommen werden kann, liegt der Hochpunkt bei $E_2\left(-\frac{1}{3} | -\frac{35}{27}\right)$ und der Tiefpunkt bei $E_1(2 | -14)$.

Die **notwendige Bedingung** für eine lokale Extremstelle p : $f'(p) = 0$

Die **hinreichende Bedingung** für eine lokale Extremstelle p : $f''(p) \neq 0$

$f''(p) < 0$ (= negativ gekrümmt) $\rightarrow$ **lokales Maximum (Hochpunkt)**

$f''(p) > 0$ (= positiv gekrümmt) $\rightarrow$ **lokales Minimum (Tiefpunkt)**

3 Untersuchung von Polynomfunktionen

- 3.15** Berechne alle lokalen Extremstellen der Funktion $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 2x + 1!$
Gib die Koordinaten der Hoch- und Tiefpunkte an! AG |2.3| AN |2.1|3.1|3.3|

Lösung:

$$f'(x) = 6x^2 - 8x + 2$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 6x^2 - 8x + 2 = 0$$

Wir erhalten: $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = 1$... Extremstellen

$$f''(x) = 12x - 8$$

$$f''\left(\frac{1}{3}\right) = 12 \cdot \frac{1}{3} - 8 = -4 < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt } H\left(\frac{1}{3} \mid f\left(\frac{1}{3}\right)\right)$$

$$f''(1) = 12 \cdot 1 - 8 = 4 > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt } T(1 \mid f(1))$$

Punkte vervollständigen:

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) + 1 = \frac{35}{27} \Rightarrow H\left(\frac{1}{3} \mid \frac{35}{27}\right)$$

$$f(1) = 2 \cdot 1^3 - 4 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 + 1 = 1 \Rightarrow T(1 \mid 1)$$

- 3.16** Berechne alle Extremstellen und gib die Koordinaten der Hoch- und Tiefpunkte an! AG |2.3| AN |2.1|3.1|3.3|

a) $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{8}x^2 - 2,25x + 3$

b) $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 4x + 2$

c) $f(x) = -\frac{1}{4}x \cdot (x - 2) + 4$

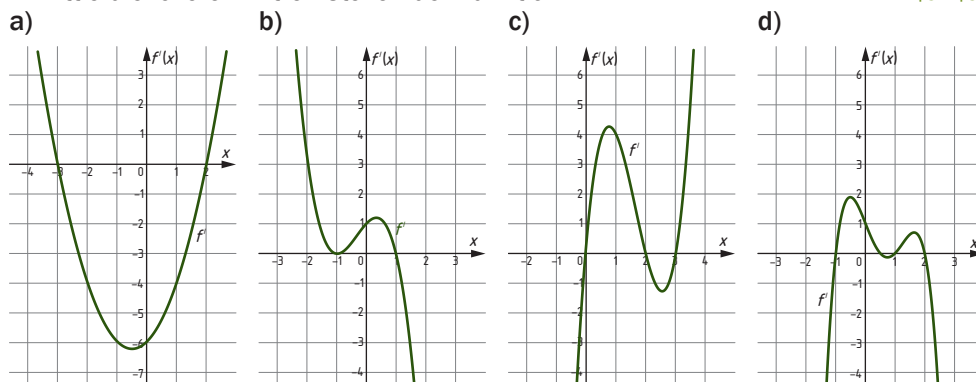
d) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + 2x^3 + 4x^2$

- 3.17** Ordne den Aussagen jeweils die äquivalente Schreibweise aus A bis F zu! AN |3.3|

f hat an der Stelle x_0 eine Extremstelle, denn es gilt auch $f''(x) \neq 0$.		A	$f'(x_0) > 0$
x_0 ist Nullstelle der Funktion f .		B	$f(x_0) = 0$
f ist an der Stelle x_0 streng monoton steigend.		C	$f''(x_0) > 0$
f ist in x_0 linksgekrümmt.		D	$f'(x_0) = 0$
		E	$f''(x_0) < 0$
		F	$f''(x_0) = 0$

- 3.18** Gegeben ist der Graph der Ableitungsfunktion f' .
Ermittle die lokalen Extremstellen der Funktion f !

AN |3.2|3.3|

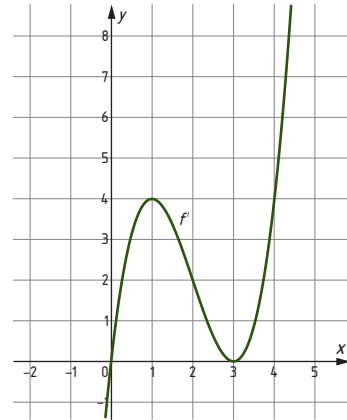


3.19

Gegeben ist der Graph der ersten Ableitung einer Funktion f !

- Bestimme die lokalen Extremstellen der Funktion f !
- Zeichne den Graphen der Funktion f'' näherungsweise in das Koordinatensystem ein! Beschreibe deine Vorgehensweise!

AN | 3.1 | 3.2 | 3.3 |



3.2.2 Wendepunkt und Wendetangente

- 3.20** Bestimme den Wendepunkt der Funktion $f(x) = x^3 - 6x^2 + 6x + 1$! Berechne die Gleichung der Tangente $t_W: y = kx + d$, die an diesem Punkt den Funktionsgraphen berührt!

AG | 2.2 | FA | 2.3 | AN | 2.1 | 3.1 | 3.3 |

Die Krümmung am Wendepunkt ist null. Es ist dies die **notwendige Bedingung** für einen Wendepunkt, an dem sich – wie wir bereits wissen – das Krümmungsverhalten ändert.

Die Wendestelle wird mithilfe der zweiten Ableitung bestimmt:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 6, f''(x) = 6x - 12$$

Wir setzen

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ 6x - 12 &= 0 \\ 6x &= 12 \Rightarrow x = 2 \end{aligned}$$

Wir wissen, dass an der Stelle $x = 2$ die Krümmung null ist. Diese Bedingung ist aber nicht hinreichend. Nicht nur Wendestellen haben $f''(x) = 0$. Das sichere Kriterium, dass sich an dieser Stelle die Krümmung der Kurve ändert, liefert die 3. Ableitung. Diese darf an einer Wendestelle nicht null sein.

$$f'''(x) \neq 0$$

Daher leiten wir nun noch einmal ab:

$$f'''(x) = 6.$$

Es liegt also ein Wendepunkt an der Stelle $x = 2$ vor. Weil die Änderung der Krümmung positiv ist, können wir zudem schließen, dass die Krümmung sich von **negativ zu positiv** ändert.

Den Wendepunkt selbst müssen wir noch vollständig berechnen.

$x = 2$ ist uns bekannt, y erhalten wir, indem wir den Punkt vervollständigen: $W(2 | f(2))$

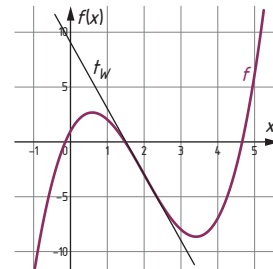
$$f(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 + 1 = -3 \Rightarrow W(2 | -3)$$

Wir berechnen nun noch die Tangente $t_W: y = kx + d$

Die Steigung k wird durch $f'(2)$ gewonnen: $f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 6 = -6$

Wir setzen den Wendepunkt ein und erhalten:

$$t_W: -3 = (-6) \cdot 2 + d \Rightarrow d = 9 \Rightarrow t_W: y = -6x + 9$$



Wendepunkt und Wendetangente:

Die Funktion $f: D \rightarrow W$ mit $y = f(x)$ hat an der Stelle p ihres Definitionsbereichs eine **Wendestelle**, wenn sich an der Stelle p das Krümmungsverhalten ändert. Der Punkt $P(p|f(p))$ wird **Wendepunkt** W genannt.

Notwendige Bedingung für Wendestellen:

Wenn p eine Wendestelle einer Funktion f ist, **dann** ist die Krümmung der Funktion an dieser Stelle gleich 0 (kurz: **p ist Wendestelle $\Rightarrow f''(p) = 0$**).

Hinreichende Bedingung für Wendestellen:

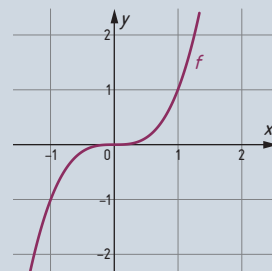
Wenn $f''(p) = 0 \wedge f'''(p) \neq 0$, **dann** ist p eine **Wendestelle**.

Die Gerade, die den Graphen der Funktion f in ihrem Wendepunkt $W(p|f(p))$ berührt, nennt sich **Wendetangente** t_W .

p ist auch jene Stelle, an der die Funktion f die betragsmäßig größte Steigung aufweist. Diese wird durch die erste Ableitung im x -Wert des Wendepunkts $f'(x_W)$ ermittelt.

Beachte folgende Besonderheit:

Ein Wendepunkt, der eine waagrechte Tangente hat, bei dem also auch $f'(p) = 0$ erfüllt ist, heißt **Sattelpunkt**.

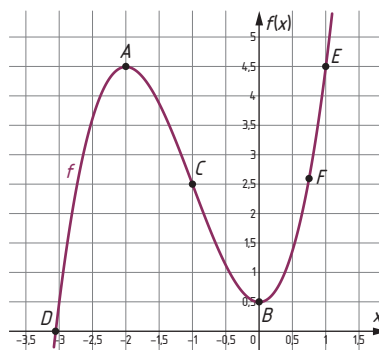
**M 3.21**

Gegeben ist der Graph der Funktion f .
Ordne richtig zu!

Tiefpunkt	
Hochpunkt	
Wendepunkt	
Nullpunkt	

A	Punkt A
B	Punkt B
C	Punkt C
D	Punkt D
E	Punkt E
F	Punkt F

FA | 1.4 | 1.5 |

**TE 3.22**

Berechne die Wendestellen der Funktion f !
Gib die Koordinaten der Wendepunkte an!
Bestimme die zugehörige Wendetangente!
Ermittle ihre Krümmungsbereiche!
Gib an, ob Sattelpunkte vorkommen!

AG | 2.2 | 2.3 | AN | 2.1 | 3.1 | 3.3 |

a) $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - x^2 - \frac{1}{2}x$

b) $f(x) = -\frac{1}{3}x^4 - x^3$

c) $f(x) = \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{12}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x$

d) $f(x) = 0,25x^4 - 1,5x^2 - 1$

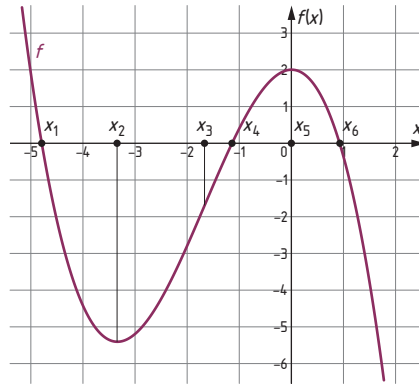
3.23

Erkläre, warum Funktionen der Form $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{N}_g \setminus \{0\}$ keine Wendepunkte haben!

FA | 1.5 | AN | 3.1 | 3.3 |

M 3.24

Gegeben ist der Graph der Funktion f .

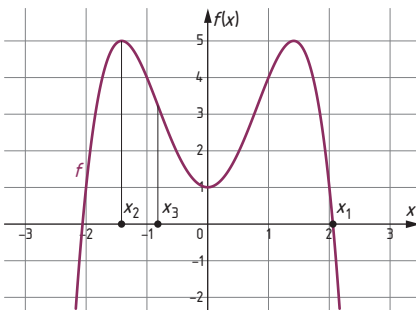


Kreuze die beiden richtigen Aussagen an!

AN | 3.2 |

$f(x_4) < 0$	☐	$f''(x_6) > 0$	☐	$f'(x_2) = f'(x_5)$	☐
$f'(x_1) = 0$	☐	$f''(x_3) = 0$	☐		

M 3.25



Gegeben ist der Graph der Funktion f .

Ergänze die Textlücken durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine korrekte Aussage entsteht!

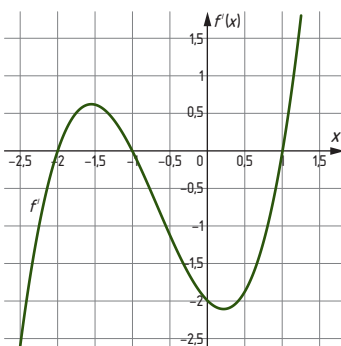
AN | 3.2 | 3.3 |

An der Stelle _____ ① _____ befindet sich eine Wendestelle, da an dieser Stelle _____ ② _____ gilt.

①	
x_1	☐
x_2	☐
x_3	☐

②	
$f' < 0 \wedge f'' = 0$	☐
$f'' = 0 \wedge f''' \neq 0$	☐
$f' < 0$	☐

3.26



Lies (näherungsweise) aus dem Graphen der Ableitungsfunktion f' die Werte der ...

- a) lokalen Extremstellen von f ,
- b) der Wendestellen von f ab! AN | 3.2 | 3.3 |

3.27

Gegeben ist der Graph der Funktion f im Intervall $[-1; 1,5]$.
Kreuze die beiden zutreffenden Aussagen an!

FA | 1.4 | 1.5 | AN | 3.1 | 3.2 | 3.3 |

0,5 ist sowohl eine lokale als auch eine globale Minimumstelle.

☐

f ist durchwegs positiv gekrümmt.

☐

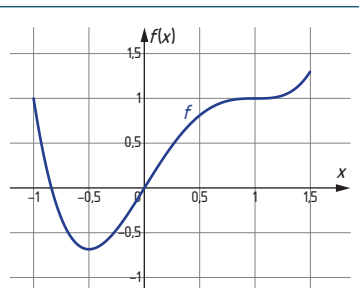
Im Ursprung befindet sich sowohl eine Extrem- als auch eine Nullstelle.

☐

$f'(1) = 0$ und $f''(1) = 0$

☐

Bei $x = -0,5$ ist ein Tiefpunkt von f .

☐


M

3.28

Von einer Polynomfunktion f ist Folgendes bekannt:

$$f(1) = 0, f'(1) = 0, f''(1) = -1.$$

Ergänze die Textlücken durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine korrekte Aussage entsteht!

AN | 3.2 | 3.3 |

Die Funktion f besitzt an der Stelle 1 sicher 2.

1

0

☐

1

☐

-1

☐

2

ein lokales Maximum

☐

ein lokales Minimum

☐

eine Wendestelle

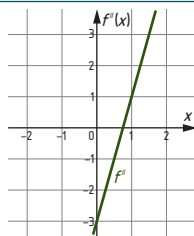
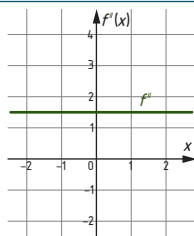
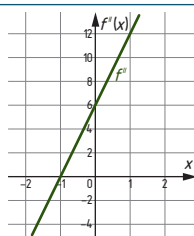
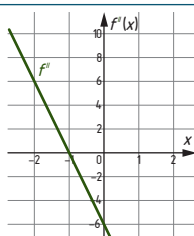
☐

M

3.29

Ordne den Graphen der zweiten Ableitung f'' jeweils die Wendestelle x_W und die korrekte Aussage zur Krümmung der Funktion f aus A bis F zu!

FA | 1.4 | AN | 3.2 | 3.3 |



A

$x_W = 0,75$, die Krümmung von f wechselt von negativ zu positiv.

B

Die Funktion f hat keinen Wendepunkt, f ist positiv gekrümmt.

C

$x_W = -1$, die Krümmung von f wechselt von positiv zu negativ.

D

$x_W = -1$, die Krümmung von f wechselt von negativ zu positiv.

E

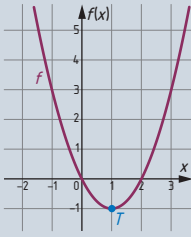
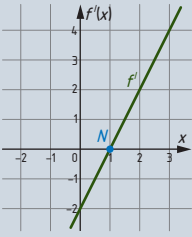
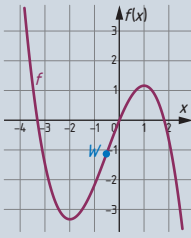
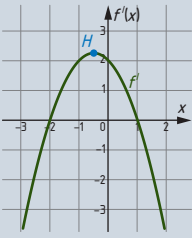
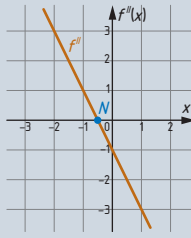
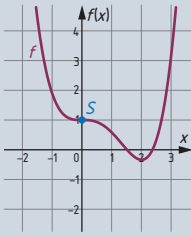
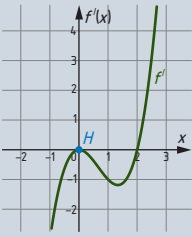
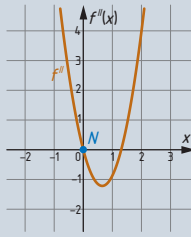
Die Funktion f hat keinen Wendepunkt, f ist negativ gekrümmt.

F

$x_W = 0,75$, die Krümmung von f wechselt von positiv zu negativ.

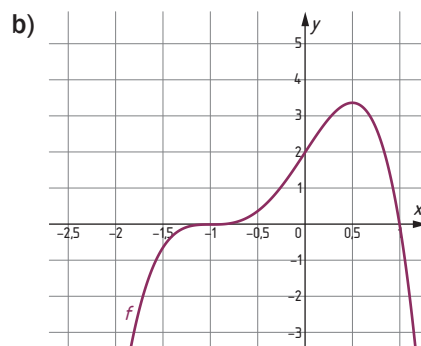
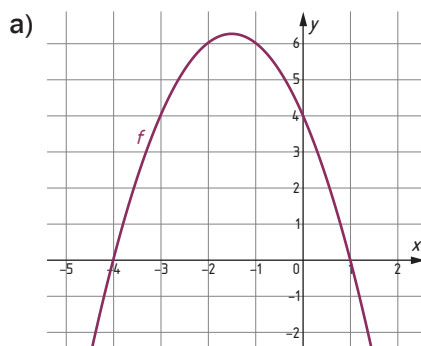
Zusammenfassung von wichtigen Zusammenhängen:

Bei den grafischen Darstellungen ist es besonders wichtig, die Zusammenhänge zwischen den unterschiedlichen charakteristischen Kurvenpunkten zu kennen. In der folgenden Tabelle ist daher noch einmal explizit dargestellt, dass die Extremstelle in der Ableitungsfunktion zu einer Nullstelle, eine Wendestelle in der 1. Ableitung zu einer Extremstelle und in der 2. Ableitung zu einer Nullstelle wird, etc.

f	f'	f''
Extremstelle 	Nullstelle 	
Wendestelle 	Extremstelle 	Nullstelle 
Sattelstelle 	Null- und Extremstelle 	Nullstelle 

M 3.30

Lies aus den Graphen der gegebenen Polynomfunktionen die charakteristischen Kurvenpunkte (Nullstellen, Extrempunkte, Wendepunkte, Sattelpunkte) ab! Skizziere jeweils die erste Ableitungsfunktion in die Grafik! FA |1.4|1.5|4.3| AN |3.2|3.3|



3.2.3 Anzahl der charakteristischen Punkte

TE

3.31 Bestimme a) Nullstellen, b) lokale Extremstellen und c) Wendestellen der Funktion $f(x) = x^3 - 3x - 2$ und gib jeweils die Anzahl der Lösungen an!

AG | 2.2|2.3| FA | 1.4|1.5|4.3|4.4| AN | 2.1|3.1|3.3|

- a) Wir aktivieren unser Vorwissen aus dem Kapitel „Polynomgleichungen höheren Grads“ und interpretieren die Nullstellen als Lösungen der Polynomgleichung der zugehörigen Polynomfunktion $f(x) = x^3 - 3x - 2$.
Nullstellen sind jene Stellen, an denen die Funktion die x-Achse schneidet; der zugehörige Funktionswert y oder $f(x)$ ist null.

$$\text{Es gilt daher: } f(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 3x - 2 = 0$$

Bei einer Gleichung 3. Grads können wir die Lösungen durch Abspalten von Linearfaktoren gewinnen oder mithilfe von Technologieeinsatz.

ZB Geogebra: CAS-Fenster: Befehle „Löse(Gleichung)“ oder „NLöse(Gleichung)“, Algebra-Fenster und Eingabezeile durch „Nullstelle(Polynom)“.

Für die Berechnung ohne Technologieeinsatz wiederholen wir die Technik des Abspaltens eines Linearfaktors (Polynomdivision). Dazu suchen wir eine erste mögliche Lösung. Wir betrachten das sogenannte „absolute Glied“ unserer Polynomfunktion, nämlich -2 , und bestimmen seine möglichen Teiler: $T(-2) = \{\pm 1, \pm 2\}$.

Wir setzen einen davon in $f(x)$ ein, in der Erwartung, dass das Ergebnis null ist.

$$f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 - 2 = -4 \dots \text{keine Nullstelle}$$

$$f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -1 \dots \text{Nullstelle}$$

Wir dividieren den Gleichungsterm durch den Linearfaktor $(x + 1)$

$$\begin{array}{r} \text{Dividend: } f(x) \quad \text{Divisor } (x - x_1) \\ (x^3 - 3x - 2) : (x + 1) = x^2 - x - 2 \\ \underline{-x^3 - x^2} \\ -x^2 - 3x \\ \underline{+x^2 + x} \\ -2x - 2 \\ \underline{+2x + 2} \\ 0 \end{array}$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$x_{2,3} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2}$$

$$x_{2,3} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} \Rightarrow x_2 = 2, x_3 = -1 \text{ (Mehrfachlösung)}$$

Die Nullstellen lauten also: $x_{1,3} = -1, x_2 = 2$ (3 Lösungen)

- b) Die Extremstellen berechnen wir durch $f'(x) = 0$: $f'(x) = 3x^2 - 3$

$$\begin{array}{rcl} 3x^2 - 3 = 0 & | + 3 \\ 3x^2 = 3 & | : 3 \\ x^2 = 1 & | \sqrt{} \end{array}$$

$$x_1 = -1, x_2 = 1 \text{ (2 Lösungen)}$$

- c) Die Wendestellen berechnen wir durch $f''(x) = 0$: $f''(x) = 6x$

$$6x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ (1 Lösung)}$$

Zusammenhang: Grad der Funktion und besondere Stellen der Funktion

Eine Polynomfunktion n -ten Grads besitzt **höchstens**

- n Nullstellen
- $n - 1$ Extremstellen
- $n - 2$ Wendestellen

Mit jeder Ableitung verringert sich der Grad der Polynomfunktion um 1 und daher auch die Anzahl der maximal möglichen Extremstellen bzw. Wendestellen. Zu beachten ist, dass auch Mehrfachlösungen vorkommen können.

M 3.32

Eine Polynomfunktion 4. Grads ist allgemein durch $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ dargestellt.

Ergänze die Textlücken durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine korrekte Aussage entsteht! FA | 4.4 |

Eine Polynomfunktion 4. Grads hat _____ ① _____ ② _____.

①	
höchstens	☐
genau	☐
mindestens	☐

②	
3 Nullstellen	☐
4 Extremstellen	☐
2 Wendestellen	☐

3.33

Eine axialsymmetrische Polynomfunktion 4. Grads hat an der Stelle $x = 1$ eine lokale Minimumstelle.

- Bestimme eine weitere lokale Minimumstelle!
- Erläutere anhand einer allgemeinen Funktionsgleichung die Anzahl der möglichen Extrem- und Wendestellen!
- Der Graph der normierten Funktion ist um c ($c \in \mathbb{R}$) auf der y -Achse nach oben verschoben.
Argumentiere, welche Aussage sich zu der maximalen Anzahl der Nullstellen tätigen lässt! FA | 1.5 | 4.1 | 4.4 |

TE 3.34

Bestimme mit Technologieeinsatz

- Nullstellen,
 - lokale Extrempunkte,
 - Wendepunkte mit zugehöriger Wendetangente der Funktion f !
- Gib jeweils die Anzahl der Lösungen an! AN | 2.1 | 3.1 | 3.3 |

- $f(x) = -x^3 - 4,5x^2 + 2,35$
- $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 2$
- $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + 8x$
- $f(x) = (x - 2) \cdot (x - 1) \cdot (x + 2)$

3.35

Zeige nachweislich mithilfe der Differenzialrechnung, dass eine Polynomfunktion 4. Grads der Form $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ niemals 3 Wendestellen haben kann!

Berechne die Wendepunkte für $a = 2$, $b = -1$, $c = -3$, $d = 5$, $e = -2$!

AG | 2.3 | FA | 1.4 | 1.5 | 4.3 | 4.4 | AN | 2.1 | 3.1 |

3.3 Modellieren von Polynomfunktionen

TE

3.36 Der Graph der Polynomfunktion $f(x) = ax^2 - 4x + 1$ hat an der Stelle 1 einen Scheitelpunkt. Ermittle die Termdarstellung der Funktion f !

AN |2.1|3.3|

Ziel ist es, die Unbekannte a zu finden und die Funktionsgleichung zu vervollständigen. Dafür ist es wichtig, jene Informationen aus dem Text der Aufgabenstellung zu verwenden, die uns in Form von Bedingungen/Gleichungen aufstellen lassen.

In unserem Einstiegsbeispiel verwenden wir die Information zum Scheitelpunkt in seiner Definition als Extrempunkt. Wir denken nun „rückwärts“ und überlegen uns, wie wir Extremwerte in den vorigen (Unter-)Kapiteln bestimmt haben.

Bei den Polynomuntersuchungen haben wir $f'(x) = 0$ gesetzt, da an den Extremstellen die Tangente keine Steigung hat.

Wir leiten daher einmal ab und erhalten $f'(x) = 2ax - 4$.

Nun verwenden wir die Information der Angabe: $x = 1$ ist eine Extremstelle. Die zugehörige Bedingung lautet: $f'(1) = 0$

Wir setzen ein: $f'(1) = 2a \cdot 1 - 4 \Rightarrow 2a - 4 = 0 \Rightarrow a = 2$

Unsere gesuchte Funktionsgleichung lautet also: $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$

Zum Berechnen von unbekannten Koeffizienten der Polynomfunktion stellt man die aus der Angabe gegebenen Bedingungen in Form von „Kurzgleichungen“ auf, die i.A. zu einem Gleichungssystem (evtl. auch nur zu einer Gleichung) führen.

TE

3.37 Der Graph einer Polynomfunktion 3. Grads verläuft durch die Punkte $A(-2 | -3)$ und $B(0 | -1)$ und hat im Punkt $H(-1 | 0)$ einen Hochpunkt. Stelle die Funktionsgleichung von f auf!

FA |1.5| AN |2.1|3.3|

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d; \quad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

Es kommen 4 Variablen (a, b, c, d) vor, daher benötigen wir 4 Gleichungen.

	Kurzform	
1. Bedingung: Punkt A:	$f(-2) = -3$	$-3 = a \cdot (-2)^3 + b \cdot (-2)^2 + c \cdot (-2) + d$ $-3 = -8a + 4b - 2c + d$
2. Bedingung: Punkt B:	$f(0) = -1$	$-1 = a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d$ $-1 = d$
3. Bedingung: Punkt H:	$f(-1) = 0$	$0 = a \cdot (-1)^3 + b \cdot (-1)^2 + c \cdot (-1) + d$ $0 = -a + b - c + d$
4. Bedingung: Steigung in H:	$f'(-1) = 0$	$0 = 3a \cdot (-1)^2 + 2b \cdot (-1) + c$ $0 = 3a - 2b + c$

Die 4 Bedingungen liefern ein lineares Gleichungssystem:

$$\text{I: } -3 = -8a + 4b - 2c + d \quad \Rightarrow \quad \text{I: } -3 = -8a + 4b - 2c - 1$$

$$\text{II: } -1 = d \text{ kann man einsetzen}$$

$$\text{III: } 0 = -a + b - c + d \quad \Rightarrow \quad \text{III: } 0 = -a + b - c - 1$$

$$\text{IV: } 0 = 3a - 2b + c \quad \Rightarrow \quad \text{IV: } 0 = 3a - 2b + c$$

Variante 1: Gleichungssystem **händisch** lösen:

$$\begin{array}{lcl} \text{I:} & -3 = -8a + 4b - 2c - 1 & | + 1 \Rightarrow -2 = -8a + 4b - 2c \\ \text{II:} & 0 = -a + b - c - 1 & | + 1 \Rightarrow 1 = -a + b - c \\ \text{III:} & 0 = 3a - 2b + c & \Rightarrow 0 = 3a - 2b + c \end{array}$$

Wir lösen nun ein Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 3 Variablen. Ziel ist es, die Unbekannten der Reihe nach so weit zu eliminieren, dass nur noch eine Variable übrigbleibt, deren Wert wir bestimmen können.

Addition 2. und 3. Gleichung:

$$\begin{array}{r} 1 = -a + b - c \\ 0 = 3a - 2b + c \\ \hline 1 = 2a - b \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} +$$

1. Gleichung - 2-mal die 2. Gleichung:

$$\begin{array}{r} -2 = -8a + 4b - 2c \\ 2 = -2a + 2b - 2c \\ \hline -4 = -6a + 2b \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} -$$

Nun haben wir nur noch 2 Gleichungen übrig und berechnen

2-mal die 1. Gleichung + 2. Gleichung, damit die Unbekannte b eliminiert werden kann:

$$\begin{array}{r} 2 = 4a - 2b \\ -4 = -6a + 2b \\ \hline -2 = -2a \Rightarrow a = 1 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} +$$

Wir setzen $a = 1$ in eine der vorletzten Gleichungen ein und berechnen b :

$$1 = 2 \cdot 1 - b \Rightarrow b = 1$$

Um c zu erhalten, setzen wir sowohl a als auch b in die III. Anfangsgleichung ein:

$$0 = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 + c \Rightarrow c = -1$$

$d = -1$ kennen wir bereits und so können wir die Funktionsgleichung aufstellen:

$$f(x) = 1 \cdot x^3 + 1 \cdot x^2 + (-1) \cdot x + (-1) \Rightarrow f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$$

Variante 2: Gleichungssystem **mit Technologieeinsatz** lösen, zB mit Geogebra CAS.

Beachte, dass die allgemeine Funktionsgleichung durch einen : definiert werden muss, und vergiss nicht auf die geschwungenen Klammern { }.

Es reicht in diesem Fall, die Kurzform der Bedingungen anzugeben.

CAS	
1	$f(x) := a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ $\rightarrow f(x) := a x^3 + b x^2 + c x + d$
2	$f'(x) := \text{Ableitung}(f)$ $\rightarrow f'(x) := 3 a x^2 + 2 b x + c$
3	Löse($\{f(-2)=-3, f(0)=-1, f(-1)=0, f'(-1)=0\}, \{a,b,c,d\}$) $\rightarrow \{\{a = 1, b = 1, c = -1, d = -1\}\}$

Möglich ist es auch, die Gleichungen einzeln einzugeben und lösen zu lassen:

1	Löse($\{-3=-8a+4b-2c+d, d=-1, 0=-a+b-c+d, 0=3a-2b+c\}, \{a,b,c,d\}$)
•	$\rightarrow \{\{a = 1, b = 1, c = -1, d = -1\}\}$

TE

3.38 Der Graph einer Polynomfunktion 4. Grads verläuft durch den Punkt $P\left(-2 \mid -\frac{22}{3}\right)$, hat an der Stelle $x = 0$ eine Nullstelle und im Punkt $W\left(-3 \mid -\frac{63}{4}\right)$ einen Wendepunkt mit der Steigung 9. Ermittle die Termdarstellung der Funktion f !

FA |1.5| AN |2.1|3.3|

Lösung:

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \Rightarrow 5 \text{ Variablen} \Rightarrow 5 \text{ Gleichungen}$$

$$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$$

$$f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$$

5 Bedingungen	Kurzform	
1. Punkt P:	$f(-2) = -\frac{22}{3}$	$-\frac{22}{3} = 16a - 8b + 4c - 2d + e$
2. Nullstelle:	$f(0) = 0$	$0 = e$
3. Punkt W:	$f(-3) = -\frac{63}{4}$	$-\frac{63}{4} = 81a - 27b + 9c - 3d + e$
4. Steigung in W:	$f'(-3) = 9$	$9 = -108a + 27b - 6c + d$
5. Krümmung in W:	$f''(-3) = 0$	$0 = 108a - 18b + 2c$

Lösen mit Technologieeinsatz, zB Geogebra:

CAS	
1	$f(x) := a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$ $\rightarrow f(x) := a x^4 + b x^3 + c x^2 + d x + e$
2	$f'(x) := \text{Ableitung}(f)$ $\rightarrow f'(x) := 4 a x^3 + 3 b x^2 + 2 c x + d$
3	$f''(x) := \text{Ableitung}(f')$ $\rightarrow f''(x) := 12 a x^2 + 6 b x + 2 c$
4	Löse({f(-2)=-22/3, f(0)=0, f(-3)=-63/4, f'(-3)=9, f''(-3)=0},{a,b,c,d,e}) $\rightarrow \left\{ \left\{ a = \frac{1}{12}, b = \frac{1}{3}, c = -\frac{3}{2}, d = 0, e = 0 \right\} \right\}$

$$f(x) = \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2$$

TE 3.39

Stelle die Gleichung einer quadratischen Funktion f auf!
Der Graph von ...

FA | 1.5 | AN | 2.1|3.3|

- f verläuft durch die drei Punkte $A(-2|13)$, $B(0|1)$ und $C(2|-3)$.
- f hat an der Stelle 1 eine Nullstelle und einen Scheitelpunkt mit den Koordinaten $(-1|4)$.
- f verläuft durch den Punkt $A(2|1)$. Die Tangente, die im Punkt $B(1|4)$ an den Graphen gelegt wird, ist durch die explizite Form $y = -4x + 8$ gegeben.
- f hat die Nullstelle $N(-4|0)$. Eine Gerade an den Graphen im Punkt N schließt mit der Funktion einen Winkel von $75,964^\circ$ ein. An der Stelle -2 befindet sich ein lokales Maximum.

TE 3.40

Stelle die Gleichung einer kubischen Funktion f auf!
Der Graph von ...

FA | 1.5 | AN | 2.1|3.3|

- f hat den Hochpunkt $H\left(\frac{3}{2} \mid \frac{45}{16}\right)$ und den Tiefpunkt $T\left(3 \mid \frac{9}{4}\right)$.
- f hat im Ursprung einen Wendepunkt. Die zugehörige Wendetangente schließt mit der positiven x -Achse einen Winkel von 135° ein. An der Stelle $x = 1$ liegt ein lokales Minimum vor.
- f ist punktsymmetrisch zum Ursprung, verläuft durch den Punkt $R(-3|3)$ und hat in $T\left(2 \mid -\frac{16}{3}\right)$ einen Tiefpunkt.
- f geht durch den Punkt $P(-2|-12)$, in dem die Steigung der Funktion 1 beträgt, und hat den Wendepunkt $W(4|-18)$.

M 3.41

„Der Graph einer Polynomfunktion 4. Grads ist symmetrisch zur y-Achse und verläuft durch den Punkt $A(0|3)$ und den Wendepunkt $W(-1|0,5)$.“

Kreuze jene Abfolge von Bedingungen an, die zur obigen Beschreibung passt!

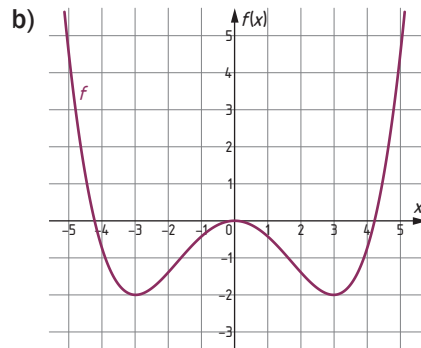
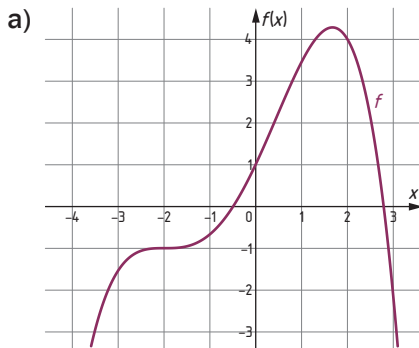
FA | 1.5 | AN | 2.1 | 3.3 |

$f(3) = 0, f(0,5) = -1, f''(-1) = 0$	☐
$f(0) = 3, f'(-1) = 0, f''(-1) = 0$	☐
$f(0) = 3, f(0,5) = -1, f'(-1) = 0$	☐
$f(0) = 3, f(-1) = 0,5, f''(-1) = 0$	☐
$f'(0) = 3, f(0,5) = -1, f''(-1) = 0,5$	☐
$f(3) = 0, f(-1) = 0,5, f''(-1) = 0$	☐

TE 3.42

Stelle durch Ablesen der notwendigen Bedingungen aus der Grafik die Gleichung der Funktion 4. Grads auf!

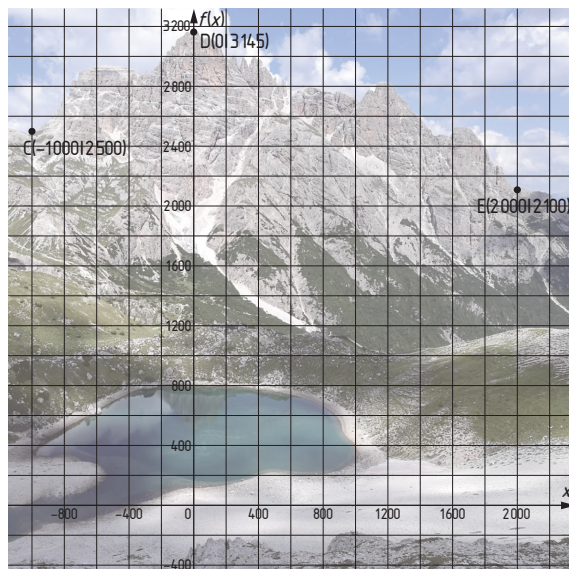
FA | 1.4 | 1.5 | 4.3 | AN | 2.1 | 3.3 |



M TE 3.43
Typ 2

Die Bergkette der 3 145 m hohen Dreischusterspitze in den Sextner-Dolomiten in Südtirol kann stark vereinfacht durch den Graphen einer quadratischen Funktion angenähert werden. Modelliere mithilfe der drei Punkte $C(-1\ 000|2\ 500)$, $D(0|3\ 145)$, $E(2\ 000|2\ 100)$ und mithilfe von Technologieinsatz eine passende Funktionsgleichung!

FA | 1.7 | AN | 2.1 | 3.3 |



3.4 Anwendungen der Kurvenuntersuchung

3.4.1 Anwendungen in der Wirtschaft

Die wichtigsten ökonomischen Funktionen beschreiben die Gesamtkosten K einer Produktion, den Erlös E , den Gewinn G , die Grenzkosten K' , die Durchschnittskosten $\bar{K}$ und den (Verkaufs-)Preis pro Mengeneinheit p .

Sie alle hängen von einer Variablen ab, nämlich von x , das ist die Produktionsmenge, die in den hier verwendeten Modellen auch gleichzeitig die Verkaufsmenge ist.

Der Zusammenhang dieser Funktionen:

$$E(x) = p(x) \cdot x; \quad \bar{K}(x) = \frac{K(x)}{x}; \quad G(x) = E(x) - K(x)$$

TE

3.44 Der Verkaufspreis einer Ware in Abhängigkeit von der Verkaufsmenge kann durch die Funktion p beschrieben werden:

$$p(x) = -0,1x^2 + 2x + 1\,249$$

x ... Verkaufsmenge in Mengeneinheiten (ME)

$p(x)$... Preis pro Mengeneinheit in Geldeinheiten pro ME (GE/ME)

Berechne den maximalen Erlös $E_{\max}$!

AG |2.3| FA |1.4|1.5|1.7|4.3| AN |2.1|3.3|

Es soll hier die Erlösfunktion untersucht werden.

Daher stellen wir sie auf und benützen hierzu die Beziehung $E(x) = p(x) \cdot x$

Es ergibt sich:

$$E(x) = -0,1x^3 + 2x^2 + 1\,249x$$

Wir können jetzt die Kurve zeichnen. Auch wenn es nicht ausdrücklich in der Aufgabenstellung verlangt wird, so ist eine grafische Darstellung immer sehr zu empfehlen.

Von dieser Funktion ist der Hochpunkt gesucht.

Wir bilden die erste Ableitung:

$$E'(x) = -0,3x^2 + 4x + 1\,249$$

Die Ableitungsfunktion wird null gesetzt:

$$-0,3x^2 + 4x + 1\,249 = 0$$

Mit der großen Lösungsformel für quadratische Gleichungen oder mithilfe von einem Gleichungslöser erhalten wir:

$$x = 71,534... \approx 71,53 \text{ ME}$$

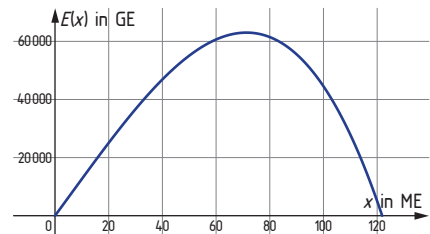
Die 2. Ableitung: $E''(x) = -0,6x + 4$ soll das Maximum bestätigen.

Die Lösung einsetzen: $E''(71,53) < 0$, bestätigt das Maximum

Die Lösung wird nun noch in die Erlösfunktion E eingesetzt:

$$E(71,534...) = -0,1 \cdot 71,534...^3 + 2 \cdot 71,534...^2 + 1\,249 \cdot 71,534...$$

Maximaler Erlös: $E_{\max} = 62\,975,44 \text{ GE}$



TE

3.45 Eine bestimmte Kaffeemaschine wird derzeit im Handel um 450 € verkauft. Die Kosten für die Produktion der Kaffeemaschine werden durch die Funktion $K(x) = x^3 - 23x^2 + 200x + 1\,000$ beschrieben.

x ... Produktionsmenge in Mengeneinheiten (ME)

$K(x)$ gesamte Kosten der Produktion von x ME in Geldeinheiten (GE)

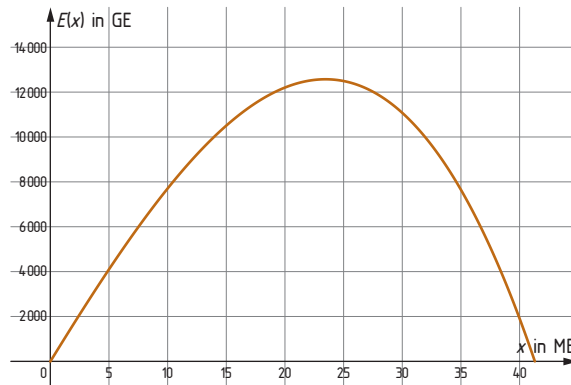
Berechne den maximalen Gewinn!

AG |2.3| FA |1.4|1.5|1.7|4.3| AN |2.1|3.3|

TE 3.46

Der Erlös in Geldeinheiten (GE) eines Produkts in Abhängigkeit von der Verkaufsmenge in Stück kann durch die Funktion E beschrieben werden:

$$E(x) = -0,4x^3 - 4x^2 + 850x$$



Kreuze die beiden zutreffenden Aussagen an!

FA | 1.4 | 1.5 | 1.7 | 4.3 | AN | 2.1 | 3.4 |

Bei einer Produktion von ca. 24 ME wird ein maximaler Erlös erzielt.	☐
Für den Verkaufspreis p gilt: $p(x) = -1,2x^2 - 8x + 850$.	☐
Der Verkaufspreis vergrößert sich mit steigender Verkaufsmenge.	☐
Der Erlös verringert sich mit steigender Verkaufsmenge.	☐
Für den Verkauf von 15 ME wird der gleiche Erlös erwartet wie für 35 ME.	☐

TE 3.47

Die Kostenfunktion bei der Erzeugung eines bestimmten Produkts kann mit der Polynomfunktion 3. Grads beschrieben werden:

$$K(x) = 0,4x^3 - 1,2x^2 + 30x + 600.$$

x ... Produktionsmenge in Mengeneinheiten (ME)

$K(x)$... gesamte Kosten der Produktion von x ME in Geldeinheiten (GE)

Berechne die minimalen Durchschnittskosten $\bar{K}_{\min}$!

FA | 1.4 | 1.5 | 1.7 | AN | 2.1 | 3.3 |

TE 3.48

Ein Möbelhaus kauft von einer Produktionsstätte im Ausland pro Jahr etwa 30 000 Türen für Kleiderschränke um je 45 €. Es fallen Transportkosten von 90 € pro Lieferung an.

Es erfolgen gleichmäßig über das Jahr verteilt n Lieferungen zu je x Stück.

Die letzte Lieferung muss zwischengelagert werden.

Dafür sind 1,20 € je Stück zusätzlich zu bezahlen.



Berechne die Anzahl n der Lieferungen, die das Möbelhaus veranlassen muss, damit die Gesamtkosten K möglichst gering bleiben!

FA | 1.4 | 1.5 | 1.7 | 1.8 | AN | 2.1 | 3.3 |

3.4.2 Anwendung bei Bewegungsaufgaben

Weg s , Geschwindigkeit v und Beschleunigung a einer Bewegung hängen von der Variablen t ab und stehen miteinander im Zusammenhang:

$$v(t) = s'(t); a(t) = v'(t) = s''(t)$$

Es sind hier die internationalen Einheiten (SI) zu beachten: m/s für v , m/s² für a
In der Praxis kommen km/h und km/h² häufig vor.

- M 3.49** Die Weg-Zeit-Funktion eines Rennautos auf einer Test-Rundfahrt kann annähernd durch die Funktion s beschrieben werden

$$s(t) = \frac{t^4}{14\,000} - \frac{t^3}{28} + 2,5t^2 \text{ für } 0 \leq t \leq 84$$

t ... Zeit in s; $s(t)$... zurückgelegter Weg in m nach t in s.

- Berechne, wann das Auto mit höchster Geschwindigkeit fährt!
- Berechne die momentane Geschwindigkeit zu diesem Zeitpunkt in km/h!
- Berechne, mit welcher Beschleunigung das Auto startet!

AG | 2.3 | FA | 1.4 | 1.5 | 1.7 | 4.3 | AN | 1.3 | 2.1 | 3.1 | 3.3 |

- a) Zunächst erstellt man die Ableitungsfunktionen:

$$v(t) = s'(t) = \frac{t^3}{3\,500} - \frac{3t^2}{28} + 5t; a(t) = s''(t) = \frac{3t^2}{3\,500} - \frac{3t}{14} + 5$$

Nun soll die Extremstelle der Geschwindigkeitsfunktion berechnet werden:

$$v'(t) = 0 \text{ bedeutet } s''(t) = 0$$

$$\frac{3t^2}{3\,500} - \frac{3t}{14} + 5 = 0 \Rightarrow t_1 = 26,05...; (t_2 = 223,95 \dots \text{ nicht relevant, da } > 84)$$

$$s'''(t) = \frac{6t}{3\,500} - \frac{3}{14}; s'''(26,047...) = -0,169 < 0 \dots \text{Maximum}$$

Die höchste Geschwindigkeit erreicht das Auto ca. 26 Sekunden nach dem Start.

- $v(26,047...) = 62,593... \text{ m/s} \approx 225,34 \text{ km/h}$
Die höchste Geschwindigkeit beträgt auf dieser Runde ca. 225,34 km/h.
- $a(t) = s''(t) \Rightarrow a(0) = 5$
Zu Beginn beträgt die Beschleunigung des Autos 5 m/s².

M 3.50
Typ 2

Die Weg-Zeit-Funktion einer Schwimmerin beim Training in einem Becken kann näherungsweise mit der Funktion s beschrieben werden:

$$s(t) = 0,003t^4 - 0,12t^3 + 1,2t^2 \text{ mit } 0 \leq t \leq 20$$

t ... Zeit in s; $s(t)$... Weg in m zum Zeitpunkt t

- Berechne und interpretiere die Nullstellen von s !
- Berechne den Zeitpunkt, wann die Schwimmerin in diesem Zeitintervall die höchste Geschwindigkeit hat!
- Berechne die momentane Beschleunigung in der 10. Sekunde!

AG | 2.3 | FA | 1.4 | 1.5 | 1.7 | 4.3 | AN | 1.3 | 2.1 | 3.1 | 3.3 |

M 3.51
Typ 2

Die Weg-Zeit-Funktion eines Läufers auf seiner Laufrunde kann mit der Funktion s modelliert werden:

$$s(t) = -20t^3 + 140t^2 \text{ mit } 0 \leq t \leq 7$$

t ... Zeit in min; $s(t)$... zurückgelegter Weg in m zum Zeitpunkt t

- Berechne die höchste erreichte Geschwindigkeit in dem gegebenen Intervall!
- Berechne die momentane Beschleunigung zu Beginn des Trainingslaufs!
- Ermittle den Zeitpunkt, zu dem die Beschleunigung -160 m/min^2 beträgt!
Interpretiere das negative Vorzeichen im Sachzusammenhang!

AG | 2.2 | FA | 1.4 | 1.5 | 1.7 | 4.3 | AN | 1.3 | 2.1 | 3.1 | 3.3 |

3.4.3 Extremwertaufgaben

Bei Extremwertaufgaben stehen hauptsächlich Situationen im Mittelpunkt, bei denen Prozesse optimiert werden sollen, dh möglichst geringer Materialaufwand, Energiekosten, maximale Leistung, Kraft usw. Man nennt sie deshalb auch **Optimierungsaufgaben**.

Wie der Name schon verrät, werden Extremwerte mithilfe der 1. Ableitung ermittelt. Bei den Extremwertaufgaben behandeln wir einerseits Aufgaben, bei denen von vornherein nur eine Variable vorkommt, oder es handelt sich um Aufgaben mit zwei oder mehreren Variablen, die man zuerst durch Nebenbedingungen auf eine Gleichung mit einer Variablen umformen muss.

Es ist sinnvoll, wenn du beim Lösen von Extremwertaufgaben eine strikte Reihenfolge einhältst:

1. Fertige eine Skizze an!
2. Stelle die **Hauptbedingung** in Form einer **Zielfunktion** auf (was soll optimiert werden?)!
3. Formuliere eine **Nebenbedingung**!
4. Setze die umgeformte Nebenbedingung in die Zielfunktion ein, so dass diese nur eine Variable enthält!
5. Bestimme die 1. Ableitung der Zielfunktion!
6. Setze die 1. Ableitung null und berechne den Extremwert!
7. Überprüfe mit der 2. Ableitung, ob tatsächlich ein Minimum/Maximum vorliegt!
8. Berechne alle weiteren Größen!

3.52 Eine rechteckige Tischplatte hat einen Umfang von 448 cm.
Berechne ihre Länge und Breite so, dass der Flächeninhalt maximal wird!

AG | 2.2 | FA | 1.4 | 1.5 | 1.8 | AN | 2.1 | 3.4 |

In der Geometrie hat man es meistens mit zwei oder mehreren Variablen zu tun. Die Nebenbedingung findet man im Allgemeinen über die Formeln der elementaren Geometrie.

Als Erstes fragen wir: Was wird gesucht? Hinweise dazu geben meistens die Worte maximal/minimal, am größten/kleinsten, möglichst viel/wenig usw.

In unserem Fall: Der Flächeninhalt (eines Rechtecks) soll maximal werden. Daher wird der Flächeninhalt die Hauptbedingung liefern und der Umfang (**direkte Angabe**) wird unsere Nebenbedingung sein.

1. Wir beginnen mit der Skizze:



2. Zielfunktion: $A(a, b) = a \cdot b \rightarrow \text{Maximum}$

Wie man sieht, ist die Zielfunktion von zwei Variablen abhängig, nämlich von a und b . Wir werden mithilfe der Nebenbedingung eine Umformung anstreben, sodass nur noch eine Variable übrigbleibt. Da beide Variablen gleichwertig sind, bleibt es deinen persönlichen Vorlieben überlassen, welche Variable du im nächsten Schritt eliminiertest.

3. Nebenbedingung aufstellen und umformen:

$$\begin{aligned} U(a, b) = 2 \cdot (a + b) &\Rightarrow 448 = 2 \cdot (a + b) & | : 2 \\ 224 &= a + b & | - b \\ a &= 224 - b \end{aligned}$$

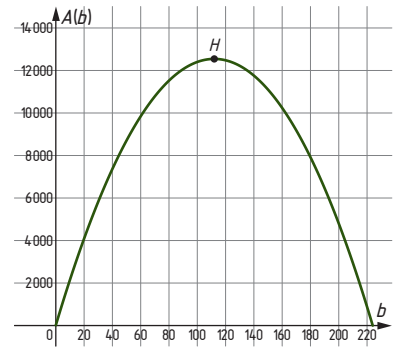
Du hättest hier auch nach b umformen können.

4. Nebenbedingung in die Zielfunktion einsetzen (Elimination der zweiten Variablen):

$$A(b) = (224 - b) \cdot b$$

Wie du siehst, enthält unsere Funktion nun nur noch die Variable b , die Funktion A ist also von b abhängig.

Beachte hier die Schreibweise $A(b)$ statt $A(a, b)$! Die grafische Darstellung lässt bereits erkennen, wo der Extremwert liegt.



5. 1. Ableitung:

$$A(b) = (224 - b) \cdot b = 224b - b^2$$

$$A'(b) = 224 - 2b$$

6. 1. Ableitung = 0 und Berechnung des Extremwerts:

$$\begin{array}{rcl} A'(b) = 0 & \Rightarrow & 224 - 2b = 0 \quad | + 2b \\ & & 224 = 2b \quad | : 2 \\ & & b = 112 \text{ cm} \end{array}$$

7. 2. Ableitung:

$$A''(b) = -2 < 0 \Rightarrow \text{Maximum erfüllt}$$

8. Alle weiteren Größen berechnen:

$$224 - b = a \Rightarrow a = 224 - 112 \Rightarrow a = 112 \text{ cm}$$

$$A = a \cdot b \Rightarrow A = 112 \cdot 112 = 12\,544 \text{ cm}^2$$

Eine rechteckige Tischplatte hat also dann den größtmöglichen Flächeninhalt bei gegebenem Umfang von 448 cm, wenn sie quadratisch mit einer Seitenlänge von 112 cm ist.

TE 3.53

Eine Firma stellt Glasvasen in der Form von Zylinder mit einem Fassungsvermögen von 3 ℓ her.

Berechne seine Abmessungen so, dass bei der Herstellung möglichst wenig Material verbraucht wird!

FA | 1.4|1.7|1.8| AN | 2.1|3.4|

TE 3.54

Das Volumen einer handelsüblichen Konservendose fasst 0,45 ℓ. Da bei der Produktion Boden, Deckel und der Mantel miteinander verbunden werden, muss für den sogenannten Falz mehr Material einkalkuliert werden. In der Höhe kommt daher 1 cm dazu und im Durchmesser 1,5 cm.

Berechne jene Abmessungen, die den geringsten Materialverbrauch bei der Herstellung garantieren!

FA | 1.4|1.7|1.8| AN | 2.1|3.4|

TE

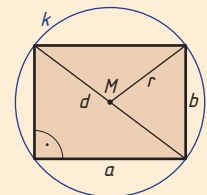
- 3.55 Ein runder Spiegel mit dem Durchmesser $d = 1,5$ m ist beim Transport beschädigt worden. Um ihn dennoch verkaufen zu können, wird sein Design verändert und eine möglichst große rechteckige Fläche ausgeschnitten. Ermittle die Maße der rechteckigen Spiegelfläche!

FA | 1.4|1.7|1.8| AN | 2.1|3.4|

Lösung mithilfe des **Satzes von Pythagoras**:

1. Skizze:

2. Hauptbedingung: $A(a, b) = a \cdot b \rightarrow \text{Maximum}$



3. Nebenbedingung:

Wir müssen nun eine Formel für die Nebenbedingung finden, die den Durchmesser des Kreises enthält. Wie aus der Skizze zu entnehmen ist, entsteht ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse d und den Katheten a und b .

Dementsprechend ergibt sich als Nebenbedingung:

$$d^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow d^2 - a^2 = b^2 \Rightarrow b = \sqrt{d^2 - a^2}$$

4. Nebenbedingung in die Hauptfunktion einsetzen:

$$A(a) = a \cdot \sqrt{d^2 - a^2} = a \cdot \sqrt{1,5^2 - a^2}$$

5. 1. Ableitung:

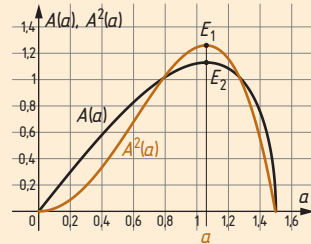
In diesem Fall ist es sinnvoller, $A(a)$ zu quadrieren.

Der lokale Extremwert ändert sich dadurch nicht.

Wir nennen die neue Hauptfunktion

$$\begin{aligned} f(a) &= A^2(a) = a^2 \cdot (d^2 - a^2) \\ &= a^2 \cdot (1,5^2 - a^2) = 2,25a^2 - a^4 \end{aligned}$$

$$f'(a) = 4,5a - 4a^3$$



6. 1. Ableitung = 0 und Berechnung des Extremwerts:

$$4,5a - 4a^3 = 0 \Rightarrow a_1 = 0 \text{ m}, a_2 = -\frac{\sqrt{4,5}}{2} \approx -1,06 \text{ m}, a_3 = \frac{\sqrt{4,5}}{2} \approx 1,06 \text{ m}$$

(Die Längen 0 und $-1,06$ werden ausgeschlossen, da sie in der Realität nicht vorkommen.)

7. 2. Ableitung:

$$f''(a) = 4,5 - 12a^2, f''\left(\frac{\sqrt{4,5}}{2}\right) = 4,5 - 12\left(\frac{\sqrt{4,5}}{2}\right)^2 = -9 < 0$$

→ Maximum erfüllt

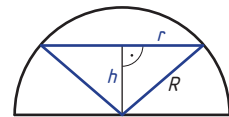
8. Alle weiteren Größen berechnen:

$$b = \sqrt{1,5^2 - \left(\frac{\sqrt{4,5}}{2}\right)^2} = 1,06 \text{ m}$$

TE 3.56

Einer Halbkugel mit dem Radius $R = 2$ dm ist jener volumsgrößte Drehkegel so einzuschreiben, dass dessen Spitze im Mittelpunkt der Halbkugel liegt.

Berechne das Volumen des Kegels! FA | 1.4 | 1.7 | 1.8 | AN | 2.1 | 3.4 |



TE 3.57

Einer Kugel mit dem Radius R soll ein Zylinder mit maximalem Volumen eingeschrieben werden.

Berechne die Größen r und h des Zylinders!

FA | 1.4 | 1.7 | 1.8 | AN | 2.1 | 3.4 |

TE 3.58

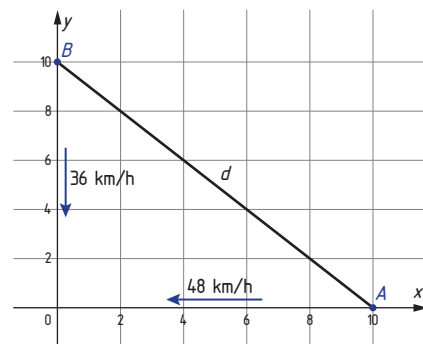
Auf einer Kreuzung treffen 2 Straßen im rechten Winkel aufeinander. 2 Mopeds fahren zur gleichen Zeit auf die Kreuzung zu und sind zu Beginn jeweils 10 km von der Kreuzung entfernt. Die Geschwindigkeiten betragen 48 km/h bzw. 36 km/h.

Berechne, wie lange es dauert, bis sie einen minimalen Abstand (in Luftlinie) voneinander haben!

Wie groß ist dieser Abstand?

Hinweis: Die Skizze zeigt die

Ausgangspositionen. FA | 1.4 | 1.7 | 1.8 | AN | 2.1 | 3.4 |



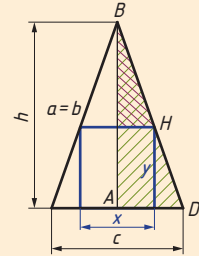
TE

- 3.59** Ein Vogelhäuschen hat den Querschnitt eines gleichschenkeligen Dreiecks mit der Schenkellänge $a = b = 45$ cm und der Basis $c = 30$ cm, in der eine rechteckige Öffnung eingeschrieben ist. Bestimme die Maße dieser Öffnung so, dass die Vögel eine möglichst große Fläche zum Hineinfliegen haben!

AG |2.2| FA |1.4|1.7|1.8| AN |2.1|3.4|

Lösung mithilfe des **Strahlensatzes**:

- Wir beginnen mit der Skizze.
- Hauptbedingung: Gesucht ist der Flächeninhalt des Rechtecks, also ist die Zielfunktion $A(x, y) = x \cdot y$
- Nebenbedingung: Für die Nebenbedingung verwenden wir den Strahlensatz. Wie man in der Abbildung sieht, sind zwei ähnliche rechtwinkelige Dreiecke farblich hinterlegt bzw. schraffiert.



$$\text{Es gilt: } (h - y) : \frac{x}{2} = h : \frac{c}{2}$$

Aus der Angabe können wir die Werte für h und $\frac{c}{2}$ bestimmen.

$$a^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = a^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2, h = \sqrt{45^2 - 15^2} = \sqrt{1800}$$

$$\text{Es gilt also: } (\sqrt{1800} - y) : \frac{x}{2} = \sqrt{1800} : 15$$

$$\text{Wir lösen auf und formen nach } \frac{x}{2} \text{ um: } (\sqrt{1800} - y) \cdot 15 = \frac{x}{2} \cdot \sqrt{1800}$$

$$\frac{x}{2} = \frac{(\sqrt{1800} - y) \cdot 15}{\sqrt{1800}} \Rightarrow x = \frac{(\sqrt{1800} - y) \cdot 30}{\sqrt{1800}}$$

- Nebenbedingung in die Hauptfunktion einsetzen:

$$A(y) = \frac{(\sqrt{1800} - y) \cdot 30}{\sqrt{1800}} \cdot y = 30y - \frac{30y^2}{\sqrt{1800}} = 30y - y^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

1. Ableitung: $A'(y) = 30 - y \cdot \sqrt{2}$
1. Ableitung = 0 und Berechnung des Extremwerts:
 $30 - y \cdot \sqrt{2} = 0 \Rightarrow y = 15 \cdot \sqrt{2} \approx 21,21$ cm
2. Ableitung: $A''(y) = -\sqrt{2} < 0 \rightarrow$ Maximum erfüllt
- Alle weiteren Größen berechnen: $x = \frac{(\sqrt{1800} - 15 \cdot \sqrt{2}) \cdot 30}{\sqrt{1800}} = 15$ cm

TE 3.60

Einem gleichschenkeligen Dreieck mit der Basis $c = 12$ cm und Höhe $h = 20$ cm ist

- ein flächengrößtes Rechteck eingeschrieben.
- ein gleichschenkeliges Dreieck mit maximalem Flächeninhalt so eingeschrieben, dass seine Spitze im Mittelpunkt der Basis c liegt.

Berechne die Seitenlänge $a = b$ und den gesuchten maximalen Flächeninhalt!

AG |2.2| FA |1.4|1.7|1.8| AN |2.1|3.4|

TE 3.61

Einem Drehkegel mit Radius R und Höhe H ist ...

- ein Zylinder mit größtmöglicher Mantelfläche eingeschrieben.
- ein Kegel eingeschrieben, der seine Spitze im Mittelpunkt des Basiskreises des umschriebenen Drehkegels hat und dessen Volumen maximal sein soll.

Berechne die Abmessungen der eingeschriebenen Körper! FA |1.4|1.7|1.8| AN |2.1|3.4|

Zusammenfassung

Monotonie:

Eine reelle Funktion f ist

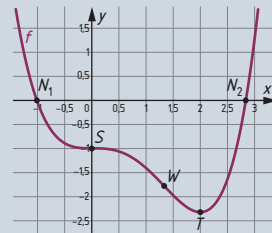
streng monoton steigend ,	streng monoton fallend ,	konstant ,
wenn für alle $x_1, x_2 \in M$ gilt: $f'(x) > 0 \forall x \in [x_1; x_2]$	wenn für alle $x_1, x_2 \in M$ gilt: $f'(x) < 0 \forall x \in [x_1; x_2]$	wenn für alle $x_1, x_2 \in M$ gilt: $f'(x) = 0 \forall x \in [x_1; x_2]$

Krümmungsverhalten:

negativ gekrümmt (rechtsgekrümmt, konkav)	positiv gekrümmt (linksgekrümmt, konvex)	nicht gekrümmt
$f'' < 0$ f' ist in M streng monoton fallend	$f'' > 0$ f' ist in M streng monoton steigend	$f'' = 0$ Wendepunkt

Besondere Punkte/Stellen:

Nullstelle	$f(x) = 0$	
Extremwert	$f'(x) = 0$	Hochpunkt: $f''(x) < 0$ Tiefpunkt: $f''(x) > 0$
Wendestelle	$f''(x) = 0$	$f'''(x) \neq 0$
Sattelstelle	$f''(x) = 0$	$f'(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$



Eine Polynomfunktion n -ten Grads hat **höchstens**

- n Nullstellen
- $n - 1$ Extremstellen
- $n - 2$ Wendestellen

Mit jeder Ableitung verringert sich der Grad der Polynomfunktion um 1.

Umkehraufgaben: Beim Auffinden von Polynomfunktionen der Form

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ werden Bedingungen aus dem Aufgabentext festgelegt und in Gleichungen dargestellt. Durch das Lösen eines linearen Gleichungssystems werden die Koeffizienten $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$ ermittelt und die Funktionsgleichung vervollständigt.

Die Differenzialrechnung findet nicht nur in Naturwissenschaften, Medizin und Technik Anwendung, sondern auch in Optimierungsaufgaben (Extremwertaufgaben), die einem strikten Schema folgen:

1. Skizze
2. Hauptfunktion
3. Nebenbedingung
4. Einsetzen der Nebenbedingung in die Hauptfunktion $\rightarrow$ Elimination einer Variablen
5. 1. Ableitung der Hauptfunktion
6. Berechnen der Extremwerte
7. 2. Ableitung zur Kontrolle des Minimums/Maximums
8. Berechnen weiterer Größen

3 Untersuchung von Polynomfunktionen

Vermischte Aufgaben zur Vorbereitung auf die Reifeprüfung

M TE 3.62
Typ 2

Ein Unternehmen produziert Tablets Typ A und Typ B. x ... Anzahl der Tablets

- a) Der Betrieb rechnet bei Typ A mit monatlichen Fixkosten von 750 €. Bei der Herstellung von 2 Tablets betragen die Gesamtkosten 1.250 €, bei 5 Tablets 2.360 € und bei 8 Tablets 3.950 €.

Bestimme die Kostenfunktion der Form $K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$!

- b) Ein Tablet von Typ B wird um 840 € verkauft. Die Kostenfunktion beträgt:

$$K(x) = \frac{1}{3} \cdot (x^3 + 65x^2 + 616x + 2\,250)$$

Berechne jene Anzahl an Tablets, für die der Gewinn maximal wird!

Ermittle jene Produktionsmengen, bei denen die Gesamtkosten den Erlös übersteigen! (Tipp: Bereiche, in denen kein Gewinn gemacht wird)

FA | 1.5 | 1.6 | 1.7 | 1.8 | AN | 2.1 | 3.3 |

M TE 3.63
Typ 2

Ein Bio-Eisgeschäft startet im März mit der Eröffnung seines Verkaufsladens. Der Inhaber weiß aus Erfahrung, dass der Verkauf der Eissorten in der kommenden Saison durch die Funktion $m(t) = -0,0035t^3 + 0,6t^2 + 46t$ angenähert werden kann. t ... Zeit in Tagen; $m(t)$... Anzahl der verkauften Eiskugeln

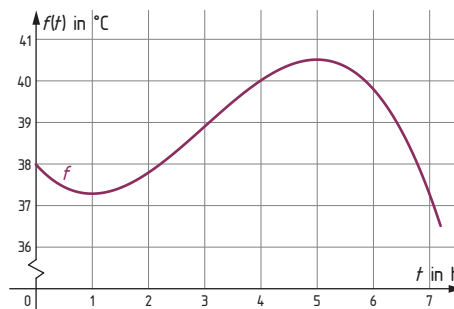
- a) Berechne die Anzahl der verkauften Eiskugeln am 100. Tag!
Stelle den Term für die durchschnittliche Zunahme der verkauften Eiskugeln in den ersten 100 Tagen auf! Gib den Wert an!
Interpretiere den Ausdruck $m'(100)$ im vorgegebenen Kontext!
- b) Ermittle jenen Tag, an dem die meisten Kugeln verkauft werden und gib die Menge an!
Begründe, warum die Verkaufszahlen ab dem Maximum weniger werden!
- c) Bestimme jenen Tag, an dem die Zunahme der täglichen Verkaufszahlen und damit die zusätzlich benötigte Eismenge am größten ist!

FA | 1.5 | 1.6 | 1.7 | 1.8 | AN | 1.2 | 2.1 | 3.3 |

M TE 3.64
Typ 2

Die Funktion f , die den Fieberverlauf eines Kleinkindes innerhalb von etwa 7 Stunden in °C beschreibt, wird durch die Funktionsgleichung $f(t) = -0,1t^3 + 0,9t^2 - 1,5t + 38$ modelliert.

Der zugehörige Graph ist abgebildet.



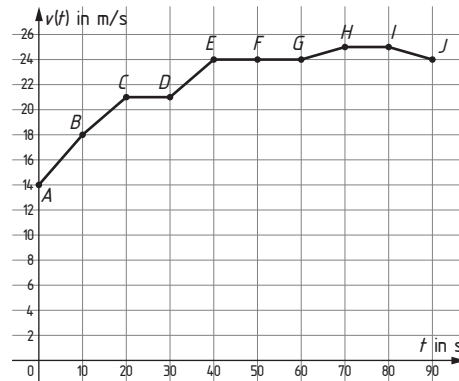
- a) Interpretiere die Grafik hinsichtlich der folgenden Fragen:
- Wie hoch ist die Temperatur zu Beginn der Messung?
 - Zu welchem Zeitpunkt hat das Kind die höchste Temperatur?
 - Nach welcher Zeit ist die Temperatur auf 37 °C gesunken?
- b) Berechne die ersten beiden Ableitungsfunktionen!
Interpretiere $f'(1)$ in diesem Sachzusammenhang!
Berechne und interpretiere den Ausdruck $f''(5)$ in Bezug auf den Fieberverlauf!
- c) Bestimme jenen Zeitpunkt, an dem das Fieber am meisten gestiegen ist!

FA | 1.5 | 1.6 | 1.7 | 1.8 | AN | 2.1 | 3.3 |

Auf einer Eisenbahnstrecke wurden auf einer Messstrecke im Abstand von 10 Sekunden folgende Geschwindigkeiten in m/s eines Zuges gemessen:

Zeit in s	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
Geschwindigkeit in m/s	14	18	21	21	24	24	24	25	25	24

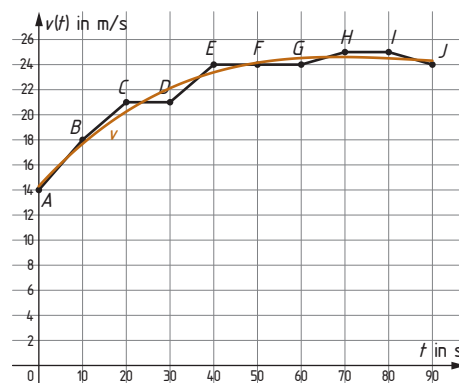
Der Streckenzug, der die verschiedenen Geschwindigkeiten angibt, ist unten dargestellt.



a) Kreuze die beiden zutreffenden Aussagen an!

Die Beschleunigung in den ersten 20 Sekunden ist annähernd konstant.	☐
Der Zug bremst 1-mal innerhalb von 90 Sekunden.	☐
Ab der 60. Sekunde beschleunigt der Zug nicht mehr.	☐
Die Beschleunigung in den ersten 10 Sekunden ist kleiner als in den letzten 10 Sekunden.	☐
Die Durchschnittsgeschwindigkeit beträgt 75 km/h.	☐

b) Der Streckenzug kann durch eine Polynomfunktion 3. Grads angenähert werden. Bestimme die Funktionsgleichung mithilfe von Technologieeinsatz!



c) Die Funktion $v(t) = 0,00002t^3 - 0,00457t^2 + 0,38265t + 14,3007$ stellt die Geschwindigkeitsfunktion eines weiteren Streckenabschnitts dar. Bestimme die Größe der Beschleunigung zum Zeitpunkt $t = 80$ s!

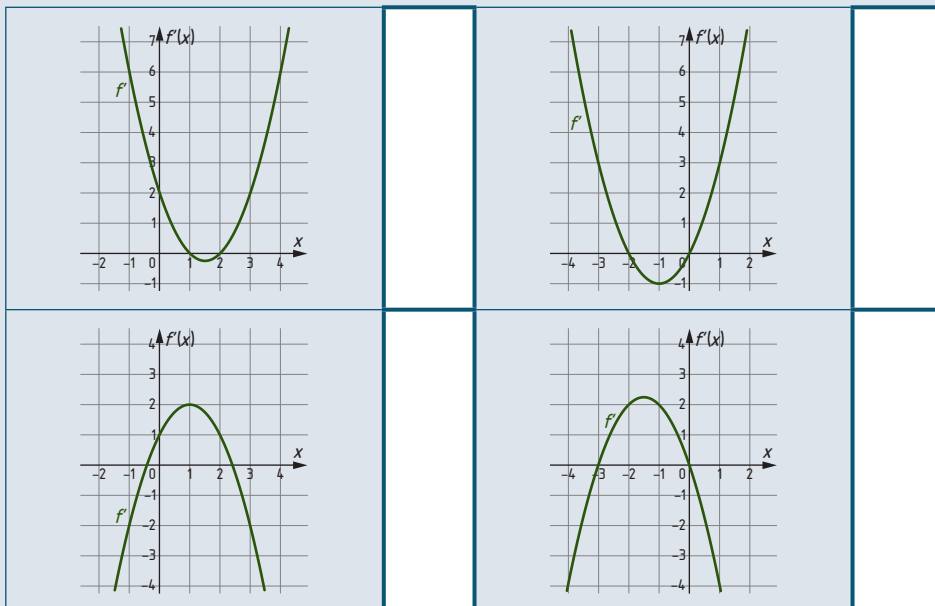
Interpretiere den Ausdruck $\frac{v(60) - v(0)}{60}$ in diesem Zusammenhang!

FA |1.5|1.6|1.7|1.8| AN |1.2|2.1|3.3|

Wissens-Check

Bearbeite die Aufgaben! **Begründe** jeweils deine Auswahl!

- 1 Ordne den Graphen der ersten Ableitung f' jeweils die Wendestelle x_W der Funktion f aus A bis F zu!



A	$x_W = -1$	B	$x_W = -1,5$
C	$x_W = 1,5$	D	$x_W = 0$
E	$x_W = 1$	F	$x_W = -2$

- 2 a) Ergänze die Textlücken durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine korrekte Aussage entsteht!

Wenn _____ ① _____ und _____ ② _____, dann ist x eine lokale Minimumstelle.

①	
$f'(x) > 0$	☐
$f'(x) < 0$	☐
$f'(x) = 0$	☐

②	
$f''(x) = 0$	☐
$f''(x) > 0$	☐
$f''(x) < 0$	☐

- b) Ergänze die Textlücken jeweils durch einen der folgenden Begriffe: Hochpunkt, Tiefpunkt, Wendepunkt.

Wenn $f'(x) = 0$, $f''(x) > 0$ dann liegt ein _____ vor.

Wenn $f'(x) < 0$, $f''(x) = 0$ und $f'''(x) > 0$, dann liegt ein _____ vor.

Wenn $f'(x) = 0$ und $f''(x) < 0$ dann liegt ein _____ vor.

Wissens-Check

- 3 Der Graph einer Polynomfunktion 3. Grads verläuft durch den Ursprung, hat den Tiefpunkt $T(1|-2)$ und eine Wendestelle bei $x = -\frac{2}{3}$.

Kreuze die beiden zutreffenden Bedingungen an!

$f'(1) = -2$	☐	$f'(-\frac{2}{3}) = 0$	☐	$f''(0) = 0$	☐
$f''(-\frac{2}{3}) = 0$	☐	$f'(1) = 0$	☐		

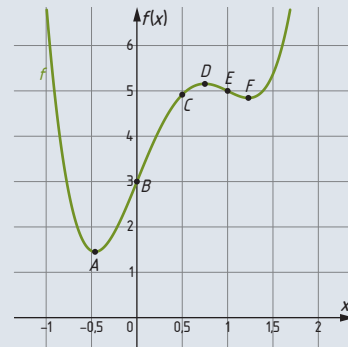
- 4 Eine Kugel wird mit einem Winkel von 37° aus einer Höhe von 1,65 m abgeworfen und erreicht eine Weite von 19,33 m.

Gib 3 Bedingungen in Kurzform an, damit man die Gleichung der Wurfparabel ($h(x) = ax^2 + bx + c$... Wurfhöhe von x abhängig) berechnen kann!

_____ = _____; _____ = _____; _____ = _____

- 5 Kreuze jenen Punkt des Graphen an, auf den die Bedingungen $f(x) > 0$, $f'(x) < 0$ und $f''(x) = 0$ zutreffen!

A	☐	B	☐
C	☐	D	☐
E	☐	F	☐



- 6 Ein Boot macht eine Rundfahrt ohne Zwischenstopp. Die momentane Geschwindigkeit lässt sich zu jedem Zeitpunkt mit der Funktion $v(t) = -630t^3 + 390t^2 + 5t$ beschreiben. t ... Zeit in h; v ... Geschwindigkeit in km/h

Kreuze die richtige Aussage an!

Die Beschleunigung auf der gesamten Strecke ist positiv.	☐
Die Beschleunigung ist konstant.	☐
Die Beschleunigung ist zum Zeitpunkt $t \approx 0,2$ h am größten.	☐
Die größte Geschwindigkeit beträgt 10 km/h.	☐
Die Beschleunigung beim Start beträgt 5 m/s^2 .	☐
Die gesamte Rundfahrt dauert 2 Stunden.	☐

Lösung:
 1. 1. Zeile: C, A; 2. Zeile: E, B
 2. 2. Zeile: 1. und 2. Spalte
 3. 3. Zeile, 1. Spalte
 4. $h(0) = 1,65$; $h(19,33) = 0$; $h'(0) = \tan(37^\circ)$
 5. 3. Zeile, 1. Spalte
 6. 3. Zeile