

Lehrplan
2027

WALLINGER
SCHMÖGER
PIRKOPF
HÖTZEL

MATHE 5 *Trail*

AHS

Leseprobe

+CLIL

Kapitel 1

Mengen und Aussagen

Wer an Mathematik denkt, hat meist komplizierte Formeln und lange Rechnungen vor Augen. Doch das wahre Fundament dieser Wissenschaft ist überraschend einfach. Es basiert auf zwei Fähigkeiten, die wir jeden Tag ganz unbewusst nutzen: Dinge nach gemeinsamen Eigenschaften zu ordnen und aus Fakten die richtigen Schlüsse zu ziehen. Willkommen in der Welt der Mengenlehre und Aussagenlogik – dem unsichtbaren Regiebuch unseres Denkens.

Wir bewegen uns ständig in mathematischen Strukturen, egal ob beim Sortieren von Playlists, dem Packen des Koffers oder beim Verhandeln über die Freizeitgestaltung: Die Mengenlehre bringt Ordnung in dieses Chaos. Sie fasst Objekte zusammen, vergleicht sie und ordnet sie ein. Die Aussagenlogik prüft, wann ein Satz wahr oder falsch ist und wo die Denkfalle lauert. Sie liefert also die Spielregeln für eine messerscharfe Argumentation.

Die Gesetze der Mengenlehre und Aussagenlogik schärfen den Blick für Argumente im Alltag, schützen vor Denkfehlern in Debatten und bilden das Fundament jeder modernen Computersprache. Dieses Kapitel zeigt, wie aus alltäglichen Überlegungen eine präzise Sprache wird.



Grundkompetenzen

AG-L 1.3 Mit Aussagen und Mengen umgehen können

Lernziele

Formale Sprache der Mathematik beherrschen und anwenden können

Mengen beschreiben, vergleichen und verknüpfen können

Beziehungen zwischen Mengen und Aussagen kennen und verständlich einsetzen können

Mathematische Aussagen formulieren und verständlich anwenden können

Arbeiten mit grundlegenden Begriffen über Aussagen und mit logischen Operationen („und“, „oder“, „wenn ..., dann“, „genau dann ..., wenn“, „nicht“)

1.1 Mengen

Georg Cantor (1845–1918) war ein deutscher Mathematiker, der in St. Petersburg (Russland) geboren wurde. Nach seinem Schulabschluss studierte er an den Universitäten Zürich, Göttingen und Berlin, promovierte 1867 und arbeitete bis zu seinem Lebensende an der Universität Halle. Er ist der Begründer der Mengenlehre.



Eine **Menge** ist eine Zusammenfassung von bestimmten unterscheidbaren Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.

Die Objekte einer Menge werden **Elemente** genannt.

Mengen werden meist mit Großbuchstaben bezeichnet, Elemente mit Kleinbuchstaben. Elemente können entweder in einer Menge enthalten sein oder nicht. Die Elemente, die in einer Menge enthalten sind, werden in geschweiften Klammern { bzw. } angeführt. Es gibt keine Ordnung innerhalb einer Menge.

Mengen darstellen und veranschaulichen

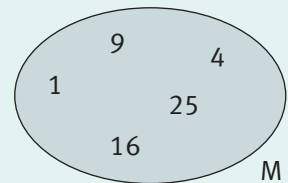
Venn-Diagramm

Mengendiagramme helfen bei der Veranschaulichung. Sie gehen auf John Venn (1832–1923) zurück und heißen Venn-Diagramme. Es ist üblich, eine Menge als Kreis oder Ellipse darzustellen und die Elemente der Menge in den Kreis oder die Ellipse zu schreiben bzw. zu zeichnen.

Wenn ein Element a in der Menge M enthalten ist, dann schreiben wir $a \in M$.

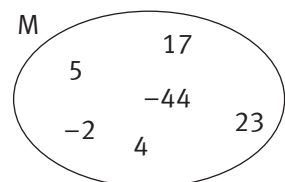
Ist das Element a nicht in M enthalten, dann schreiben wir $a \notin M$.

Enthält eine Menge keine Elemente, so spricht man von der leeren Menge und schreibt $\{\}$ oder $\emptyset$.



1.001 Gegeben ist ein Mengendiagramm für die Menge M . Gib an, ob die Elemente in der Menge M enthalten sind.

$5 \in M$ $17 \notin M$ $25 \notin M$ $-3 \notin M$ $23 \notin M$ $-4 \notin M$
 $7 \notin M$ $-44 \notin M$ $14 \notin M$ $0 \notin M$ $4 \notin M$ $-2 \notin M$



Aufzählendes Verfahren

Es werden die einzelnen Elemente einer Menge aufgezählt. Dieses Verfahren bietet sich bei einer endlichen Anzahl von Elementen an, jedoch kann es auch zur Beschreibung von Mengen mit unendlich vielen Elementen verwendet werden (vorausgesetzt, dass die Elemente der Menge einem Bildungsgesetz folgen).

Beispiel: $M = \{\text{Geige; Bratsche; Kontrabass; Zither}\}$; $Z = \{-1; 0; 1; 2; 3\}$; $F = \{5; 10; 15; 20; \dots\}$

Beschreibendes Verfahren

Es wird eine Eigenschaft E der in der Menge M enthaltenen Elemente x angegeben.

Schreibweise: $A = \{x \in M \mid x \text{ erfüllt } E\}$

Beispiel: $I = \{x \mid x \text{ ist ein Musikinstrument}\}$, $M = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 5\}$

1.002 Ein Computervirus hat die Datenbank einer Firma verschlüsselt. Alle Daten der Bewerberinnen und Bewerber liegen nur noch als mathematische Rätsel vor. Wenn die Daten nicht sofort in aufzählender Form notiert werden, fliegen die besten Talente aus dem System. Ergänze die Lücken mit den jeweiligen Mengen in aufzählendem Verfahren.

a) Für die IT-Stelle werden Leute gesucht, die fehlerfrei codieren können. Kürze die doppelten Daten heraus.

1) Die Menge A aller Buchstaben **an**, die im Wort „ASSESSMENT“ vorkommen.

$$A = \{ \text{ } \}$$

2) Die Menge B aller Ziffern, die in der Telefonnummer eines Bewerbers vorkommen: 0177-34533.

$$B = \{ \text{ } \}$$

b) Die Buchhaltung stellt nur Mathematiktalente ein. Die Gehaltsforderungen wurden in Formeln versteckt.

1) Die Bewerber fordern ein Einstiegsgehalt (Menge C). Es gilt: $C = \{x \in \mathbb{N} \mid 1\,550 \leq x < 1\,556\}$.

$$C = \{ \text{ } \}$$

2) Ein Trainee möchte im ersten Monat weniger arbeiten. Seine Wunsch-Arbeitstage im Mai sind in der Menge D enthalten. Es gilt: D ist die Menge aller natürlichen Zahlen, die Teiler der Zahl 5 sind.

$$D = \{ \text{ } \}$$

c) Für den internationalen Verkauf werden Bewerberinnen und Bewerber gesucht, die wichtige Hauptstädte betreuen können.

1) Die Menge E ist die Menge der Hauptstädte aller direkt an Österreich grenzenden Länder, deren Name mit dem Buchstaben „B“ beginnt.

$$E = \{ \text{ } \}$$

2) Die Flugzeiten (in Stunden) von Wien aus in eine andere europäische Hauptstadt werden in der Menge F zusammengefasst und es gilt: $F = \{y \in \mathbb{N} \mid y \leq 3\}$.

$$F = \{ \text{ } \}$$

1.003 Ein Asteroid hat das Lebenserhaltungssystem eines Raumschiffs getroffen! Der Hauptcomputer läuft nur noch im Notmodus. Um die Sauerstoffzufuhr und den Warp-Antrieb manuell zu steuern, müssen die Sensor-Datenströme sofort im beschreibenden Verfahren codiert werden. Ergänze dazu die Lücken.

a) Die Anzeigen der Ventile zeigen kritische Werte.

1) Das Schott-Ventil darf nur auf den Stufen $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ geöffnet werden.

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq \text{ } \}$$

2) Der Druck im Tank steigt unaufhörlich. Gefährlich sind alle Werte, welche in der Menge B enthalten sind: $B = \{40; 41; 42; 43; \dots\}$.

$$B = \{y \in \mathbb{N} \mid y > \text{ } \}$$

b) Der Schildgenerator überhitzt. Er arbeitet nur in einem bestimmten Sicherheitsbereich stabil.

1) Die Frequenz des Schildes muss genau auf den Werten in der Menge $C = \{101; 102; 103; 104\}$ liegen.

$$C = \{z \in \mathbb{N} \mid \text{ } \leq z \leq \text{ } \}$$

2) Die Schild-Temperatur in Grad Celsius darf sich nur im Bereich der Elemente der Menge $D = \{15; 16; 17; 18; 19; 20; 21; 22\}$ bewegen.

$$D = \{m \in \mathbb{N} \mid \text{ } < m \leq \text{ } \}$$

c) Um den Hyperantrieb zu starten, müssen die Sektoren-IDs mathematischen Mustern folgen und gleichzeitig begrenzt sein.

1) Der Autopilot akzeptiert nur die ID-Werte, welche in der Menge $E = \{0; 2; 4; 6; 8; 10\}$ enthalten sind.

$$E = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist eine } \text{ } \text{Zahl und } n < \text{ } \}$$

2) Zum Starten des Antriebs kommen nur jene Crew-Mitglieder in Frage, deren Namen eine bestimmte Eigenschaft erfüllen und in der Menge $F = \{\text{John; Jessie; Jennifer; James; Jane}\}$ liegen.

$$F = \{k \mid k \text{ ist Crew-Mitglied, dessen Name mit } \text{ } \}$$

1 Mengen und Aussagen

1.004 Fülle die Lücken aus!

a) Notiere die Menge im aufzählenden Verfahren.

1) Menge A der Ziffern in der Zahl 1001.
 $A = \{ \quad \quad \quad \}$

2) Menge B der Ziffern des Quadrats der Zahl 13.
 $B = \{ \quad \quad \quad \}$

3) Menge C der Kontinente der Erde mit dem Anfangsbuchstaben A.
 $C = \{ \quad \quad \quad \}$

4) $D = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 \leq x < 7\}$
 $D = \{ \quad \quad \quad \}$

5) $E = \{y \in \mathbb{N} \mid y > 9\}$
 $E = \{ \quad \quad \quad \}$

b) Notiere die Menge im beschreibenden Verfahren.

1) $A = \{a; e; i; o; u\}$
 $A = \{ \quad \quad \quad \}$

2) $B = \{\text{Alabama; Alaska; ... ; Wisconsin; Wyoming}\}$
 $B = \{ \quad \quad \quad \}$

3) $C = \{B; E; I; G; K; L; P; S; W\}$
 $C = \{ \quad \quad \quad \}$

4) $D = \{3; 4; 5; 6; 7\}$
 $D = \{ \quad \quad \quad \}$

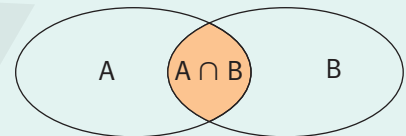
5) $E = \{1; 4; 9; 16; 25\}$
 $E = \{ \quad \quad \quad \}$

Beziehungen und Verknüpfungen von Mengen

Durchschnittsmenge

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\} = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

Das Symbol $\wedge$ steht für „und“.

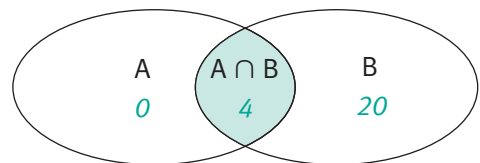


1.005 Gegeben sind die beiden Mengen A und B. Bilde die Durchschnittsmenge $A \cap B$, indem du die fehlenden Zahlen im Mengendiagramm ergänzt und dann die gesuchte Menge $A \cap B$ im aufzählenden Verfahren angibst.

$A = \{0; 1; 4; 6; 8; 12; 15\}$

$B = \{2; 4; 5; 6; 11; 15; 20; 25\}$

$A \cap B = \{ \quad \quad \quad \}$



GeoGebra

Durchschnittsmenge

Schnittmenge(Liste,Liste)

1 A: = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
☐ → A := {1, 2, 3, 4, 5, 6}

2 B: = {4, 5, 6, 7, 8, 9}
☐ → B := {4, 5, 6, 7, 8, 9}

3 Schnittmenge(A, B)
☐ → {4, 5, 6}

Eigene Technologie

1.006 Gegeben sind jeweils zwei Mengen. Bilde die Durchschnittsmenge $A \cap B$, indem du das Mengendiagramm aufzeichnest, die Zahlen einträgst und dann $A \cap B$ im aufzählenden Verfahren angibst.

a) $A = \{-2; -1; 3; 5; 7; 12\}$

$B = \{-2; 0; 1; 3; 5; 7; 9\}$

$A \cap B = \{ \quad \quad \quad \}$

b) $A = \{2; 5; 8; 12; 16\}$

$B = \{1; 4; 6; 10; 12; 18\}$

$A \cap B = \{ \quad \quad \quad \}$

c) $A = \{2; 4; 6; 8\}$

$B = \{0; 2; 4; 6; 8; 10; 12\}$

$A \cap B = \{ \quad \quad \quad \}$

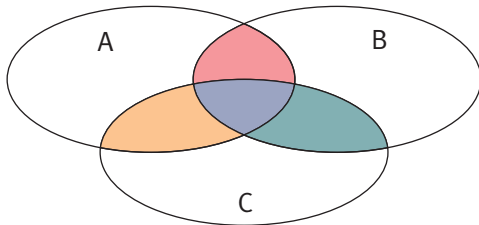
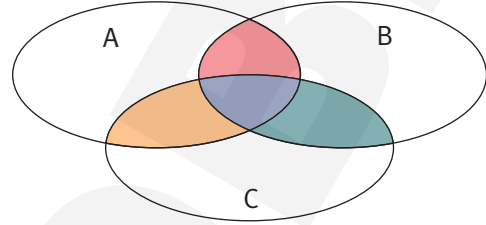
d) $A = \{x \mid x \text{ ist kein EU-Mitglied}\}$, $B = \{y \mid y \text{ ist ein Land Europas, in dem der Euro Zahlungsmittel ist}\}$

$A \cap B = \{ \quad \quad \quad \}$

1.007 Gegeben sind jeweils drei Mengen. Trage die Elemente der Mengen in das Mengendiagramm ein und gib $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$ und $A \cap B \cap C$ im aufzählenden Verfahren an.

a) $A = \{0; 2; 4; 6; 8; 10; 13; 14; 16; 18\}$
 $B = \{3; 6; 9; 10; 12; 13; 14; 15; 18; 21\}$
 $C = \{0; 4; 6; 10; 12; 18; 24; 30\}$

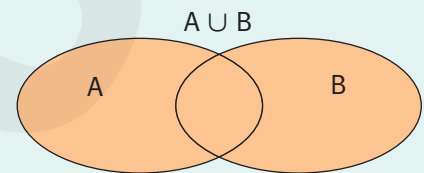
b) $A = \{2; 5; 8; 11; 14; 17; 20; 23; 26\}$
 $B = \{4; 8; 12; 16; 20; 24; 28; 32\}$
 $C = \{5; 8; 11; 14; 17; 20; 28; 36\}$



Vereinigungsmenge

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\} = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

Das Symbol $\vee$ steht für „oder“ und man meint hier das nicht ausschließende lateinische vel. Das Element liegt entweder in der Menge A oder in der Menge B oder auch in beiden Mengen.

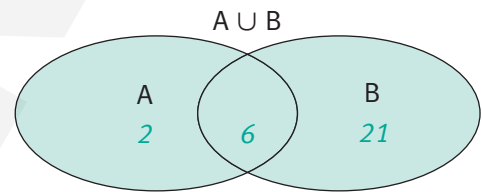


1.008 Gegeben sind die beiden Mengen A und B. Bilde die Vereinigungsmenge $A \cup B$, indem du die fehlenden Zahlen im Mengendiagramm ergänzt und dann die gesuchte Menge $A \cup B$ im aufzählenden Verfahren angibst.

$A = \{2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 16; 18\}$

$B = \{3; 6; 9; 12; 15; 18; 21\}$

$A \cup B = \{ \text{ } \}$



GeoGebra

Vereinigungsmenge

Vereinigungsmenge(Liste,Liste)

- 1 A: = {1,2,3,4,5,6}
☐ → **A := {1,2,3,4,5,6}**
- 2 B: = {4,5,6,7,8,9}
☐ → **B := {4,5,6,7,8,9}**
- 3 Vereinigungsmenge(A,B)
☐ → **{1,2,3,4,5,6,7,8,9}**

Eigene Technologie



1.009 Gegeben sind die beiden Mengen $A = \{3; 4; 5; 6; 7\}$ und $B = \{5; 6; 7; 8; 9; 10\}$. Ergänze die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen des jeweils richtigen Satzteiltes so, dass jedenfalls eine korrekte Aussage entsteht.

Der Durchschnitt $A \cap B$ ist die Menge 1, die Vereinigung $A \cup B$ ist die Menge 2.

1	
$\{3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$	☐
$\{5; 6; 7\}$	☐
$\{\}$	☐

2	
$\{3\}$	☐
$\{5; 6; 7\}$	☐
$\{3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$	☐

1 Mengen und Aussagen



1.010 Gegeben sind jeweils zwei Mengen. Bilde die Vereinigungsmenge $A \cup B$, indem du das Mengendiagramm aufzeichnest, die Zahlen einträgst und dann $A \cup B$ im aufzählenden Verfahren angibst.

a) $A = \{5; 8; 11; 14; 21\}$
 $B = \{6; 8; 10; 12; 14; 16\}$

b) $A = \{4; 8; 12\}$
 $B = \{2; 4; 6; 8; 10; 12; 14\}$

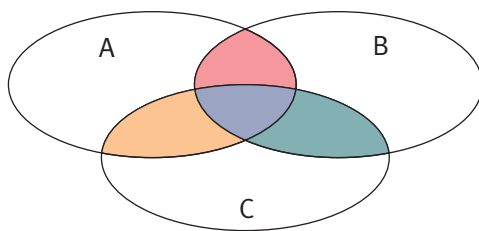
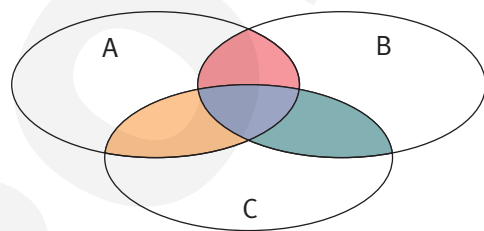
$A \cup B = \{ \quad \quad \quad \}$ $A \cup B = \{ \quad \quad \quad \}$



1.011 Gegeben sind jeweils drei Mengen. Trage die Elemente der Mengen in das Mengendiagramm ein und gib $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$ und $A \cup B \cup C$ im aufzählenden Verfahren an.

a) $A = \{6; 12; 18; 24; 30; 36\}$
 $B = \{3; 6; 9; 10; 12; 15; 18; 21; 24\}$
 $C = \{0; 6; 12; 24; 36; 48\}$

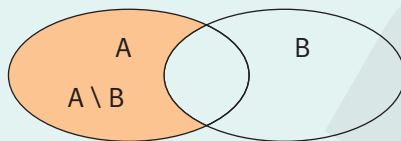
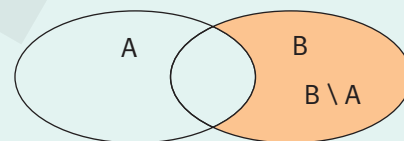
b) $A = \{1; 5; 9; 13; 17; 21; 25\}$
 $B = \{5; 10; 15; 20; 25; 30\}$
 $C = \{5; 10; 20; 25; 50; 100\}$



Differenzmenge

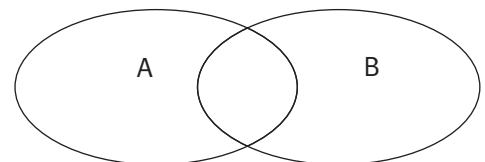
$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \notin B\} = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

$$B \setminus A = \{x \mid x \notin A \text{ und } x \in B\} = \{x \mid x \notin A \wedge x \in B\}$$



1.012 Gegeben sind die beiden Mengen $A = \{2; 8; 14; 20; 26; 32\}$ und $B = \{2; 4; 8; 16; 32; 64\}$. Trage die Zahlen in das Mengendiagramm ein. Markiere die Menge $A \setminus B$ im Venn-Diagramm färbig und gib $A \setminus B$ im aufzählenden Verfahren an.

$A \setminus B = \{14; \quad \quad \quad \}$



GeoGebra

Differenzmenge
mit dem Operator „\“

1 $A := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
 $\rightarrow A := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
 2 $B := \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
 $\rightarrow B := \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
 3 $A \setminus B$
 $\rightarrow \{1, 2, 3\}$

Eigene Technologie

1.013 Gegeben sind zwei Mengen A und B, wobei gilt $A = B$. Kreuze die beiden korrekten Aussagen an. [2 aus 5]

$A \cap B = \{\}$	$A \cup B = A$	$A \setminus B = \{\}$	$A \setminus B = A$	$B \setminus A = B$
☐	☐	☐	☐	☐



1.014 Gegeben sind die beiden Mengen A und B. Zeichne ein zugehöriges Venn-Diagramm und gib $A \setminus B$ und $B \setminus A$ im aufzählenden Verfahren an.

a) $A = \{-2; -1; 3; 5; 7; 12\}$

$B = \{-2; 0; 1; 3; 5; 7; 9\}$

$A \setminus B = \{ \quad \}$

$B \setminus A = \{ \quad \}$

b) $A = \{2; 5; 8; 12; 16\}$

$B = \{1; 4; 6; 10; 14; 18\}$

$A \setminus B = \{ \quad \}$

$B \setminus A = \{ \quad \}$

c) $A = \{2; 4; 6; 8\}$

$B = \{0; 2; 4; 6; 8; 10; 12\}$

$A \setminus B = \{ \quad \}$

$B \setminus A = \{ \quad \}$



1.015 Gegeben sind jeweils drei Mengen. Trage die Elemente der Mengen in ein Venn-Diagramm ein und gib $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \setminus C$, $C \setminus B$, $A \setminus (B \cap C)$, $A \setminus (B \cup C)$, $(A \cap B) \setminus C$ und $A \setminus (B \cup C)$ im aufzählenden Verfahren an.

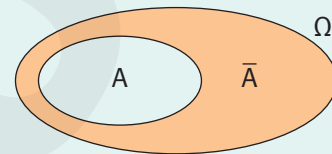
a) $A = \{-4; 0; 4; 8; 12; 16; 20; 24\}$; $B = \{-2; 0; 2; 4; 6; 8; 10; 12; 14\}$; $C = \{-6; 0; 6; 12; 18; 24; 30\}$

b) $A = \{1; 5; 10; 15; 20; 30; 50; 100\}$; $B = \{1; 10; 20; 40; 60; 80; 100\}$; $C = \{1; 15; 20; 30; 60; 120\}$

Komplementärmenge

Wenn die Menge A in einer Grundmenge Ω enthalten ist, dann ist die Komplementärmenge von A definiert durch:

$$\bar{A} = \Omega \setminus A = \{x \in \Omega \mid x \notin A\}.$$



1.016 Gegeben sind die Grundmenge $\Omega = \{1; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 11; 20\}$ und die Menge A als Teilmenge der Grundmenge Ω . Bestimme die Komplementärmenge $\bar{A}$.

a) $A = \{1; 3; 4; 20\}$

b) $A = \{1; 3; 5; 6; 7; 11\}$

c) $A = \{1; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 11; 20\}$

1.017 Gegeben sind die Grundmenge $\Omega = \{-3; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 10; 15\}$ und die beiden Teilmengen $A = \{0; 1; 2; 4; 10\}$ und $B = \{-1; 0; 2; 4; 10\}$.

Ergänze die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen des jeweils richtigen Satzteil so, dass jedenfalls eine korrekte Aussage entsteht.

Die Komplementärmenge $\overline{A \cup B}$ ist die Menge 1, die Komplementärmenge $\overline{A \cap B}$ ist die Menge 2.

1	
$\{0; 2; 4; 10\}$	☐
$\{-1; 0; 1; 2; 4; 10; 15\}$	☐
$\{-3; 3; 15\}$	☐

2	
$\{0; 2; 4; 10\}$	☐
$\{-3; -1; 1; 3; 15\}$	☐
$\{-1; 0; 1; 2; 4; 10; 15\}$	☐

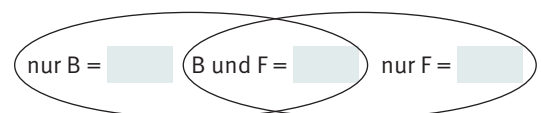
1.018 Von den 30 Schülerinnen und Schülern einer Klassenstufe spielen 8 Basketball (B), 12 Fußball (F) und 15 betreiben keine (K) der beiden Sportarten.

$K = \quad$

a) Wie viele Schülerinnen und Schüler spielen Basketball und Fußball?

b) Wie viele Schülerinnen und Schüler spielen nur Basketball (und nicht Fußball)?

c) Wie viele Schülerinnen und Schüler spielen nicht Fußball?



Der Lösungsweg führt über das Venn-Diagramm.

Trage die Anzahl der Schülerinnen und Schüler K ein, die keine der beiden Sportarten ausüben: $K = \quad$

Die Summe der angegebenen Schülerinnen und Schüler ist $8 + 12 + 15 = \quad$, das sind um $\quad$ mehr als die Gesamtanzahl 30. Es müssen daher $\quad$ Schülerinnen und Schüler doppelt gezählt worden sein, die in den Bereich B und F eingetragen werden. Somit ist die Differenz aus $\quad$ und $\quad$ in den Bereich $\quad$ zu schreiben und die Differenz aus $\quad$ und $\quad$ in den Bereich $\quad$.

Man erhält als Antwort:

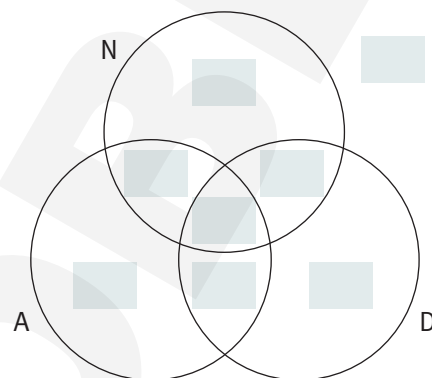
a) Es spielen $\quad$ Basketball und Fußball, b) $\quad$ nur Basketball und c) $\quad$ nicht Fußball.

1 Mengen und Aussagen

- 1.019** In einer Schule wurden im Zuge einer Umfrage 55 Personen befragt, welche Streaming-Dienste genutzt werden. Es standen dabei die drei möglichen Dienste Netflix (N), Amazon Prime (P) und Disney+ (D) zur Auswahl.

Die Umfrage ergab folgende Ergebnisse:

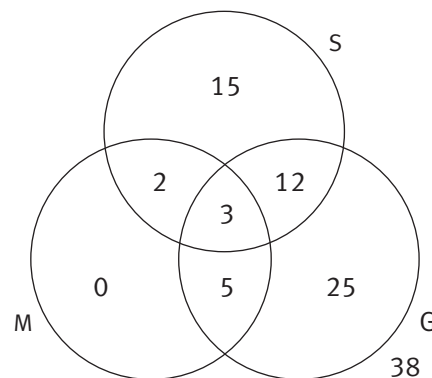
- 35 SchülerInnen nutzen Netflix, 30 Personen gaben an Amazon Prime und 26 Disney+ zu nutzen.
- 12 SchülerInnen nutzen Netflix und Amazon Prime, aber kein Disney+.
- 8 Personen nutzen Amazon Prime und Disney+, aber kein Netflix.
- 10 SchülerInnen nutzen Amazon Prime nicht, dafür Netflix und Disney+.
- 5 Personen nutzen alle drei Dienste und 4 SchülerInnen gaben an, dass sie keinen der drei Dienste nutzen.



- Fülle das Venn-Diagramm mit den korrekten Zahlen für die einzelnen Bereiche aus.
- Wie viele SchülerInnen nutzen nur Netflix?
- Wie viele Personen gaben an genau zwei der drei Streaming-Dienste zu nutzen?
- Wie viele SchülerInnen nutzen weder Amazon Prime noch Disney+?

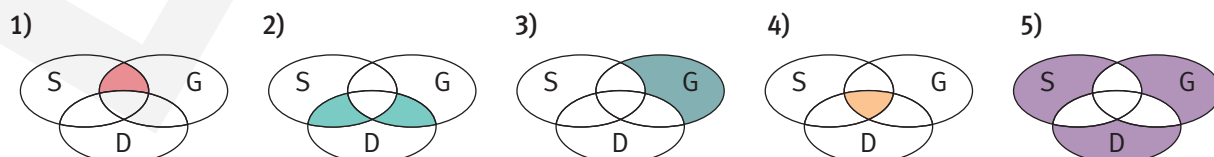
- 1.020** Von den Schülerinnen und Schülern eines Jahrgangs spielen 18 kein Instrument. 40 Schülerinnen und Schüler spielen Geige und 50 Klavier. Außerdem gibt es 40 Flötenspielerinnen und -spieler, von denen alle außer drei Schülerinnen und Schülern noch genau ein weiteres Instrument spielen, nämlich 18 Geige und 15 Klavier. Von den Violinistinnen und Violinisten (Geigenspieler) spielen 13 kein weiteres Instrument. Wie viele Schülerinnen und Schüler **a)** besuchen diesen Jahrgang, **b)** spielen nur Klavier, **c)** spielen alle drei Instrumente, **d)** spielen Geige und Klavier, aber nicht Flöte?

- 1.021** Ein Jugendzentrum hat das Freizeitverhalten von 100 Jugendlichen untersucht. Das nachstehende Venn-Diagramm visualisiert diese Untersuchung, wobei S die Menge der Jugendlichen beschreibt, welche regelmäßig Sport betreiben, G die Menge an Jugendlichen, die regelmäßig Computer-/Videospiele spielen (Gaming) und M die Menge jener Jugendlichen, die regelmäßig ein Musikinstrument spielen.



- Interpretiere die Zahl 38 im vorliegenden Kontext.
- Betrachte die beiden Mengen $S \cap G$ und $S \cap M$. Welche Trends lassen sich aus dem Vergleich der beiden Schnittmengen für die Jugendlichen ableiten.
- Eine Streetworkerin behauptet, dass GamerInnen unsportlich sind und nur vor dem Bildschirm sitzen. Widerlege diese Aussage fundiert anhand der Daten im Diagramm.
- Die Anzahl der Elemente in der Menge M ist auffallend klein. Welche Maßnahmen würdest du als Leiterin/Leiter dieses Jugendzentrums setzen, um das musikalische Interesse zu fördern?
- Ein Journalist behauptet, dass 42 % der Jugendlichen entweder Sport betreiben, ein Instrument spielen oder sogar beides. Erkläre den Denkfehler.

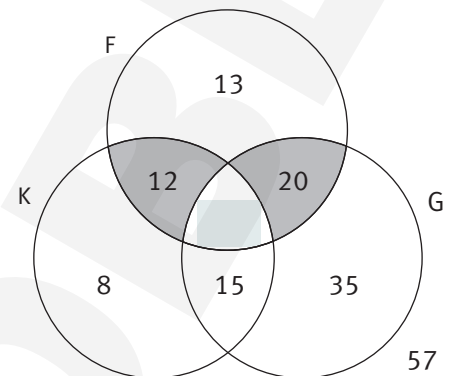
- 1.022** An einer Schule wird Instrumentalunterricht in den Bereichen Schulband (S), Gitarre (G) und Drums (D) angeboten. Beschreibe den farblich markierten Bereich in Worten und in Mengenschreibweise.



1.1 Mengen

1.023 Ein Institut untersucht das Vorhandensein von systemischen Barrieren für Frauen auf dem Arbeitsmarkt. Für eine Stichprobe von 200 börsennotierten Großunternehmen wurden drei strukturelle Defizite in den Führungsebenen (Vorstand und Aufsichtsrat) erfasst und in einem Venn-Diagramm visualisiert.

- Menge F (Frauenquote verfehlt): Unternehmen, in denen weniger als 30 % der Führungspositionen mit Frauen besetzt sind.
- Menge G (Gender Pay Gap): Unternehmen mit einer unerklärten Lohnlücke von mehr als 10 % zum Nachteil von Frauen.
- Menge K (Kultur-Defizit): Unternehmen ohne flexible Arbeitszeitmodelle oder Förderung von Väterkarenz in Führungspositionen.



- Beschreibe den grau eingefärbten Bereich in Worten und in Mengenschreibweise.
- Ermittle den fehlenden Wert in der Grafik und interpretiere ihn im gegebenen Kontext.
- Wie viel Prozent der Unternehmen weisen gleichzeitig die Eigenschaften der Mengen F und K auf?

Eine Menge A heißt (echte) **Teilmenge** einer Menge B, wenn gilt: Jedes Element der Menge A ist auch ein Element der Menge B (echte Teilmenge: In B sind mehr Elemente als in A).
Schreibweise: $A \subseteq B$ (echte Teilmenge: $A \subset B$)

1.024 Untersuche, ob auf die Mengen A und B die Beziehungen $A \subset B$, $B \subset A$ oder $A = B$ zutreffen.

- $a = \{4; 8; 12; 16\}$ $B = \{2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 16; 18\}$
- $A = \{5; 10; 15; 20; 25\}$ $B = \{10; 15; 20\}$
- $A = \{3; 6; 9; 12; 15; 18\}$ $B = \{6; 12; 18; 24\}$

GeoGebra

(echte) Teilmenge
mit dem Operator „ $\subset$ “ bzw. „ $\subseteq$ “

1	$A := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
	→ $A := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
2	$B := \{1, 2, 3\}$
	→ $B := \{1, 2, 3\}$
3	$B \subset A$
	→ true
4	$B \subseteq A$
	→ true
5	$A \subset B$
	→ false
6	$A \subseteq B$
	→ false

Eigene Technologie

Die Menge aller Teilmengen einer Menge M bezeichnet man als Potenzmenge.
Die Anzahl aller Teilmengen ist gegeben durch $2^{\text{Anzahl der Elemente von M}}$.

1.025 Schreibe alle Teilmengen der gegebenen Menge an und bestimme ihre Anzahl.

- $M = \{1; 2; 3\}$
- $M = \{a; b\}$
- $M = \{4\}$
- $M = \{2; 4; 6\}$
- $M = \{3; 5; 7; 11\}$

zu a) $T_1 = \{\}; T_2 = \{1\}; T_3 = \{2\}; T_4 = \{\quad\}; T_5 = \{1; 2\}; T_6 = \{\quad\}; T_7 = \{\quad\}; T_8 = \{\quad\}, n = 8$

Gesetze für Mengen

A, B und C seien Mengen. Es gelten die folgenden Rechengesetze:

Kommutativgesetz:	$A \cap B = B \cap A$	$A \cup B = B \cup A$
Assoziativgesetz:	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
Distributivgesetz:	$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$	$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
Absorptionsgesetz:	$A \cap (A \cup B) = A$	$A \cup (A \cap B) = A$

1.026 Zeige die Gültigkeit 1) der beiden Assoziativgesetze, 2) der beiden Distributivgesetze.

- a) $A = \{3; 6; 9; 12\}$ $B = \{6; 12; 18; 24\}$ $C = \{9; 18; 27; 36\}$
 b) $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$ $B = \{2; 4; 6; 8; 10; 12\}$ $C = \{4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11\}$
 c) $A = \{1; 2; 3; 4\}$ $B = \{2; 4; 6\}$ $C = \{3; 6; 9\}$
 d) $A = \{0; 2; 4; 6; 8; 10; 12\}$ $B = \{4; 8; 12; 16; 20; 24\}$ $C = \{6; 12; 18; 24; 30\}$

1.027 Gegeben sind drei verschiedene Mengen A, B und C. Kreuze die beiden Aussagen an, die entsprechend den Rechengesetzen für Mengen korrekt sind. [2 aus 5]

$A \cap (A \cap B) = A$	☐
$A \cup B = A \cap B$	☐
$C \cup (A \cap B) = (A \cup C) \cap (B \cup C)$	☐
$C \cap (A \cup B) = (A \cup C) \cap (B \cup C)$	☐
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	☐

1.2 Aussagen

Eine **Aussage** ist ein Satz bzw. eine Formulierung a, bei der man entscheiden kann, ob sie wahr oder falsch ist. Die Negation (Verneinung) dieser Aussage ist $\neg a$.

Allaussage: Die Aussage $a(x)$ gilt für alle Elemente x der Grundmenge G .

Schreibweise: $\forall x \in G: a(x)$ Sprechweise: Für alle x aus der Menge G gilt $a(x)$.

Existenzaussage: Die Aussage $a(x)$ gilt zumindest für ein Element x der Grundmenge G .

Schreibweise: $\exists x \in G: a(x)$ Sprechweise: Es gibt mindestens ein x aus G , für das $a(x)$ gilt.

Die beiden Symbole werden als **Allquantor** $\forall$ und **Existenzquantor** $\exists$ bezeichnet.

1.028 Gegeben ist die Aussage a. Stelle fest, ob die Aussage wahr oder falsch ist.

- a) a: In jedem Dreieck ist die Summe der Kathetenquadrate gleich dem Hypotenusenquadrat.
 b) a: Jedes Quadrat ist ein Rechteck.
 c) a: Ein Kreis kann zeichnerisch in ein Quadrat mit gleichem Flächeninhalt umgewandelt werden.
 d) a: Die Winkelsumme im Dreieck ist immer 180° .
 e) a: Alle Rauten sind Parallelogramme.
 f) a: Alle echten Brüche sind kleiner als 1.
 g) a: In allen Dreiecken ist die Summe der Länge zweier Seiten größer als die Länge der dritten Seite.
 zu a) falsch: Die Aussage gilt nur für rechtwinklige Dreiecke.

1.029 Gegeben ist die Aussage a. Verneine diese Aussage.

- a) a: Alle Schülerinnen und Schüler kommen pünktlich zum Unterricht.
 - b) a: Die Quadrate aller natürlichen Zahlen sind mindestens zweistellig.
 - c) a: Es gibt mindestens ein Deltoid, das eine Raute ist.
 - d) a: Gesucht sind alle natürlichen Zahlen, die kleiner als 3 oder größer gleich 9 sind.
 - e) a: Alle Schülerinnen und Schüler können die Zunge rollen (sog. Zungenroller).
 - f) a: Auf einem Geburtstagsfest sind alle Personen nach dem Jahr 2005 geboren.
- zu a) $\neg a$: **Mindestens ein Schüler oder eine Schülerin kommt unpünktlich (kommt zu spät).**

1.030 Verneine die Aussage und verwende dazu die Quantoren $\forall$ bzw. $\exists$.

- a) $\exists x \in \mathbb{R}: x > x^2$
- b) $\forall x \in \mathbb{R}: x^2 \geq 0$
- c) $\forall x \neq 0: \frac{1}{x} < x$
- d) $\forall x \neq 0: x < 2 \cdot x$
- e) $\forall x: x^2 > 0$
- f) $\exists p, q: \sqrt{2} = \frac{p}{q}$

zu b) $\exists x \in \mathbb{R}: x^2 < 0$

1.031 Formuliere die Aussage mit den Quantoren $\forall$ bzw. $\exists$.

- a) Keine natürliche Zahl ist negativ.
- b) Es gibt keinen Stammbruch, der größer als 0,5 ist.
- c) Es gibt eine reelle Zahl, die Lösung der Gleichung $x^2 - x - 6 = 0$ ist.
- d) Für alle reellen Zahlen hat die Gleichung $x^2 + x + 2 = 0$ keine Lösung.
- e) Für alle reellen Zahlen x und y ($x < y$) gilt: $\frac{x+y}{2} < y$.
- f) Für alle Zahlen x und y, die restlos durch 6 teilbar sind, ist die Summe restlos durch 6 teilbar.

zu c) $\exists x \in \mathbb{R}: x^2 - x - 6 = 0$

1.032 Gegeben sind die Aussagen a: $\forall x \in \mathbb{R}: \sqrt{x} \in \mathbb{R}$ und b: $\exists y \in \mathbb{N}: y < 0$.

Ergänze die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen des jeweils richtigen Satzteiles so, dass jedenfalls eine korrekte Aussage entsteht.

Die korrekte Aussage $\neg a$ lautet **1**, die korrekte Aussage $\neg b$ lautet **2**.

1		2	
$\forall x \in \mathbb{R}: \sqrt{x} \notin \mathbb{R}$	☐	$\forall y \in \mathbb{N}: y \geq 0$	☐
$\exists x \in \mathbb{R}: \sqrt{x} \in \mathbb{R}$	☐	$\forall y \in \mathbb{N}: y > 0$	☐
$\exists x \in \mathbb{R}: \sqrt{x} \notin \mathbb{R}$	☐	$\exists y \in \mathbb{N}: y \geq 0$	☐

Verknüpfung von Aussagen

In der binären Logik kann der Wahrheitsgehalt einer Aussage in Form einer **Wahrheitstafel** angegeben werden.

a	$\neg a$
w	f
f	w

Die **Konjunktion** (UND-Verknüpfung) $a \wedge b$ ist genau dann wahr, wenn beide Aussagen a und b wahr sind.

Die **Disjunktion** (ODER-Verknüpfung) $a \vee b$ ist genau dann wahr, wenn zumindest eine der beiden Aussagen wahr ist.

a	b	$a \wedge b$	$a \vee b$
w	w	w	w
w	f	f	w
f	w	f	w
f	f	f	f

1 Mengen und Aussagen

Augustus De Morgan (1806–1871) war ein englischer Mathematiker. Nach dem Studienabschluss am Trinity College in Cambridge (England) beschäftigte er sich mit verschiedenen Teilgebieten der Mathematik und verfasste zahlreiche mathematische Artikel. Zu seinen wichtigsten Werken gehört die „Formal Logic“ (1847), in der er die beiden Gesetze, die später nach ihm benannt wurden, behandelte.



Gemeinsam mit George Boole gilt er als Begründer der formalen Logik.

1.033 Zeige mit einer Wahrheitstafel die Gültigkeit der Gesetze nach De Morgan.

a) $\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b$

a	b	$a \vee b$	$\neg(a \vee b)$	$\neg a$	$\neg b$	$\neg a \wedge \neg b$
w	w	w	f	f	f	f

b) $\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$

a	b	$a \wedge b$	$\neg(a \wedge b)$	$\neg a$	$\neg b$	$\neg a \vee \neg b$

1.034 Überprüfe mit einer Wahrheitstafel, ob folgende Aussagen korrekt sind.

a) $(a \wedge b) \vee (a \wedge \neg b) = a$

b) $(a \vee b) \wedge (a \vee \neg b) = a$

1.035 Ein Rechenzentrum nutzt ein automatisiertes Notfall-Kühlsystem für seine Serverräume. Das System besitzt drei Sensoren, die digitale Signale (1 für wahr, 0 für falsch) liefern:

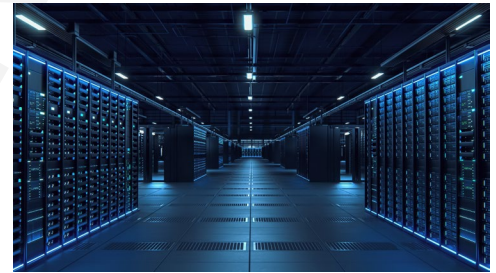
- Sensor A: Die Raumtemperatur liegt über 35°C
- Sensor B: Die Luftfeuchtigkeit überschreitet 75 %
- Sensor C: Der primäre Kühlkreislauf meldet einen Defekt.

Die Alarm-Zentrale (Y) soll unter folgenden Bedingungen den Notfall-Kühler einschalten ($Y = 1$):

1. Der primäre Kühlkreislauf ist defekt und die Temperatur ist zu hoch.
2. Oder: Die Temperatur ist zu hoch und die Luftfeuchtigkeit ist zu hoch.
3. Oder: Der Kühlkreislauf ist defekt und die Luftfeuchtigkeit ist zu hoch.

a) Stelle die aussagenlogische Formel für das Ausgangssignal Y in Abhängigkeit von den Eingangsvariablen A, B und C auf.

b) Erstelle eine vollständige Wahrheitstabelle für alle acht möglichen Kombinationen der Sensoren A, B und C, um die Werte für Y zu ermitteln.



1.036 Ein intelligentes Lagerhaus steuert seine Lüftungsanlage basierend auf drei Bedingungen. Die Sensoren liefern digitale Signale (1 für wahr, 0 für falsch):

- A: Es ist Tag (0 = Nacht).
- B: Die Außentemperatur ist höher als die Innentemperatur.
- C: Das Lager ist besetzt.

Die Lüftung ($Y = 1$) soll sich nur dann einschalten, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

Es ist nicht Nacht, und es ist nicht so, dass die Außentemperatur höher ist als die Innentemperatur, und das Lager ist besetzt.

a) Stelle die aussagenlogische Formel für das Einschalten der Lüftung (Y) auf.

b) Erstelle die Wahrheitstabelle für alle acht Kombinationen der Eingangsvariablen A, B und C und bestimme den Zustand von Y.

Die **Implikation** $a \Rightarrow b$ („aus a folgt b“) ist nur dann falsch, wenn Aussage a wahr und Aussage b falsch ist.

Die **Äquivalenz** $a \Leftrightarrow b$ („a ist gleichbedeutend mit b“) ist genau dann wahr, wenn beide Aussagen wahr beziehungsweise falsch sind.

a	b	$a \Rightarrow b$	$a \Leftrightarrow b$
w	w	w	w
w	f	f	f
f	w	w	f
f	f	w	w

1.037 Ergänze die Symbole $\Rightarrow$ und $\Leftrightarrow$ richtig.

- a) Es hat geregnet ☐ Die Straße ist nass
 c) Akku ist leer ☐ Smartphone ist aus
 e) Draußen schneit es ☐ Es hat Minusgrade
 g) Das Tier ist ein Dackel ☐ Das Tier ist ein Hund
 b) Login erfolgreich ☐ Passwort korrekt
 d) Licht brennt ☐ Schalter auf „an“
 f) Der Motor läuft ☐ Der Tank ist nicht leer
 h) Morgen ist Samstag ☐ Heute ist Freitag

1.038 Zeige die Gültigkeit mithilfe einer Wahrheitstafel.

- a) $\neg(a \vee b) \Leftrightarrow \neg a \wedge \neg b$
 c) $(a \wedge b) \vee (\neg a \vee \neg b) \Leftrightarrow (\neg a \vee b) \vee (a \vee \neg b)$
 e) $(a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b) \Leftrightarrow \neg a \vee \neg b$
 b) $\neg(a \wedge b) \Leftrightarrow \neg a \vee \neg b$
 d) $(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow \neg a \vee b$
 f) $\neg(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow a \wedge \neg b$

1.039 Gegeben sind zwei mathematisch Aussagen p und q über ein Viereck V:

p: Das Viereck V ist ein Rechteck.

q: Das Viereck V hat vier rechte Winkel.

Welche der folgenden Aussagen beschreibt die Beziehung zwischen p und q mathematisch korrekt? Kreuze an. [1 aus 5]

$p \Rightarrow q$ ist wahr, aber $q \Rightarrow p$ ist falsch.	☐
$p \Leftrightarrow q$ ist wahr.	☐
$p \Rightarrow q$ ist falsch.	☐
$q \Rightarrow p$ ist wahr, aber $p \Rightarrow q$ ist falsch.	☐
$p \Leftrightarrow q$ ist falsch.	☐

1.040 Auf einem Musikfestival gelten für die Besucherinnen und Besucher verschiedene Regeln und Ankündigungen des Veranstalters. Betrachte die folgenden zwei Aussagen des Veranstalters:

Aussage 1: „Wenn du ein VIP-Armband trägst, bekommst du an der Bar ein kostenloses Begrüßungsgetränk.“

Aussage 2: „Du erhältst Zutritt zur VIP-Lounge genau dann, wenn du ein VIP-Armband trägst.“

- a) Definiere passende Teilaussagen (a, b und c) und stelle die beiden Aussagen des Veranstalters mit den logischen Junktoren für Implikation bzw. Äquivalenz dar.
 b) Prüfe für folgende Situationen auf dem Festival, ob sie einen Widerspruch zu den Regeln des Veranstalters darstellen. Begründe deine Antwort mathematisch-logisch!
- 1) Lukas hat kein VIP-Armband, bekommt an der Bar aber trotzdem ein kostenloses Begrüßungsgetränk (weil er heute Geburtstag hat).
 - 2) Maya trägt ein VIP-Armband, wird aber an der Bar abgewiesen und bekommt kein kostenloses Begrüßungsgetränk.
 - 3) Sarah hat kein VIP-Armband, steht aber in der VIP-Lounge und feiert dort.
 - 4) Tom hat ein VIP-Armband und steht in der VIP-Lounge.

1.041 Gegeben ist die Menge $M = \{x \mid x \text{ ist ein Vielfaches von 2, das kleiner als 20 ist}\}$.

Aufgabenstellung: Geben Sie die Menge M im aufzählenden Verfahren an.

1.042 Gegeben ist die Zahl 64.

Aufgabenstellung: Bestimmen Sie die Menge T , die alle Zahlen enthält, durch die 64 restlos teilbar ist.

1.043 Gegeben sind die drei Mengen $A = \{2; 5; 8; 11; 14; 17; 20; 23; 26; 29\}$, $B = \{4; 8; 12; 16; 20; 24; 28\}$ und $C = \{2; 8; 14; 20; 26; 32; 38\}$.

Aufgabenstellung: Stellen Sie die drei Mengen mit einem Venn-Diagramm dar.



1.044 Gegeben sind die beiden Mengen $A = \{2; 4; 6; 8; 12; 15; 18; 21; 24; 27\}$ und $B = \{6; 9; 12; 18; 24; 30\}$.

Aufgabenstellung: Bestimmen Sie die Mengen $C = A \cap B$ und $D = B \setminus A$.

1.045 Gegeben ist die Menge $A = \{p; q; r\}$.

Aufgabenstellung: Schreiben Sie alle möglichen Teilmengen der Menge A an.

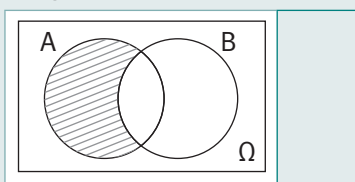
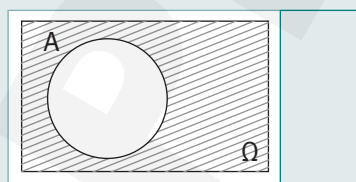


1.046 Gegeben sind die drei Mengen $A = \{5; 12; 19; 26; 33; 40; 47; 54\}$, $B = \{6; 12; 18; 30; 40; 54; 60; 66\}$ und $C = \{12; 26; 30; 40; 54; 60\}$.

Aufgabenstellung: Bestimmen Sie die beiden Mengen $D = A \setminus (B \cap C)$ und $E = A \setminus (B \cup C)$.

1.047 Gegeben sind zwei Venn-Diagramme, welche die Mengen A und B sowie schraffierte Bereiche enthalten.

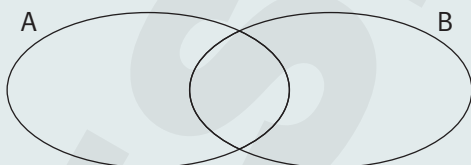
Aufgabenstellung: Ordnen Sie jedem schraffierten Bereich die passende Mengenoperation/Mengenbezeichnung aus A bis D zu!



A	$A \setminus B$
B	$B \setminus A$
C	$A \cup B$
D	$\bar{A}$

1.048 27 Schülerinnen bereiten Smoothies mit Orangen und/oder Mangos zu. Jede Schülerin darf nur einen Smoothie anschließend verkosten. Die Menge aller Schülerinnen, die einen Smoothie verkosten, der nur eine einzige der oben genannten Obstsorten enthält, wird mit L bezeichnet.

Aufgabenstellung: Kennzeichnen Sie im abgebildeten Venn-Diagramm die Menge L und beschreiben Sie diese auch mit Mengensymbolik!



- A ... Menge der Schülerinnen, die einen Smoothie verkosten, der Orangen enthält
 B ... Menge der Schülerinnen, die einen Smoothie verkosten, der Mangos enthält

$L = \{ \quad \quad \quad \}$

1.049 Gegeben ist die (nicht richtige) Aussage $a: \forall x \in \mathbb{R} : x > 0$.

Aufgabenstellung: Geben Sie die korrekte Verneinung der Aussage a in mathematischer Schreibweise an!

$\neg a:$

1.050 Gegeben sind zwei Aussagen a und b .

Aufgabenstellung: Kreuzen Sie jene Aussage an, welche zur logischen Implikation $a \Rightarrow b$ äquivalent ist.
 [1 aus 5]

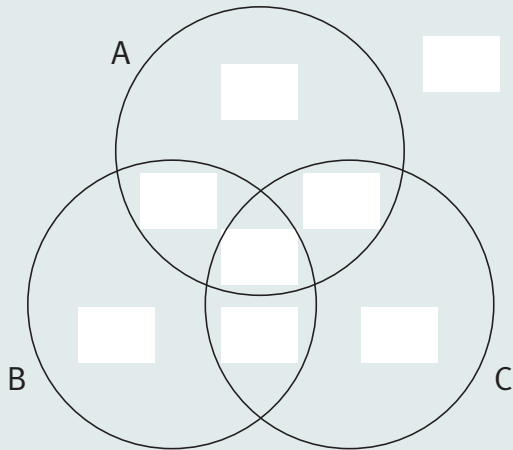
$b \Rightarrow a$	$\neg b \Rightarrow a$	$b \Rightarrow \neg a$	$\neg b \Rightarrow \neg a$	$\neg a \Rightarrow \neg b$
☐	☐	☐	☐	☐

Teil-2-Aufgaben

1.051 Leseverhalten von Studierenden

Bei einer Umfrage unter 500 Studierenden wurde danach gefragt, welche der drei Zeitungen A, B oder C sie lesen. Von 240 Studierenden, die die Zeitung A lesen, lesen 175 nur diese Zeitung A. 64 Studierende lesen nur die Zeitung B. 5 Studierende lesen nur die Zeitungen B und C. 15 Studierende lesen die Zeitungen A und B, nicht aber die Zeitung C. 32 Studierende lesen die Zeitungen A und C, nicht aber die Zeitung B. 180 Studierende lesen keine der drei Zeitungen.

a) Vervollständigen Sie das untenstehende Diagramm mit den passenden Zahlenwerten.



b) Wie viele Studierende lesen alle drei Zeitungen?

c) Wie viele Studierende lesen nur die Zeitungen B und C?

d) Wie viele Studierende lesen nur die Zeitung C?

1.052 Die Logik-Fallstudie: Das Server-Dilemma

Ein IT-Unternehmen hat drei Server: Server A, Server B und Server C. Für die Wartung gelten strenge Sicherheitsvorschriften, die durch folgende drei Regeln beschrieben werden:

- Regel 1: Wenn Server A läuft, dann läuft Server B nicht oder Server C läuft.
- Regel 2: Es ist nicht der Fall, dass Server B läuft und Server C nicht läuft.
- Regel 3: Server C läuft genau dann, wenn Server A läuft oder Server B läuft.

a) Es sind die drei Aussagen a: Server A läuft, b: Server b läuft und c: Server C läuft gegeben.

Übersetzen Sie die drei Regeln (R_1 , R_2 und R_3) der IT-Abteilung in formale logische Ausdrücke

R_1 :

R_2 :

R_3 :

b) Damit das System sicher läuft, müssen alle drei Regeln gleichzeitig erfüllt sein.

Stellen Sie die Gesamtformel G für das System auf.

G:

c) Erstellen Sie eine vollständige Wahrheitstabelle für die drei Regeln und die Gesamtformel G.

d) Beantworten Sie mithilfe der Wahrheitstabelle, in welcher konkreten Server-Konfiguration das System sicher läuft.

1.053 Let $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x < 5\}$ and $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x \leq 7\}$.

Task: Put a cross next to the correct intersection¹ ($A \cap B$). [1 out of 5]

$\{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < 5\}$	☐
$\{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 7\}$	☐
$\{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 3\}$	☐
$\{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leq x \leq 5\}$	☐
$\{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leq x < 5\}$	☐

¹ **intersection** = Schnittmenge

1.054 For any two subsets² A and B of a universal set³ U, certain algebraic laws⁴ always hold true.

Task: Put a cross next to each of the two statements that are true. [2 out of 5]

$A \setminus B = B \setminus A$	☐
$A \cup B = B \cup A$	☐
$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$	☐
$A \cap B = A \cup B$	☐
$A \cup \emptyset = \emptyset$	☐

² **subset** = Teilmenge

³ **universal set** = Grundmenge

⁴ **algebraic laws** = Rechengesetze

1.055 Consider the following two sets⁵: $A = \{1, 2, 3\}$ and $B = \{1, 2, 3, 4\}$.

Task: Which of the following statements is true? Put a cross next to the correct statement. [1 out of 5]

$A \subset B$	☐
$B \subset A$	☐
$4 \in A$	☐
$A \cup B = A$	☐
$A \cap B = B$	☐

⁵ **set** = Menge

1.056 Let the universal set be $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ and let $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ be a subset of U.

Task: Determine the complement⁶ of A (denoted as $\overline{A}$) with respect to U.

$\overline{A} = \{ \quad \quad \quad \}$

⁶ **complement** = Komplementärmenge

1.057 Two mathematical expressions and four descriptions (results) are given.

Task: Match each mathematical expression on the left with its correct description or result on the right by writing the corresponding letter (A–D) into the box.

$A \setminus A$	
$A \setminus B$	

A	$\emptyset$ (empty set ⁷)
B	The set of elements that are in A or in B or in both (union ⁸).
C	The set of elements that belong to A but not to B (set difference ⁹).
D	the set of elements that are in both A and B (intersection).

⁷ **empty set** = leere Menge

⁸ **union** = Vereinigungsmenge

⁹ **set difference** = Differenzmenge

1.058 Let A and B be two logical statements (propositions). Various compound statements can be formed using logical connectives.

Task: Put a cross next to each of the two statements that are true. [2 out of 5]

The conjunction ¹⁰ $A \wedge B$ is true if and only if both statements A and B are true.	☐
The implication ¹¹ $A \Rightarrow B$ is false if A is false and B is true.	☐
The expression $\neg(A \wedge B)$ is logically equivalent to $\neg A \wedge \neg B$ according to De Morgan's Laws.	☐
The disjunction ¹² $A \vee B$ is true if at least one of the propositions is true.	☐
An equivalence ¹³ $A \Leftrightarrow B$ is true only when both A and B are false.	☐

¹⁰ **conjunction** = Konjunktion/UND-Verknüpfung

¹¹ **implication** = Implikation/WENN-DANN-Verknüpfung

¹² **disjunction** = Disjunktion/ODER-Verknüpfung

¹³ **equivalence** = Äquivalenz/GENAU DANN-WENN-Verknüpfung

1.059 Consider the following two propositions regarding a specific ecosystem:

p: "The average temperature increases."

q: "The glacier melts."

$\neg p$... negation¹⁴ of p

$\neg q$... negation of q

¹⁴ **negation** = Negation/Verneinung

Task: Put a cross next to each of the two statements that are true. [2 out of 5]

The expression $p \Rightarrow q$ translates to: „If the average temperature increases, then the glacier melts.“	☐
The expression $\neg p \wedge q$ translates to: „The average temperature does not increase or the glacier melts.“	☐
The expression $q \Rightarrow p$ translates to: „The average temperature increases only if the glacier melts.“	☐
The expression $p \vee \neg q$ translates to: „The average temperature increases or the glacier does not melt.“	☐
The expression $p \wedge \neg q$ translates to: „If the average temperature increases, the glacier does not melt.“	☐

1.060 A proposition is called a tautology¹⁵ if its truth value¹⁶ is always true, regardless of the individual truth values of its statements. A and B are statements.

Task: Put a cross next to the two expressions that represent a tautology. [2 out of 5]

$A \wedge \neg A$	☐
$A \vee \neg A$	☐
$A \Rightarrow (A \vee B)$	☐
$(A \vee B) \Rightarrow B$	☐
$A \Leftrightarrow \neg A$	☐

¹⁵ **tautology** = Tautologie/immer wahre Aussage

¹⁶ **truth value** = Wahrheitswert

1.061 Dietary Habits at a School Cafeteria

A school cafeteria analyzed the dietary requirements of students to adjust their daily lunch menu. The survey focused on three specific dietary profiles: Vegetarian (V), Gluten-Free (G), and Lactose-Free (L).

The analysis showed the following distribution:

- 48 students prefer vegetarian meals (V).
- 35 students require gluten-free meals (G).
- 32 students require lactose-free meals (L).
- 12 students are both vegetarian and need gluten-free meals.
- 10 students need both gluten-free and lactose-free meals.
- 8 students are vegetarian and need lactose-free meals.
- 5 students fall into all three categories.

- Illustrate the survey results using a Venn diagram. Calculate the number of students who have no special dietary restrictions (i.e., those who eat everything).
- Translate the following descriptions from the cafeteria manager into formal set notation:
 - “The set of students who are vegetarian but can tolerate both gluten and lactose.”
 - “The set of students who have at least one of the three dietary restrictions.”
- The cafeteria wants to introduce a special “Allergen-Free Combo” designed for students who need either gluten-free or lactose-free meals, but not both (regardless of whether they are vegetarian or not).
 - Shade the corresponding area in a Venn diagram.
 - Calculate the total number of students who qualify for this combo.

1.062 Automated Smart Home Greenhouse System

An automated greenhouse uses modern sensors to control ventilation and irrigation. Let us model the control unit using propositional logic with the following three atomic propositions:

H: “The soil humidity is low.”

T: “The internal temperature exceeds 28 °C.”

W: “The water reservoir is empty.”

- The safety protocol states that the automated sprinkler system is activated if and only if the soil humidity is low and the water reservoir is not empty.

Formulate a logical expression in terms of H and W to represent this safety protocol condition.

- The system architect creates the following safety override rule for ventilation: $(T \wedge \neg W) \Rightarrow V$, where V means “Ventilation is turned on”.

Interpret the meaning of this formula in the given context and describe a scenario in which the implication is automatically true because its premise is false.

- Complete the truth table below for the complex statement $\neg(H \vee T) \Leftrightarrow (\neg H \wedge \neg T)$ to prove whether it represents a tautology or a contradiction¹⁷.

¹⁷ **contradiction** = Widerspruch

H	T	$H \vee T$	$\neg(H \vee T)$	$\neg H \wedge \neg T$	$\neg(H \vee T) \Leftrightarrow (\neg H \wedge \neg T)$
t	t				
t	f				
f	t				
f	f				

Kapitel 2

Zahlen und Zahlenbereiche

Unser Alltag basiert auf Zahlen. Hinter dem, was wir im Unterricht als „Zahlenbereiche“ lernen, verbirgt sich eine der beeindruckendsten Entwicklungsgeschichten der Menschheit. Es ist die Geschichte, wie wir gelernt haben, die Welt in immer präzisere Raster zu fassen.

Wer im Winter bei -5°C auf den Bus wartet oder einen Kontostand von -15 € ausgleichen muss, verlässt die Welt der natürlichen Zahlen ($\mathbb{N}$), hier übernehmen die ganzen Zahlen ($\mathbb{Z}$). Spätestens am Esstisch stößt die ganze Zahl an ihre Grenzen. Es schlägt die Stunde der rationalen Zahlen ($\mathbb{Q}$). Als Brüche oder Kommazahlen begleiten sie uns beim Kochen ($\frac{1}{2}\text{ l}$ Milch), oder beim Messen der Körpergröße ($1,65\text{ m}$).

Wir erreichen die Grenzen des Messbaren, wenn Natur und Geometrie ins Spiel kommen: beim Berechnen der Kreiszahl π für ein Fahrrad oder der Diagonale eines quadratischen Feldes betreten wir das Reich der irrationalen Zahlen. Zusammen mit den rationalen Zahlen bilden sie die reellen Zahlen ($\mathbb{R}$) und schließen die letzten lückenlosen Punkte auf unserem mathematischen Zahlenstrahl.



Grundkompetenzen

- | | |
|-----------------|---|
| AG-R 1.1 | Wissen über die Zahlenmengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ verständig einsetzen können |
| AG-R 1.2 | Wissen über algebraische Begriffe angemessen einsetzen können:
[...] Formeln, (Un-)Gleichungen, ..., Umformungen, ... |
| AG-L 1.4 | Zahlen in einem nichtdekadischen Zahlensystem darstellen können |
| Kontexte | Prozent, Promille, ppm (parts per million), ppb (parts per billion)
Größen, Einheiten und Symbole des SI-Einheitensystems
Physikalische Größen und ihre Einheiten |

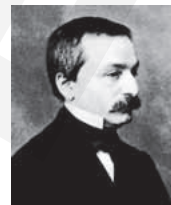
Lernziele

- Über das Erweitern von Zahlenmengen anhand von natürlichen, ganzen, rationalen und reellen Zahlen reflektieren können
- Zahlen, Beträge von Zahlen und Intervalle auf einer Zahlengeraden darstellen können
- Zehnerpotenzen zum Erfassen von sehr kleinen und sehr großen Zahlen in anwendungsorientierten Bereichen einsetzen können
- Rechenregeln für Zehnerpotenzen kennen
- Mit Näherungswerten sinnvoll umgehen können
- Mit Primzahlen und Teilern arbeiten können
- Teilbarkeitsfragen untersuchen können

2.1 Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$

Der deutsche Mathematiker Leopold Kronecker (1823–1891) lieferte durch seine Forschung wichtige Beiträge zur Algebra und Zahlentheorie.

Der bekannteste Ausspruch von Kronecker ist „... **Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk** ...“. Dieser stammt aus einem Vortrag über elliptische Funktionen auf der Berliner Naturforscher-Versammlung.



Die natürlichen Zahlen entstehen einfach durch Zählen. Von einer natürlichen Zahl zur nächsten kommt man, indem 1 addiert wird.



Die Menge der **natürlichen Zahlen** $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; \dots\}$ ist dadurch gekennzeichnet, dass

- jede Zahl einen Nachfolger besitzt, der um 1 größer ist.
- jede Zahl (ausgenommen 0) einen Vorgänger besitzt, der um 1 kleiner ist.

2.001 Gegeben sind Zahlen. Kreuze jene beiden Zahlen an, die in $\mathbb{N}$ sind. [2 aus 5]

☐	☐	☐	☐	☐
$\frac{35}{7}$	-1	$(-4)^2$	$(-5)^3$	$\frac{4}{3}$

2.002 Gegeben sind natürliche Zahlen. Bestimme ihren Vorgänger und Nachfolger.

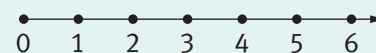
a) 4	Vorgänger: <input type="text" value="3"/>	Nachfolger: <input type="text" value="5"/>	b) 26	Vorgänger: <input type="text"/>	Nachfolger: <input type="text"/>
c) 1	Vorgänger: <input type="text"/>	Nachfolger: <input type="text"/>	d) 0	Vorgänger: <input type="text"/>	Nachfolger: <input type="text"/>
e) 37	Vorgänger: <input type="text"/>	Nachfolger: <input type="text"/>	f) 100	Vorgänger: <input type="text"/>	Nachfolger: <input type="text"/>

2.003 Gib den Vorgänger und Nachfolger der gegebenen natürlichen Zahl an.

a) $n + 8$	→ Vorgänger: <input type="text"/>	; Nachfolger: <input type="text"/>
b) n^2	→ Vorgänger: <input type="text"/>	; Nachfolger: <input type="text"/>
c) $(n + 1)^2 =$ <input type="text"/>	→ Vorgänger: <input type="text"/>	; Nachfolger: <input type="text"/>
d) $2n + 1$	→ Vorgänger: <input type="text"/>	; Nachfolger: <input type="text"/>
e) $2 \cdot (n + 1) =$ <input type="text"/>	→ Vorgänger: <input type="text"/>	; Nachfolger: <input type="text"/>
f) $(n + 2)^2 =$ <input type="text" value="n^2 + 4n + 4"/>	→ Vorgänger: <input type="text" value="n^2 + 4n + 3"/>	; Nachfolger: <input type="text"/>

Die natürlichen Zahlen sind geordnet, das bedeutet:

Für zwei verschiedene natürliche Zahlen m und n gilt entweder $m < n$ oder $m > n$. Die Darstellung auf dem Zahlenstrahl entspricht daher einzelnen Punkten, die an einer Kette aufgereiht sind.



2.004 Gegeben sind fünf Aussagen über $\mathbb{N}$. Kreuze die beiden richtigen Aussagen an. [2 aus 5]

Es gibt eine kleinste natürliche Zahl.	☐
Man kann die größte natürliche Zahl angeben.	☐
Jede natürliche Zahl hat eine natürliche Zahl als Vorgänger.	☐
Jede natürliche Zahl hat eine natürliche Zahl als Nachfolger.	☐
0 ist kein Element von $\mathbb{N}$.	☐

2.1 Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$

2.005 Markiere jene Rechnungen, die als Ergebnis keine natürliche Zahl haben.

- a) $8 \cdot 6 = 48$ b) $6 : 4 = 1,5 \notin \mathbb{N}$ c) $8 + 7 =$ d) $5 - 3 =$
 e) $3 - 5 =$ f) $5 \cdot 0 =$ g) $3 \cdot 4 =$ h) $2 + 3 =$
 i) $12 : 3 =$ j) $16 : 5 =$ k) $0 \cdot 0 =$ l) $16 : 0 =$

Wir erkennen, dass das Ergebnis nicht immer in der Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ liegt.

Eine **Zahlenmenge** heißt **abgeschlossen** bezüglich einer Rechenoperation, wenn die Rechenoperation in dieser Zahlenmenge uneingeschränkt ausgeführt werden kann.

Die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ ist bezüglich der Addition und der Multiplikation abgeschlossen.

Rechengesetze für die natürlichen Zahlen:

Für $a, b, c \in \mathbb{N}$ gilt:	Addition		Multiplikation	
Kommutativgesetz	$a + b = b + a$	KG +	$a \cdot b = b \cdot a$	KG ·
Assoziativgesetz	$a + (b + c) = (a + b) + c$	AG +	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$	AG ·
Existenz eines eindeutig bestimmten neutralen Elements	$a + 0 = 0 + a = a$	N +	$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$	N ·
Distributivgesetz	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$		$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$	
				DG

2.006 Gegeben sind Aussagen über die Rechengesetze in der Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$. Kreuze die beiden zutreffenden Aussagen an. [2 aus 5]

1 ist das neutrale Element der Addition.	☐
$\mathbb{N}$ ist bezüglich der Subtraktion abgeschlossen.	☐
0 ist das neutrale Element der Addition.	☐
$\mathbb{N}$ ist bezüglich der Division abgeschlossen.	☐
1 ist das neutrale Element der Multiplikation.	☐

Gerade und ungerade natürliche Zahlen

Alle geraden natürlichen Zahlen lassen sich in der Form $2n$ ($n \in \mathbb{N}$) darstellen, alle ungeraden Zahlen in der Form $2n + 1$ ($n \in \mathbb{N}$) bzw. $2n - 1$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

2.007 Berechne für $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$ die folgenden Ausdrücke.

- a) $2n + 1$: 1, 3, 5, 7, 9, 11, ... b) $2n - 1$ (ab $n = 1$):
 c) $2n$: d) $4n$:

Die Menge $\mathbb{N}$ kann in verschiedene Teilmengen zerlegt werden:

Besondere Teilmengen von $\mathbb{N}$

Positive natürliche Zahlen: $\mathbb{N}^* = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; \dots\}$

Gerade natürliche Zahlen: $\mathbb{N}_g = \{0; 2; 4; 6; 8; 10; \dots\}$

Ungerade natürliche Zahlen: $\mathbb{N}_u = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots\}$

2 Zahlen und Zahlenbereiche

2.008 Gegeben sind die Zahlenbereiche 1) $\mathbb{N}_g$ und 2) $\mathbb{N}_u$. Argumentiere, ob der Zahlenbereich gegenüber der angeführten Operation abgeschlossen ist oder gib ein Gegenbeispiel an.

- a) $2n$ b) $(n + 1)^2$ c) $m + n$ d) $m \cdot n$ e) $3n$ f) $n : 2$

2.009 Kreuze die nicht zutreffende Aussage an. [1 aus 5]

$\mathbb{N}_g \cap \mathbb{N}_u = \{ \}$	☐
$\mathbb{N}_g \cup \mathbb{N}_u = \mathbb{N}$	☐
$\mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N} = \{0\}$	☐
$\mathbb{N} \cap \mathbb{N}_g = \mathbb{N}_g$	☐
$\mathbb{N} \cup \mathbb{N}^* = \mathbb{N}$	☐

Primzahlen

Eine natürliche Zahl $p > 1$ heißt **Primzahl**, wenn sie genau zwei verschiedene Teiler besitzt, 1 und p .

2.010 Eine Möglichkeit zum Finden der Primzahlen ist das Sieb des Eratosthenes. Es werden alle Vielfachen einer Zahl gestrichen. Führe dieses Verfahren anhand der nebenstehenden Abbildung durch und bestimme so jene 25 Primzahlen, die kleiner als 100 sind.

Primzahlen:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Eratosthenes von Kyrene (276–195/194 v. Chr.) forschte auf den Gebieten der Mathematik, der Geografie und der Geschichte. Außerdem war er Philologe, Philosoph und Dichter. Im Auftrag der ägyptischen Könige leitete er mehr als 50 Jahre die Bibliothek von Alexandria, die bedeutendste Bibliothek der Antike. Berühmt wurde er durch seine genauen Messungen, die eine Berechnung des Erdumfangs ermöglichten. Er zeigte damit, dass die Erde keine Scheibe sein kann.



Es gibt **unendlich viele Primzahlen**. Jede natürliche Zahl größer als 1 ist entweder selbst eine Primzahl oder lässt sich eindeutig (bis auf die Reihenfolge) als Produkt von Primzahlen schreiben.

2.011 Schreibe die Zahlen als Produkte von Primzahlen.

a) $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3$

b) $56 =$

c) $100 =$

d) $36 =$

e) $66 =$

f) $350 =$

g) $144 =$

h) $196 =$

i) $225 =$

2.1 Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$

GeoGebra

Primfaktorzerlegung
Primfaktoren(Zahl)

1 Primfaktoren(180)

→ {2, 2, 3, 3, 5}

Eigene Technologie

2.012 Begründe, ob es sich bei den nachfolgenden Zerlegungen um Primfaktorzerlegungen handelt.

- a) $45 = 3^2 \cdot 5$ b) $567 = 3^3 \cdot 21$ c) $7\,644 = 2 \cdot 3 \cdot 7^2 \cdot 26$
d) $975 = 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 13$ e) $4\,209 = 61 \cdot 69$ f) $7\,177\,599 = 3^3 \cdot 11^2 \cdot 13^3$

2.013 Gegeben sind Aussagen über Primzahlen. Kreuze die beiden richtigen Aussagen an. [2 aus 5]

Primzahlen gibt es nur im Zahlenraum 100.	☐
Primzahlen lassen sich nur durch 1 und sich selbst teilen.	☐
Es gilt: $95 = 1 \cdot 95$, somit ist 95 eine Primzahl.	☐
Es gibt keine gerade Primzahl.	☐
Alle Primzahlen sind natürliche Zahlen.	☐

2.014 Erkläre, warum 1 keine Primzahl sein kann.

Eine sehr einfache Methode, um festzustellen, ob eine Zahl n eine Primzahl ist, ist die sogenannte **Probedivision**. Dabei probiert man nacheinander, ob eine Primzahl p , für welche $2 \leq p \leq \sqrt{n}$ gilt, Teiler der Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist.

2.015 Überprüfe, ob folgende Zahlen Primzahlen sind, und gib an, welche Primzahlen für eine Zerlegung überprüft werden müssen.

- a) 37 b) 269 c) 1 001 d) 587 e) 1 993 f) 1 969 g) 3 277

Eine **natürliche Zahl** n ($n \neq 0$) heißt **teilbar** durch eine natürliche Zahl a , wenn gilt: $n = q \cdot a$, wobei q ebenfalls eine natürliche Zahl ist.

Sprechweisen:

$a \mid n$	a teilt n	a ist ein Teiler von n	n ist ein Vielfaches von a
$a \nmid n$	a teilt nicht n	a ist kein Teiler von n	n ist kein Vielfaches von a

2.016 Setze das korrekte Zeichen $\mid$ oder $\nmid$ ein.

- a) $24 \square 8$ b) $8 \square 24$ c) $3 \square 27$ d) $16 \square 4$
e) $7 \square 56$ f) $13 \square 52$ g) $17 \square 153$ h) $4 \square 162$

2.017 Gegeben sind zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft $a \mid b$. Kreuze jene Aussage an, die jedenfalls zutrifft. [1 aus 5]

$a = k \cdot b$ mit $k \in \mathbb{N}^*$	$b = k \cdot a$ mit $k \in \mathbb{N}^*$	$a = b$	$b \mid a$	$b \nmid a$
☐	☐	☐	☐	☐

Spezielle Teilbarkeitsregeln für natürliche Zahlen:

Eine natürliche Zahl ist durch

- 2 teilbar, wenn die Einerziffer gerade ist.
- 5 teilbar, wenn ihre letzte Ziffer 0 oder 5 ist.
- 3 bzw. 9 teilbar, wenn die Ziffernsumme durch 3 bzw. 9 teilbar ist.
- 4 bzw. 25 teilbar, wenn die Zahl aus den letzten beiden Ziffern durch 4 bzw. 25 teilbar ist.
- 11 teilbar, wenn die alternierende Ziffernsumme 0 ist.

2.018 Formuliere Teilbarkeitsregeln für 6 bzw. 12 mit den bekannten Teilbarkeitsregeln.

6:

12:

2.019 a) Finde eine andere Teilbarkeitsregel für 4 neben jener, welche im Merkkasten angegeben ist. Leite anhand dieser Teilbarkeitsregel für 4 auch eine für 8 her.

Tip: Untersuche die beiden geraden Zahlen 24 und 26, wobei 24 durch 4 teilbar ist und 26 nicht.

b) Recherchiere beispielsweise im Internet nach einer Teilbarkeitsregel für 7.

2.020 Überprüfe die folgenden Aussagen.

- a) $9 \mid 126$ b) $4 \mid 122$ c) $3 \mid 242$ d) $25 \mid 1\,250$ e) $11 \mid 143\,572$ f) $5 \mid 138$
 g) $2 \mid 3\,232$ h) $6 \mid 5\,436$ i) $7 \mid 497$ j) $8 \mid 9\,800$ k) $10 \mid 5\,000$ l) $12 \mid 16\,226$

2.021 Gegeben sind die Zahlen $a = 3$, $b = 6$, $c = 12$. Überprüfe anhand der Beispiele die Gültigkeit der Aussagen und beweise sie.

- a) $a \mid b \wedge b \mid c \Rightarrow a \mid c$ b) $a \mid b \wedge a \mid c \Rightarrow a \mid (b + c)$ c) $a \mid b \wedge b \mid c \Rightarrow a \mid (b - c)$

zu a) $3 \mid 6 \wedge 6 \mid 12$ und $3 \mid 12$, die Schlussfolgerung stimmt.

$a \mid b \Leftrightarrow b = k \cdot a$, $b \mid c \Leftrightarrow c = q \cdot b$, daher ist c auch $c = q \cdot k \cdot a$. Also gilt auch $a \mid c$.

2.022 Welche Behauptungen sind richtig? Begründe deine Antwort oder führe ein Gegenbeispiel an.

- a) $9 \mid n \Rightarrow 3 \mid n$ b) $6 \mid n \Rightarrow 3 \mid n$ c) $2 \mid n \Rightarrow 4 \mid n$ d) $25 \mid n \Rightarrow 4 \mid n$ e) $3 \mid n \Rightarrow 9 \mid n$

Die **Teilmengen** T_n oder $T(n)$ einer natürlichen Zahl n enthält alle natürlichen Zahlen, durch die man die Zahl n restlos teilen kann. Die unechten Teiler (1 und die Zahl selbst) sind stets Elemente der Teilmengen. Alle restlichen Teiler nennt man echte Teiler.

2.023 Bestimme die Teilmenge der folgenden Zahlen.

- a) $n = 24$ b) $n = 36$ c) $n = 45$ d) $n = 100$ e) $n = 12$ f) $n = 44$

zu a) Die Primfaktorzerlegung lautet $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$, daher müssen in der Teilmenge alle Kombinationen von Vielfachen dieser Zahlen enthalten sein:

$$T(24) = \{1; 2; 3; 2 \cdot 2; 2 \cdot 3; 2 \cdot 2 \cdot 2; 2 \cdot 2 \cdot 3; 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3\} = \{1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24\}$$

2.024 Bestimme den größten gemeinsamen Teiler (ggT) mittels 1) der Teilmengen, 2) der Primfaktorzerlegung.

- a) $\text{ggT}(18, 30)$ b) $\text{ggT}(45, 60)$ c) $\text{ggT}(24, 42)$ d) $\text{ggT}(25, 50, 80)$ e) $\text{ggT}(17, 85, 102)$

zu a) (1) $T_{18} = \{1; 2; 3; 6; 9; 18\}$, $T_{30} = \{1; 2; 3; 5; 6; 10; 15; 30\} \rightarrow \text{ggT}(18, 30) = 2 \cdot 3 = 6$

$$(2) 18 = 2 \cdot 3 \cdot 3, 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \rightarrow \text{ggT}(18, 30) = 2 \cdot 3 = 6$$

2.2 Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$

2.025 Gegeben sind die Zahl 24 und Teilmengen. Kreuze die beiden zutreffenden Aussagen an. [2 aus 5]

$T_{24} = \{1; 2; 3; 4; 6; 8; 12\}$	☐
1 und 24 sind die unechten Teiler.	☐
Alle Teiler von 24 sind zueinander teilerfremd.	☐
Alle Teiler von 24 sind echte Teiler.	☐
$T_{24} = \{1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24\}$	☐

Zwei Zahlen a und b heißen teilerfremd, wenn $\text{ggT}(a, b) = 1$ gilt

2.026 a) Gib die Teilermenge von 32 an und ermittle jeweils das Produkt zweier Komplementärteiler. Was fällt dir auf?

b) Die Teilermenge von 4 ist $T_4 = \{1; 2; 4\}$.

Welchen Komplementärteiler hat 2?

c) Gegeben ist die Zahl 48.

Welchen Komplementärteiler hat der Teiler 4?

d) Um welche Teilermenge handelt es sich?

Ergänze die Lücken passend.

$T = \{1; \square; 4; 5; \square; 10; 20; \square\}$

In einer geordneten Teilermenge ist der erste Teiler zum letzten Teiler komplementär, der zweite zum vorletzten usw.

2.2 Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$

In vielen Fällen zeigt es sich, dass die natürlichen Zahlen für eine korrekte Beschreibung eines Sachverhalts nicht ausreichen.

Wie geben wir die Temperatur an sehr kalten Wintertagen an? Was bedeutet, dass unser Konto „im Minus“ ist?

Wir erweitern daher die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$, indem wir von null beginnend schrittweise 1 subtrahieren. Die Rechengesetze für die natürlichen Zahlen werden beibehalten.



2.027 Führe mehrere Beispiele im Alltag an, in denen die Verwendung negativer Zahlen sinnvoll ist.

Die **Menge der ganzen Zahlen** $\mathbb{Z} = \{\dots; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; \dots\}$ ist dadurch gekennzeichnet, dass

- jede Zahl einen Nachfolger besitzt, der um 1 größer ist.
- jede Zahl einen Vorgänger besitzt, der um 1 kleiner ist.

2.028 Gegeben sind ganze Zahlen. Bestimme ihre Vorgänger und Nachfolger.

a) -4	Vorgänger: <input type="text" value="-5"/>	Nachfolger: <input type="text" value="-3"/>	b) -6	Vorgänger: <input type="text"/>	Nachfolger: <input type="text"/>
c) 1	Vorgänger: <input type="text"/>	Nachfolger: <input type="text"/>	d) 0	Vorgänger: <input type="text"/>	Nachfolger: <input type="text"/>

2.029 Gegeben sind Aussagen bezüglich der Zahl 24. Kreuze die beiden korrekten Aussagen an. [2 aus 5]

0 ist keine ganze Zahl.	☐	Jede ganze Zahl hat in $\mathbb{Z}$ einen Vorgänger und einen Nachfolger	☐
$-7 \in \mathbb{N}$	☐	Es gibt keine kleinste ganze Zahl.	☐
4 liegt in $\mathbb{N}$, aber nicht in $\mathbb{Z}$.	☐		

2 Zahlen und Zahlenbereiche

2.030 Gib den Vorgänger und Nachfolger der gegebenen ganzen Zahl an.

a) $-2n - 8$

b) $-n$

c) $(n + 1)^2$

d) $2n - 3$ $2n - 4, 2n - 2$

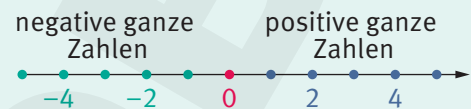
e) -325

f) $4 - 2n$

Die **ganzen Zahlen** sind **geordnet**, das bedeutet:

Für zwei verschiedene ganze Zahlen m und n gilt entweder $m < n$ oder $m > n$.

Die Darstellung auf der Zahlengeraden entspricht daher einzelnen Punkten, die an einer Kette aufgereiht sind.



2.031 Setze die korrekten Relationszeichen $<$ oder $>$ ein.

a) -3 -4

b) 4 -2

c) -1 0

d) -3 0

e) -8 -12

Die Rechengesetze für die natürlichen Zahlen werden um ein Gesetz erweitert:

Für $a, b, c \in \mathbb{Z}$ gilt:	Addition		Multiplikation	
Kommutativgesetz	$a + b = b + a$	KG +	$a \cdot b = b \cdot a$	KG ·
Assoziativgesetz	$a + (b + c) = (a + b) + c$	AG +	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$	AG ·
Existenz eines eindeutig bestimmten neutralen Elements	$a + 0 = 0 + a = a$	N +	$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$	N ·
Existenz eines eindeutig bestimmten inversen Elements	$a + (-a) = (-a) + a = 0$	I +		
Distributivgesetz	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$		$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$	DG

Hier ist selbstverständlich etwa beim KG gemeint: $3 + (-4) = (-4) + 3$, denn es gilt nicht: $3 - 4 = 4 - 3$

2.032 Kreuze die nicht zutreffende Aussage an. [1 aus 5]

Die Menge der ganzen Zahlen ist bezüglich der Subtraktion abgeschlossen.	☐
In $\mathbb{Z}$ kann man uneingeschränkt addieren und multiplizieren.	☐
Bezüglich der Addition existiert in $\mathbb{Z}$ zu jedem Element ein inverses Element.	☐
Das Kommutativgesetz kann in jeder Situation bei der Multiplikation angewendet werden.	☐
In der Menge $\mathbb{Z}$ sind ausschließlich negative Zahlen enthalten.	☐

2.033 Gegeben sind drei ganze Zahlen a , b und c . Ordne den beiden Namen der Rechengesetze jeweils den zutreffenden Ausdruck aus A bis D zu.

Assoziativgesetz	A $a \cdot b = b \cdot a$
Distributivgesetz	B $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
	C $a + (b + c) = (a + b) + c$
	D $a \cdot (b + c) = (a + b) \cdot c$

2.2 Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$

Die Menge $\mathbb{Z}$ kann in verschiedene Teilmengen zerlegt werden:

Besondere Teilmengen von $\mathbb{Z}$

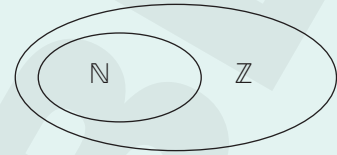
Positive ganze Zahlen: $\mathbb{Z}^+ = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; \dots\}$

Negative ganze Zahlen: $\mathbb{Z}^- = \{\dots; -4; -3; -2; -1\}$

Positive ganze Zahlen mit Null: $\mathbb{Z}_0^+ = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; \dots\}$

Negative ganze Zahlen mit Null: $\mathbb{Z}_0^- = \{\dots; -4; -3; -2; -1; 0\}$

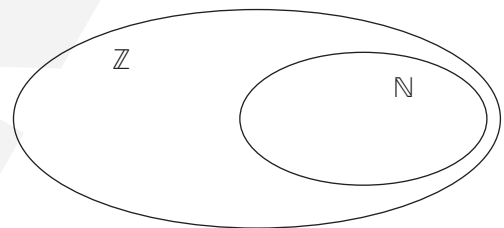
Jede Zahl aus der Menge $\mathbb{N}$ ist auch in der Menge $\mathbb{Z}$ enthalten, aber nicht umgekehrt.



2.034 Kreuze die beiden zutreffenden Aussagen an. [2 aus 5]

$\mathbb{Z}^+ \cap \mathbb{Z}^- = \{\}$	☐
$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{N}$	☐
$\mathbb{Z}_0^+ \cup \mathbb{Z}_0^- = \{0\}$	☐
$\mathbb{Z} \setminus \{0\} = \mathbb{Z}^+$	☐
$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$	☐

2.035 Trage die angegebenen Zahlen in das Mengendiagramm ein.
Wenn eine Zahl in mehreren Zahlenbereichen enthalten ist,
dann trage sie in den kleinsten ein.
3; -3; 0; 4; -15; -1; 32; -100



2.036 Erkläre die Aussage: „Jede natürliche Zahl ist eine ganze Zahl, aber nicht umgekehrt.“

Der **Betrag (Absolutbetrag)** einer ganzen Zahl z ist definiert durch:

$$z = \begin{cases} z & \text{für } z \geq 0 \\ -z & \text{für } z < 0 \end{cases}$$

Auf der Zahlengeraden entspricht der Betrag einer ganzen Zahl $|z|$ dem Abstand vom Ursprung.

2.037 Berechne den Betrag der angegebenen Ausdrücke.

a) $|(-5) \cdot (17 - 10)| = |(-5) \cdot 7| = |-35| = 35$

b) $|(2 - 4) \cdot 5| =$

c) $|25 \cdot (-2 - 1)| =$

d) $|8 \cdot (-7)| =$

e) $|(5 - 8) \cdot (2 - 7)| =$

f) $|(-3 - 2) - (4 - 7)| =$

g) $|(-3) \cdot (5 - (-7)) - |-10|| =$

2.038 Zeige die Gültigkeit der Aussagen durch selbst gewählte $a, b \in \mathbb{Z}$.

a) Dreiecksungleichung: $|a + b| \leq |a| + |b|$

b) Aussage: $|a - b| = |b - a|$

c) Aussage: $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

2.039 Gib alle ganzen Zahlen z an, für die die Gleichung bzw. Ungleichung erfüllt ist.

a) $|z| \leq 5$

b) $|z| \geq 4$

c) $|z + 1| = 3$

d) $|z - 4| = 5$

e) $|z + 2| \leq 7$

f) $|1 - z| \geq 2$

2 Zahlen und Zahlenbereiche

2.040 Gegeben sind Aussagen in Betragsschreibweise und solche mit Ungleichungen für eine Zahl $a \in \mathbb{Z}$. Ordne den beiden Schreibweisen mit Betragsstrichen jeweils die zutreffende Schreibweise ohne Betrag aus A bis D zu.

a) $|a| \leq 9$

$|a + 1| = 9$

A	$a = -9 \vee a = 9$
B	$-9 \leq a \leq 9$
C	$a = -10 \vee a = 8$
D	$-10 < a < 8$

b) $|a| = 9$

$|a + 1| > 9$

A	$a = -9 \vee a = 9$
B	$-9 \leq a \leq 9$
C	$a > 8 \vee a < -10$
D	$a \geq 9$

2.3 Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$

Im Alltag zeigt sich, dass die ganzen Zahlen für eine Beschreibung nicht ausreichen. Preise weisen neben den ganzen Euros auch Teile davon aus, wie hier beispielweise 0,20 €, oder wie wir auch formulieren: 20 Cent. Backen wir eine Torte, dann teilen wir sie in mehrere Teile und man bekommt, wie nebenstehend zu sehen, $\frac{1}{16}$ der gesamten Torte.

Wir erweitern daher die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ derart, dass nun auch eine Division unbeschränkt ausführbar ist, wobei die Division durch null ausgeschlossen wird. Für eine Zahl selbst gibt es zwei Schreibweisen, entweder als Bruch oder als Dezimalzahl.

BAUERNBROT

Roggenmehl 70 %
Weizenmehl 30 %

500 g **2,20 €**



Die **Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$** ist dadurch gekennzeichnet, dass jede Zahl als Bruch dargestellt werden kann: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid (a \in \mathbb{Z}) \wedge (b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}) \right\}$

Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ besitzen folgende Eigenschaften:

- Es gibt keine größte und keine kleinste rationale Zahl.
- Jede rationale Zahl lässt sich als Punkt auf der Zahlengeraden darstellen.
- Die rationalen Zahlen sind geordnet.
- Die rationalen Zahlen sind **dicht**, d. h., zwischen zwei verschiedenen rationalen Zahlen a und b kann immer eine weitere rationale Zahl angegeben werden (z. B. $\frac{a+b}{2}$).

2.041 Berechne das Ergebnis folgender Divisionen.

a) $\frac{11}{18} = 0,6111111111$

$\frac{11}{19} = 0,578947368421052631578...$

$\frac{11}{20} = 0,55$

b) $\frac{5}{12} =$

$\frac{5}{11} =$

$\frac{7}{20} =$

Das Ergebnis besitzt entweder **endlich viele** Dezimalstellen oder **unendlich viele** Dezimalstellen, wobei sich die Ziffernfolgen aber wiederholen. Bei Letzterem spricht man von einer **periodischen Dezimalzahl**. Allfällige Ziffern, die nach dem Komma vor der Periode stehen, bezeichnet man als **Vorperiode**.

Vorperiode Periode

$\frac{11}{210} = 0,0523809523809523...$

Als Periodenlänge bezeichnet man die Anzahl der Ziffern, die jeweils jene Gruppe bilden, die sich wiederholt. Zur Kennzeichnung der Periode wird über den Ziffern ein Strich gezogen, z. B. $0,02\overline{435}$. Wenn die Periode die Länge 1 besitzt, dann erfolgt die Markierung entweder durch einen Strich oder einen Punkt, z. B. $1,\overline{2}$ oder $1,\dot{2}$.

2.3 Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$

Jede **rationale** Zahl kann entweder als **Bruch** oder als **Dezimalzahl** angeschrieben werden. Beachte aber, dass nur Dezimalzahlen mit einer **endlichen** oder **periodischen Dezimalstellenentwicklung** sich als Bruch schreiben lassen und somit rational sind.

2.042 Schreibe korrekt als periodische Dezimalzahl an.

$$\begin{array}{llllll} \frac{1}{3} = 0,\overline{3} & \frac{8}{27} = 0,\overline{296} & \frac{7}{18} = 0,\overline{38} & \frac{8}{15} = & \frac{5}{24} = & \\ \frac{3}{14} = & \frac{5}{12} = & \frac{17}{72} = & \frac{13}{45} = & \frac{19}{90} = & \end{array}$$

Die Rechengesetze für die ganzen Zahlen werden um ein Gesetz erweitert.

Für $a, b, c \in \mathbb{Q}$ gilt:	Addition		Multiplikation	
Kommutativgesetz	$a + b = b + a$	KG +	$a \cdot b = b \cdot a$	KG ·
Assoziativgesetz	$a + (b + c) = (a + b) + c$	AG +	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$	AG ·
Existenz eines eindeutig bestimmten neutralen Elements	$a + 0 = 0 + a = a$	N +	$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$	N ·
Existenz eines eindeutig bestimmten inversen Elements	$a + (-a) = (-a) + a = 0$	I +	$a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = a$	I ·
Distributivgesetz	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$		$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$	
			DG	

2.043 Gib zu den angegebenen Zahlen die inversen Elemente bezüglich der Addition und Multiplikation an.

a) -3 b) $\frac{3}{4}$ c) $-2,5$ d) $\frac{5}{3}$ e) 4 f) $-\frac{2}{3}$

2.044 Gegeben sind zwei rationale Zahlen a und b . Gib jeweils drei weitere rationale Zahlen an, die zwischen a und b liegen.

a) $a = 0$; $b = \frac{1}{4}$ b) $a = -\frac{4}{5}$; $b = -\frac{3}{5}$ c) $a = \frac{7}{9}$; $b = \frac{8}{9}$ d) $a = \frac{1}{2}$; $b = \frac{3}{4}$

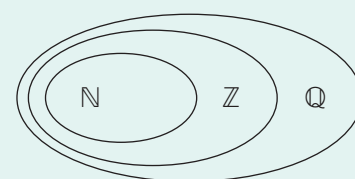
2.045 Es werden Aussagen über rationale Zahlen getroffen. Kreuze die beiden richtigen Aussagen an. [2 aus 5]

Zwischen zwei rationalen Zahlen liegt stets mindestens eine weitere rationale Zahl.	☐
Zu jeder rationalen Zahl gibt es das inverse Element der Multiplikation.	☐
Die Menge $\mathbb{Q}$ ist bezüglich der Division abgeschlossen.	☐
Jede Division zweier rationaler Zahlen, außer jener durch 0, liefert ein rationales Ergebnis.	☐
In der Menge $\mathbb{Q}$ gibt es nur positive Elemente.	☐

Betrachten wir nun wieder die Mengenrelation zwischen den bisher bekannten Zahlenbereichen der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$, der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ und der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$.

$\mathbb{Z}$ als Teilmenge von $\mathbb{Q}$

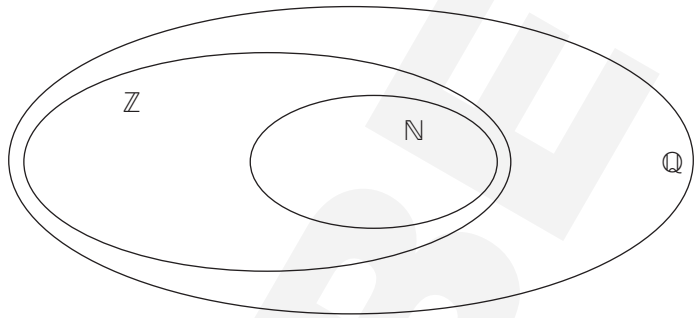
Jede Zahl aus der Menge $\mathbb{Z}$ ist auch in der Menge $\mathbb{Q}$ enthalten, aber nicht umgekehrt. In einem Mengendiagramm wird dies wie nebenstehend dargestellt.



2 Zahlen und Zahlenbereiche

2.046 Trage die angegebenen Zahlen in das Mengendiagramm ein. Wenn eine Zahl in mehreren Zahlenbereichen enthalten ist, dann trage sie in den kleinsten ein.

$-2; \frac{4}{5}; 0; \frac{35}{7}; 4 \cdot (-2); 3 : 5; 1, \overline{2}; -(-\frac{1}{2}); 0,6\overline{25}; (-1)^2$



2.047 Es sind Aussagen über Zahlbereiche formuliert. Kreuze die beiden richtigen Aussagen an. [2 aus 5]

Jede natürliche Zahl ist auch eine rationale Zahl.	☐
Jede ganze Zahl ist auch eine natürliche Zahl.	☐
Jede rationale Zahl ist auch eine ganze Zahl.	☐
Es gibt rationale Zahlen, die auch natürliche Zahlen sind.	☐
Das inverse Element der Addition in der Menge $\mathbb{Q}$ liegt stets in der Menge $\mathbb{Z}$.	☐

2.4 Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$

Bereits die antiken Hochkulturen erkannten, dass es neben den als Bruch darstellbaren Zahlen einen weiteren Zahlbereich geben musste. Das Verhältnis des Umfangs eines Rads zu seinem Durchmesser war für das Beschlagen eines Rads wichtig, aber auch für das Berechnen des Volumens von zylindrischen Getreidespeichern. Es gab Schätzungen durch die Babylonier ($3 + \frac{1}{8} = 3,125$), den Ägypter Ahmes ($\frac{16}{9} \cdot \frac{16}{9} \approx 3,1605$) und indische Astronomen ($\frac{62832}{20000} = 3,1416$).



Archimedes von Syrakus (287–212 v. Chr.) bewies, dass der Umfang eines Kreises sich zu seinem Durchmesser genauso verhält wie die Fläche des Kreises zum Quadrat seines Radius. Er nannte diese Zahl π (pi). Erst Johann H. Lambert (1728–1777) bewies die Irrationalität von π .

Eine **irrationale Zahl** kann nicht als Bruch dargestellt werden. Sie besitzt unendlich viele Dezimalstellen und ist nicht periodisch. Solche Zahlen werden in der Menge $\mathbb{I}$ zusammengefasst.

Irrationale Zahlen sind jene Wurzeln, die nicht aus Quadratzahlen gezogen werden und die bekannten Konstanten π und die Eulersche Zahl e . In Dezimaldarstellung kann man irrationale Zahlen konstruieren: 0,101 001 000 100 001... .

2.048 Im Folgenden werden Aussagen über irrationale Zahlen formuliert.

Kreuze die beiden zutreffenden Formulierungen an, die eine korrekte Aussage ergeben. [2 aus 5]

Eine Zahl heißt irrational, wenn ...

... sie periodisch ist.	☐
... sie als Bruch zweier rationaler Zahlen geschrieben werden kann.	☐
... sie nicht in der Menge $\mathbb{Q}$ liegt.	☐
... sie reell, aber nicht rational ist.	☐
... man sie nicht als Division zweier ganzer Zahlen schreiben kann.	☐

2.049 Erkläre, wie man durch Anhängen weiterer, unendlich vieler Ziffern sowohl 1) irrationale Zahlen als auch 2) rationale Zahlen (mehrere Möglichkeiten!) konstruieren kann.

2.4 Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$

2.050 Ergänze die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine korrekte Aussage entsteht.

Eine periodische Dezimalzahl gehört zur Menge der 1, weil 2.

1	
ganzen Zahlen	☐
rationalen Zahlen	☐
irrationalen Zahlen	☐

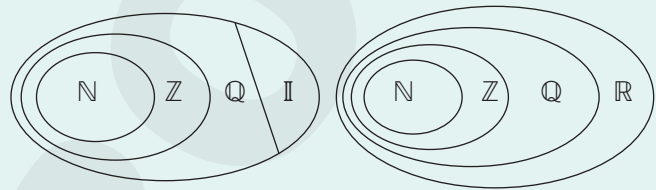
2	
sie unendlich viele Nachkommastellen besitzt	☐
sie durch die Division ganzer Zahlen entsteht	☐
man auch ihre Wurzel berechnen kann	☐

Die **reellen Zahlen $\mathbb{R}$** bestehen aus allen **rationalen ($\mathbb{Q}$)** und allen **irrationalen ($\mathbb{I}$) Zahlen**. Für die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ gelten die gleichen Rechengesetze wie für die rationalen Zahlen.

Die reellen Zahlen können nicht mehr abgezählt werden, es gibt überabzählbar unendlich viele. Ihre Mächtigkeit ist daher größer als jene der Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$.

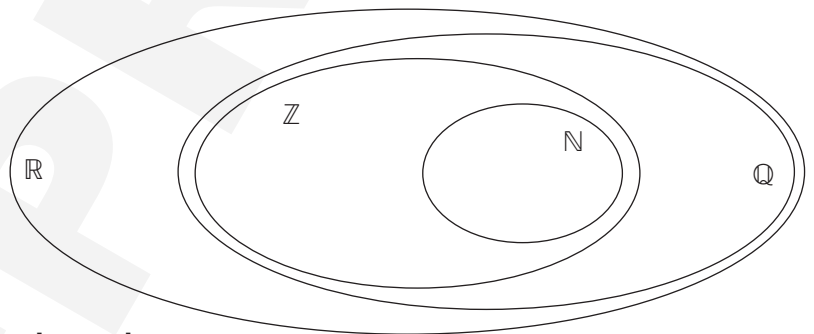
Jede Zahl aus der Menge $\mathbb{Q}$ ist auch in der Menge $\mathbb{R}$ enthalten, aber nicht umgekehrt.

Im Mengendiagramm sind die beiden möglichen Darstellungsarten veranschaulicht



2.051 Trage die angegebenen Zahlen in das Mengendiagramm ein. Wenn eine Zahl in mehreren Zahlenbereichen enthalten ist, dann trage sie in den kleinsten ein.

0 ; $-0,25$; $(-4)^2$; $\sqrt{8}$; $\frac{30}{6}$; $\sqrt[3]{3^4}$; $\sqrt[3]{-8}$; $\sqrt{-16}$; -1



2.052 Gegeben sind fünf Aussagen.

Kreuze die beiden zutreffenden Aussagen an. [2 aus 5]

Die Zahl $\sqrt{16}$ liegt in $\mathbb{R}$, aber nicht in $\mathbb{Z}$.	☐
Die Zahl $-2,5$ liegt in $\mathbb{Q}$ und in $\mathbb{R}$.	☐
Die Zahl π^0 liegt in $\mathbb{R}$ und nicht in $\mathbb{N}$.	☐
Die Zahl $(\sqrt{2})^6$ liegt in $\mathbb{N}$ und in $\mathbb{R}$.	☐
Die Zahl $0,1^{-1}$ liegt nicht in $\mathbb{Z}$, aber in $\mathbb{Q}$.	☐

2.053 Es werden Aussagen über Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ getroffen. Kreuze die jedenfalls nicht zutreffende Aussage an. [1 aus 5]
Für alle $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $a > 0$ gilt:

$a + b \in \mathbb{R}$	$\frac{a}{b} \in \mathbb{R}$	$a - b \in \mathbb{R}$	$b^2 \in \mathbb{R}$	$\sqrt{b} \in \mathbb{R}$
☐	☐	☐	☐	☐

2.054 Gegeben sind Aussagen über Zahlenmengen. Kreuze die beiden zutreffenden Aussagen an. [2 aus 5]

Jede natürliche Zahl ist auch eine reelle Zahl.	☐
Jede reelle Zahl ist auch eine rationale Zahl.	☐
Jede ganze Zahl ist auch eine rationale Zahl.	☐
Jede rationale Zahl ist auch eine natürliche Zahl.	☐
Jede reelle Zahl ist eine irrationale Zahl.	☐

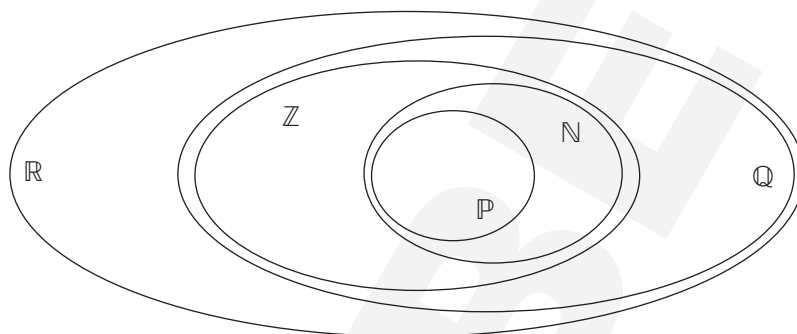
2 Zahlen und Zahlenbereiche

2.055 Trage die angegebenen Zahlen in das Mengendiagramm ein. Wenn eine Zahl in mehreren Zahlenbereichen enthalten ist, dann trage sie in den kleinsten ein.

$\mathbb{P}$ ist die Menge der Primzahlen.

$-7; 0; 8; 23,56; -4,2; \pi; -1, \bar{3};$

$-\frac{1}{\sqrt{2}}; 17; -212; 3; -24$



Intervalle in den reellen Zahlen

Intervalle sind Teilmengen der reellen Zahlen $\mathbb{R}$, die zusammenhängende Bereiche auf der Zahlengeraden darstellen. Die beiden Intervallgrenzen werden als obere bzw. untere Schranke oder Grenze bezeichnet.

Abgeschlossenes Intervall



$$a \leq x \leq b \Leftrightarrow [a; b]$$

Offenes Intervall



$$a < x < b \Leftrightarrow (a; b)$$

Halboffenes Intervall (links offenes Intervall)



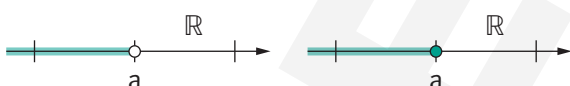
$$a < x \leq b \Leftrightarrow (a; b] \text{ oder }]a; b]$$

Halboffenes Intervall (rechts offenes Intervall)



$$a \leq x < b \Leftrightarrow [a; b) \text{ oder } [a; b[$$

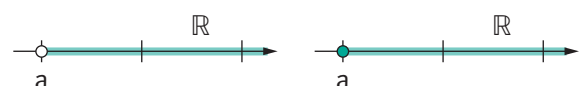
Untere Grenze bei $-\infty$



$$x < a \Leftrightarrow (-\infty; a)$$

$$x \leq a \Leftrightarrow (-\infty; a]$$

Obere Grenze bei $+\infty$



$$x > a \Leftrightarrow (a; \infty)$$

$$x \geq a \Leftrightarrow [a; \infty)$$

2.056 Stelle die folgenden Intervalle auf der Zahlengeraden dar.

- a) $[-3; 2]$ b) $(-\infty; -2)$ c) $[-1; \infty)$ d) $[3; 5)$ e) $(1; 5]$ f) $(-2; 3)$
g) $[1; 3]$ h) $(-\infty; 5)$ i) $[-8; \infty)$ j) $[-4; 10)$ k) $[5; \infty)$ l) $[-8; 10]$

2.057 Schreibe folgende Ungleichungen als Intervalle.

- a) $-4 < x < 7$ b) $-2 \leq x < 0$ c) $5 > x$ d) $x \leq -9$ e) $3 \leq x \leq 10$ f) $7 \leq x$ g) $x > 0$
h) $3 \leq x \leq 9$ i) $-5 < x \leq 0$ j) $x \geq -9$ k) $10 \leq x$ l) $19 > x$ m) $-3 < x \leq 7$ n) $x \leq 0$

2.058 Beschreibe folgende Intervalle mithilfe einer Ungleichung.



2.4 Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$

2.059 Beschreibe folgende Intervalle mittels der Intervallschreibweise.



2.060 Abgebildet ist ein Bereich auf der reellen Zahlen-geraden. Kreuze jenes Intervall an, das diesen Bereich beschreibt. [1 aus 5]



$[-3; 5)$	$[-5; -3]$	$[-2; 4]$	$(-3; -5)$	$[-2; 4)$
☐	☐	☐	☐	☐

2.061 Gegeben ist der Bereich $-1 \leq x < 4$, $x \in \mathbb{R}$.
Kreuze jene beiden Darstellungen an, die diesen Bereich ebenfalls beschreiben. [2 aus 5]

$(-1; 4)$	☐
	☐
	☐
$[-1; 4)$	☐
$0 < x < 3$	☐

2.062 Schreibe mithilfe von Intervallen an.

- Die Mindestabfüllmenge einer 500 ml-Flasche-Ölivenöl beträgt 495 ml, der Hersteller füllt maximal 510 ml ab.
Das Volumen V muss zumindest 495 ml sein, maximal ist es 510 ml: $[495 \text{ ml}; 510 \text{ ml}]$.
- Die Entfernung d zwischen der Erde und der Sonne schwankt je nach Jahreszeit um 2,5 Mio. km um den Mittelwert von 149,6 Mio. km.
- Um bei einem Test mit 100 möglichen Punkten positiv zu sein, braucht man mehr als 60 % der Punkte.
- An einem bestimmten Tag hat es mehr als 50 cm Neuschnee gegeben.
- Jedes Kind in einer bestimmten Kindergruppe ist mindestens 120 cm, jedoch höchstens 150 cm groß.
- Die Angestellten einer Firma verdienen mehr als 1 200 € und weniger als 3 400 €.

2.063 Messungenauigkeiten und ihre Auswirkungen:

- Tatjana soll ein Rechteck mit den Seitenlängen $a = 4,8 \text{ cm}$ und $b = 3,2 \text{ cm}$ zeichnen. Im Allgemeinen zeichnet sie auf einen Millimeter genau.

a und b können 1 mm zu lang oder zu kurz sein, daher gilt:

$$a \in [4,7 \text{ cm}; 4,9 \text{ cm}] \text{ und } b \in [\quad \text{cm}; \quad \text{cm}]$$

Der Sollwert für den Flächeninhalt ist $A = a \cdot b = 15,36 \text{ cm}^2$.

$$\text{Der minimale Flächeninhalt ist } A_{\text{MIN}} = a_{\text{MIN}} \cdot b_{\text{MIN}} = \quad \text{cm}^2,$$

$$\text{der maximale Flächeninhalt ist } A_{\text{MAX}} = a_{\text{MAX}} \cdot b_{\text{MAX}} = \quad \text{cm}^2.$$

$$\text{Daher bewegt sich der Flächeninhalt im Intervall } A \in [\quad \text{cm}^2; \quad \text{cm}^2].$$

- b) Claudia, die normalerweise auf einen Millimeter genau zeichnet, soll eine Raute mit Diagonallängen $e = 8 \text{ cm}$ und $f = 5 \text{ cm}$ zeichnen. Schreibe als Intervall die möglichen Diagonallängen und möglichen Flächeninhalte.
- c) Thomas soll einen Kreis mit dem Radius $r = 6,2 \text{ cm}$ zeichnen. Erfahrungsgemäß ist seine Konstruktion auf $1,5 \text{ mm}$ genau. Schreibe die möglichen Radiuslängen und die möglichen Größen der Flächeninhalt als Intervall an.

- 2.064** Bei den polizeilichen Vermessungsaufgaben nach einem Verkehrsunfall wird der Bremsweg s in Meter gemessen und die Bremsbeschleunigung a des Autos in m/s^2 . Daraus kann die ursprüngliche Geschwindigkeit v in m/s mit der Formel $v = \sqrt{2a \cdot s}$ berechnet werden.



- a) Der Bremsweg wird mit $s = 90 \text{ m} \pm 1 \text{ m}$ gemessen, die Bremsbeschleunigung beträgt $a = 7,5 \text{ m/s}^2 \pm 0,1 \text{ m/s}^2$. Gib jenes Intervall (Intervallgrenze: 3 Dezimalstellen) an, in dem alle möglichen ursprünglichen Geschwindigkeiten des Fahrzeugs liegen.
- b) Auf regennasser Fahrbahn beträgt die Bremsbeschleunigung nur mehr $a = 5,5 \text{ m/s}^2 \pm 0,2 \text{ m/s}^2$. Der Bremsweg war $s = 75 \text{ m} \pm 2 \text{ m}$. Wie schnell fuhr das Fahrzeug? Schreibe alle möglichen Geschwindigkeiten als Intervall (Intervallgrenze: 3 Dezimalstellen) an.

zu a) $v_1 = \sqrt{2 \cdot 7,4 \cdot 89} \approx 36,293 \text{ m/s}$, $v_2 = \sqrt{2 \cdot 7,4 \cdot 91} \approx 37,19214 \text{ m/s}$; $v \in (36,292 \text{ m/s}; 37,192 \text{ m/s})$

2.5 Prozent, Promille, ppm und ppb

Prozent bedeutet stets einen Bezug auf 100, d. h., der Anteil A in der Höhe von 1 % ist der hundertste Teil des Grundwerts G : $A = \frac{1}{100} \cdot G$, p Prozent sind dann $A = \frac{p}{100} \cdot G$.

Promille bedeutet stets einen Bezug auf 1 000, d. h., der Anteil A in der Höhe von 1 ‰ ist der tausendste Teil des Grundwerts G : $A = \frac{1}{1000} \cdot G$, p Promille sind dann $A = \frac{p}{1000} \cdot G$.

Relativer Anteil meint die Prozent- oder Promillezahl (einheitslos) als Bruch oder Dezimalzahl und gibt somit das Verhältnis zur Gesamtheit an. Beispielsweise entspricht ein relativer Anteil von $\frac{3}{100} = 0,03$ entweder 3 % oder 30 ‰.

- 2.065** Schreibe den relativen Anteil als Prozent- beziehungsweise Promillezahl oder umgekehrt. Ergänze dazu die Lücken passend.

- a) $0,04 = \quad \%$ b) $\quad = 25 \%$ c) $0,003 = \quad \text{‰}$
 d) $\quad = 48 \text{ ‰}$ e) $1,5 = \quad \%$ f) $\quad = 1\,070 \text{ ‰}$
 g) $\frac{13}{100} = \quad \%$ h) $\frac{4}{5} = \quad \text{‰}$ i) $\frac{\quad}{20} = 80 \%$

- 2.066** Gegeben sind der Grundwert G und der Anteil in Prozent bzw. Promille. Berechne diesen Anteil.

- a) $G = 200 \text{ €}$; 5 Prozent $A = \frac{5}{100} \cdot G = \frac{5}{100} \cdot 200 = 0,05 \cdot 200 = 10 \text{ €}$
 b) $G = 2\,500 \text{ €}$; 3 Promille $A = \frac{3}{1000} \cdot G = \frac{3}{1000} \cdot 2\,500 = 0,003 \cdot 2\,500 = 7,50 \text{ €}$
 c) $G = 400 \text{ m}$; 4 Promille $A = \quad$
 d) $G = 1\,800 \text{ €}$; 3 Prozent $A = \quad$
 e) $G = 750 \text{ ml}$; 10 Prozent $A = \quad$
 f) $G = 4\,000 \text{ mg}$; 8 Promille $A = \quad$

2.5 Prozent, Promille, ppm und ppb

Veränderungsfaktoren

Vermehrung	um p %: Multiplikation mit $1 + \frac{p}{100}$	um p ‰: Multiplikation mit $1 + \frac{p}{1000}$
Verminderung	um p %: Multiplikation mit $1 - \frac{p}{100}$	um p ‰: Multiplikation mit $1 - \frac{p}{1000}$

2.067 Der Preis von 18,90 € wurde um a) 5 % erhöht, b) 10 % vermindert.

a) Neuer Preis P: A = ; P = G + A =

Allgemein: $P = G + G \cdot \frac{p}{100} = G \cdot (1 + \frac{p}{100})$ In diesem Fall: $P = G \cdot 1,05$

b) Neuer Preis P: A = ; P = G - A =

Allgemein: $P = G - G \cdot \frac{p}{100} = G \cdot (1 - \frac{p}{100})$ In diesem Fall: $P = G \cdot 0,9$

2.068 Der Wirkstoffgehalt im Medikament wurde um a) 8 ‰ vergrößert, b) 5 ‰ vermindert.

a) Neuer Wirkstoffgehalt W: A = ; W = G + A =

Allgemein: $P = G + G \cdot \frac{p}{1000} = G \cdot (1 + \frac{p}{1000})$

b) Neuer Wirkstoffgehalt W: A = ; W = G - A =

Allgemein: $P = G - G \cdot \frac{p}{1000} = G \cdot (1 - \frac{p}{1000})$

2.069 Rechne direkt mit dem Faktor $(1 + \frac{p}{1000})$ bzw. $(1 - \frac{p}{1000})$

a) Das Gehalt von 2 350 € wurde um 2,4 % erhöht. Wie hoch ist das neue Gehalt?

b) Der Preis einer Ware, welche ursprünglich 45,90 € kostete, ist um 150 % gestiegen. Wie viel kostet die Ware jetzt?

c) Das Gewicht von 2 660 g eines Neugeborenen nahm in den ersten Tagen um 4,5 % ab. Wie viel wiegt das Neugeborene nach der Gewichtsabnahme?

d) Der Wert einer Immobilie, welcher ursprünglich 540 000 € betrug, nahm zunächst um 7 % zu und anschließend um 3 % ab. Wie viel ist sie nach den Änderungen nun wert?

e) Die Miete von 2 330 € hat sich um 9 ‰ erhöht. Wie viel beträgt sie dann?

f) Die Raumtemperatur von 24 °C hat um 2,6 ‰ abgenommen. Wie hoch ist die Temperatur in diesem Raum dann?

2.070 Fruchteis soll laut Hersteller einen Fruchtanteil von 25 % besitzen. Berechne, wie viel Frucht in 1,5 kg Eis enthalten ist.



2.071 Von einer Klasse mit 25 Schülerinnen und Schülern nehmen 18 an einem Lehrausgang teil. Berechne, wie viel Prozent der Schülerinnen und Schülern dieser Klasse nicht am Lehrausgang teilnehmen.

2.072 Thomas ist als Versicherungsmakler mit 8,5 % am Umsatz beteiligt (d. h., er erhält 8,5 % der vom Kunden zu bezahlenden Versicherungsprämie). Im vergangenen Monat erhielt er 2 125 € an Provision aus dem Verkauf. Berechne die Höhe der Versicherungsprämien der im vergangenen Monat abgeschlossenen Versicherungsverträge.

2.073 Eine Küchenmaschine kostet nun 349 €. Der ursprüngliche Preis war 399 €. Kreuze die entsprechende Verbilligung in Prozent an. [1 aus 5]

ca. 87 %	ca. 13 %	ca. 1,14 %	ca. 14 %	ca. 0,87 %
☐	☐	☐	☐	☐

2 Zahlen und Zahlenbereiche

- 2.074** In der Kantine erhält das Personal einer Firma einen Rabatt von 15 %. Das Mittagsmenü mit Getränk der Mitarbeiterin Frau Mayrhuber kostet ohne Rabatt 12,40 €. Wie viel muss Frau Mayrhuber bezahlen?
- 2.075** Der CEO einer Firma verkündet stolz, dass der Umsatz in einer bestimmten Sparte im Berichtsjahr um 18 % auf 2,8 Mio. € stieg. Berechne den Umsatz des vorangegangenen Jahres.
- 2.076** Ein Produkt wird um 109,90 € inkl. 20 % MWSt. (Mehrwertsteuer) verkauft. Berechne den Preis, den Diplomaten in Österreich dafür bezahlen müssen (sie bezahlen keine MWSt.).
- 2.077** In Österreich ist auf alle Produkte im Bereich der Elektronik eine Mehrwertsteuer von 20 % zu entrichten. Eine Firma wirbt wie nebenstehend abgebildet. Berechne, wie viel Prozent sich der Kunde beim Kauf eines Produkts erspart.
- 2.078** Bei einer Aktion (siehe Angabe rechts) wird eine Rabattstaffelung angeboten, jedoch bekommt man auf das teuerste Teil den geringsten Rabatt. Eine Kundin kauft drei Stück zu 48 €, 78 € und 150 € (regulärer Preis).
a) Berechne, wie viel die Kundin an der Kassa bezahlt.
b) Berechne den durchschnittlichen Rabatt für jedes Stück.
- 2.079** Ein Paar Schuhe kostete ursprünglich 249 €. Es wurde in einem ersten Schritt um 20 % verbilligt. Jetzt wird wie nebenstehend für den Totalabverkauf geworben. Wie viel kostet das Paar jetzt? Wie groß ist der Rabatt insgesamt in Prozent?
- 2.080** Der menschliche Körper enthält ungefähr 5 l Blut. Nach einem Verkehrsunfall wird festgestellt, dass der Unfalllenker 1,8 ‰ Alkohol im Blut hatte. Berechne die Menge an Alkohol im Blut (in ml) des Unfalllenkers.
- 2.081** Ein Landwirt schließt eine Hagelversicherung über 250 000 € ab. Laut bmf (Bundesministerium für Finanzen) muss er dafür jährlich eine Versicherungssteuer in Höhe von 2 Promille der Versicherungssumme bezahlen. Berechne die Höhe dieser Steuer.
- 2.082** Aus einer Packung mit 500 g Kaffeebohnen fällt eine Bohne mit 0,6 g heraus. Wie viel Promille gehen dadurch verloren?
- 2.083** Frau Huber hat für ihr Haus eine Glasversicherung abgeschlossen. Die jährliche Prämie richtet sich nach dem Gebäudewert und beträgt 0,2 Promille des Gebäudewerts. Frau Huber bezahlt 172 €. Berechne den Gebäudewert.
- 2.084** Ein Weg steigt bei einer waagrechten Entfernung von
a) 180 m um 4 m, b) 220 m um 1,9 m, c) 850 m um 12 m an.
Berechne die Steigung in Prozent.
zu a) $\text{Steigung [\%]} = \frac{\Delta h}{\Delta x} \cdot 100 = \frac{4}{180} \cdot 100 \approx 2,22 \%$
- 2.085** Ein Straßenstück steigt durchschnittlich in Bezug auf die waagrechte Entfernung von
a) 420 m um 6 %, b) 920 m um 2,5 %, c) 1,6 km um 1,5 % an.
Berechne den überwundenen Höhenunterschied.
zu a) $\text{Steigung [\%]} = \frac{\Delta h}{\Delta x} \cdot 100 \rightarrow \Delta h = \frac{\text{Steigung [\%]}}{100} \cdot \Delta x = \frac{6 \cdot 420}{100} = 25,2 \text{ m}$

Heute zahlen Sie
keine
Mehrwertsteuer!

Kauf mehr, spar mehr!
Spare beim 1. Teil 50 %.
Spare beim 2. Teil 55 %.
Spare beim 3. Teil 60 %.

-60 %
Alles muss raus!

2.5 Prozent, Promille, ppm und ppb

2.086 Ergänze die fehlende Angabe.

	Steigung	waagrechte Distanz Δx	Höhenunterschied Δh
a)	24 %	300 m	
b)	5,2 %		128 m
c)		1,8 km	78 m
d)	100 %	24 m	
e)		85 m	200 m

2.087 Eine Straße überwindet nach dem nebenstehenden Schild einen Höhenunterschied von a) 16 m, b) 35 m, c) 50 m. Wie lang ist das Fahrbahnstück?

zu a) $\text{Steigung [\%]} = \frac{\Delta h}{\Delta x} \cdot 100 \rightarrow \Delta x = \frac{\Delta h}{\text{Steigung [\%]}} \cdot 100 = \frac{16}{20} \cdot 100 = 80 \text{ m}$
 $(\Delta s)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta h)^2 \rightarrow \Delta s \approx 81,58 \text{ m}$

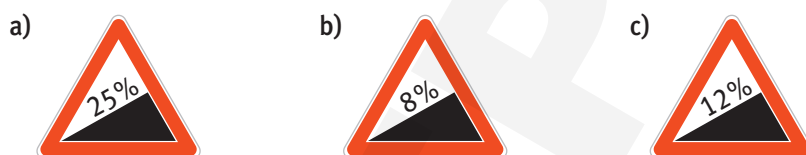
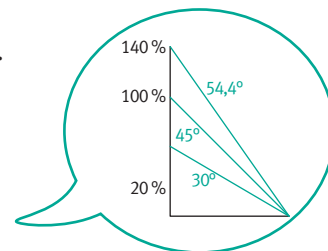


2.088 Ein Radfahrer sieht das abgebildete Straßenschild. Welchen Höhenunterschied überwindet er bei einer Wegstrecke von a) 1 600 m, b) 2 500 m, c) 800 m?

zu a) Wir wissen, dass er auf 100 m waagrechte Entfernung 25 m Höhenunterschied bewältigt. Als Hilfe dient der Proportionalitätsfaktor k : $\Delta x = k \cdot 100$, $\Delta h = k \cdot 25$.
 Pythagoras: $1\,600^2 = (k \cdot 100)^2 + (k \cdot 25)^2 \rightarrow 1\,600^2 = 10\,625 \cdot k^2$
 $\rightarrow k \approx 15,52$, daher ist der Höhenunterschied $\Delta h = k \cdot 25 \approx 388,06 \text{ m}$

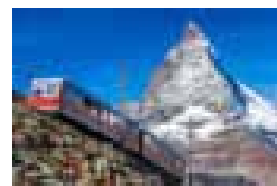


2.089 Berechne den Höhenunterschied auf einer Streckenlänge von 400 m, wenn am Beginn des ansteigenden Straßenstücks das abgebildete Verkehrsschild steht.



2.090 In Rottenegg beginnt der steilste Teil (am Saurüssel) der Mühlkreisbahn mit einer Steigung von 46 Promille. Berechne den überwundenen Höhenunterschied auf einer Streckenlänge von 1,5 km.

2.091 Die Abbildung zeigt einen Zug von Zermatt nach Gornergrat in der 200-Promille-Steigung. Berechne den überwundenen Höhenunterschied auf einer Streckenlänge von 500 m.



Prozentpunkte beschreiben den absoluten Unterschied zwischen zwei relativen Angaben, die in Prozent vorliegen.

2.092 Beschreibe das Ergebnis mittels der Angabe von Prozentpunkten bzw. Prozenten.

a) Die Bürgermeisterin Anita Dobler erreichte bei ihrem ersten Antreten 50,8 % der abgegebenen Stimmen, bei ihrer Wiederwahl 52,6 %.

b) In der Nachbargemeinde erreichte Xaver Huber bei der vorigen Wahl 62,3 %, jetzt 57,8 %.

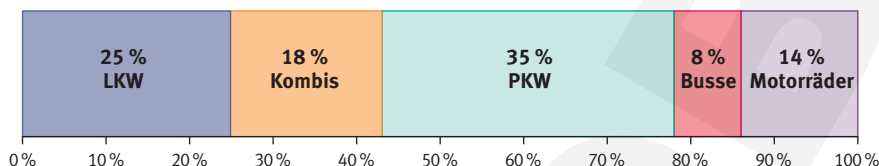
zu a) Anita Dobler konnte ihren Stimmenanteil um $(52,6 - 50,8) = 1,8$ Prozentpunkte steigern.

Anita Dobler konnte ihren Stimmenanteil um ca. $(\frac{52,6}{50,8} \approx 1,035)$ 3,5 % Prozent steigern.

2 Zahlen und Zahlenbereiche

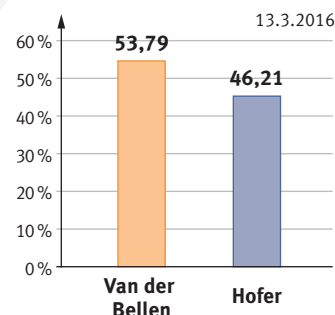
2.093 Eine Partei hat bei der jüngsten Wahl 35 % der gültigen Stimmen bekommen und bei der vorigen Wahl nur 30 %. Stolz verkündet der Parteivorstand, dass sie ihren Stimmanteil um 5 % vergrößern konnten. Erkläre, was an dieser Aussage auszusetzen ist und korrigiere diese.

2.094 Auf einem bestimmten Autobahnabschnitt wurde eine Verkehrszählung gemacht. Die Ergebnisse der Messung sind im untenstehenden Prozentstreifen ersichtlich. Man geht aber von einer gewissen Messungenauigkeit von bis zu 2,5 Prozentpunkten aus.



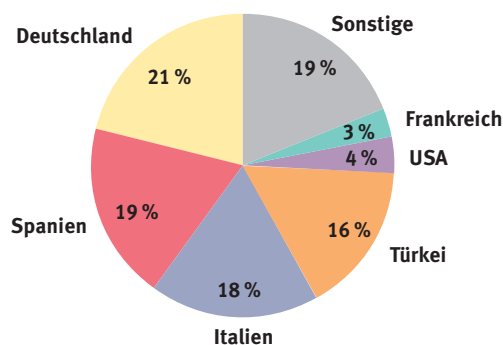
- Gib den möglichen Prozentwert der LKW als Intervall an.
- Ist es möglich, dass doch mehr Motorräder als Kombis in der Zeit der Messung auf diesem Autobahnabschnitt unterwegs waren? Begründe deine Entscheidung.

2.095 Die nebenstehende Grafik stellt das in einer Kundmachung in der Wiener Zeitung verlautbarte Ergebnis der Wiederholung der Stichwahl um das Amt des Bundespräsidenten im Jahr 2016 des bmi (Bundesministerium für Inneres) grafisch dar. Die Anzahl der abgegebenen Stimmen betrug 4 749 404, davon waren 151 851 ungültig.



- Die Wahlbeteiligung betrug 74,21 %. Berechne die Anzahl der Wahlberechtigten.
- Wie viel Prozent der abgegebenen Stimmen waren ungültig?
- Wie viele gültige Stimmen entfielen auf die beiden Kandidaten?
- Wie viel Prozent bzw. Prozentpunkte mehr erhielt der Sieger der Wahl, Dr. Alexander Van der Bellen?

2.096 Nebenstehend ist das Ergebnis einer Umfrage an einer Schule abgebildet. Es wurde gefragt, in welches Land man zuletzt gereist ist. Drücke den Unterschied von Frankreich, USA, Türkei, Italien, Spanien und Deutschland zu „Sonstige“ sowohl in Prozent als auch in Prozentpunkten aus.



ppm (parts per million) steht für Teile pro Million; $1 \text{ ppm} = 10^{-6} = 0,000\,001$

ppb (parts per billion) steht für Teile pro Milliarde (engl. billion); $1 \text{ ppb} = 1 \cdot 10^{-9} = 0,000\,000\,001$

2.097 Ordne den beiden Ausdrücken jeweils die entsprechende Dezimalzahl aus A bis D zu.

0,5 %	
500 ppm	

A	0,005
B	0,05
C	0,0005
D	0,000005

2.6 Gleitkommadarstellung und Maßumwandlungen

- 2.098** Ergänze die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass eine richtige Aussage entsteht.

0,03 Promille entsprechen der Zahl 1 und 3 000 ppb entsprechen der Zahl 2.

1	
0,003	☐
0,0003	☐
0,00003	☐

2	
0,00003	☐
0,000003	☐
0,000000003	☐

- 2.099** Bei der Untersuchung von 150 g eines Salats aus der Feinkostabteilung eines Supermarkts waren 28,5 mg eines Konservierungsstoffes enthalten. Wie viel ppm Konservierungsstoff sind das?
- 2.100** Wie viel Gramm eines Konservierungsstoffes werden benötigt, damit bei 500 kg eines Lebensmittels eine Konzentration von 250 ppm erreicht wird?
- 2.101** Etwa 18,30 % eines menschlichen Körpers ist Kohlenstoff, davon sind 0,1 ppb das radioaktive Kohlenstoffisotop ^{14}C . Berechne die Menge an radioaktivem Kohlenstoff in einem Menschen mit der Masse 80 kg.

2.6 Gleitkommadarstellung und Maßumwandlungen

- 2.102** Schreibe als Zehnerpotenz.

a) $1\,000 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^3$

b) $10\,000\,000 =$

c) $1\,000\,000\,000 =$

d) $0,01 = \frac{1}{100} = \frac{1}{10^2} = 10^{-2}$

e) $0,000001 =$

f) $0,000000001 =$

Wenn der **Exponent** (die Hochzahl) n eine natürliche Zahl ist, dann gilt:

10^n : Die Zahl besitzt n Nullen. *Beispiel:* $10^8 = 100\,000\,000$.

10^{-n} : Die Zahl besitzt n Nullen im Nenner bzw. $(n - 1)$ Nullen nach dem Komma.

Beispiel: $10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1\,000} = 0,001$ $10^0 = 1$

Rechenregeln für Zehnerpotenzen

Für $a, b \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$10^a \cdot 10^b = 10^{a+b}$$

$$10^a : 10^b = 10^{a-b}$$

$$\frac{1}{10^a} = 10^{-a}$$

- 2.103** Multipliziere bzw. dividiere die angegebenen Zehnerpotenzen.

a) $10^2 \cdot 10^3 = 100 \cdot 1\,000 = 100\,000 = 10^5$

b) $10^2 : 10^3 = 100 : 1\,000 = 0,1 = 10^{-1}$

c) $10^3 \cdot 10^6 =$

d) $10^4 \cdot 10^{-5} =$

e) $10^{-3} \cdot 10^{-6} =$

f) $10^{12} : 10^5 =$

g) $10 : 10^{-3} =$

h) $10^{-3} : 10^{-6} =$

Bei der Festkommadarstellung ist die Position des Kommas fix vorgegeben. Diese Schreibweise erweist sich für sehr große und sehr kleine Zahlen aber als unpraktisch. Daher werden solche Zahlen meist mit Zehnerpotenzen in Gleitkommadarstellung angegeben.

Die **normierte Gleitkommadarstellung** einer Zahl $z \in \mathbb{R}$ hat die Form $z = a \cdot 10^b$ mit $b \in \mathbb{Z}$ und $a \in \mathbb{R}$, wobei $1 \leq |a| < 10$.

2 Zahlen und Zahlenbereiche

2.104 Wandle die Festkommadarstellung in eine Gleitkommadarstellung um.

- Lichtgeschwindigkeit: 300 000 km/s.
- Die Sonne ist von der Erde etwa 150 Mio. km entfernt.
- Die Masse des Mondes ist etwa 74 000 000 000 000 000 000 kg.
- Die Masse einer Gelse ist etwa 0,00000225 kg.
- Der Rasterschritt bei einem Tintenstrahldrucker ist 0,000035 Meter groß.

2.105 Schreibe in Gleitkommadarstellung an.

- Der Energieverbrauch in Österreich betrug im Jahr 2015 etwa $1\,087 \cdot 10^{15}$ J.
- Der Stern Alpha Centauri ist von der Erde etwa 40,68 Billionen Kilometer entfernt. Wie groß ist die Entfernung in Meter?
- Der menschliche Körper besteht aus etwa 100 Billionen Zellen.
- Das menschliche Genom, die Desoxyribonucleinsäure (DNA), setzt sich aus etwa 3,2 Milliarden Bausteinen zusammen.
- Beim Versuch von Millikan wurden Öltröpfchen verwendet, die einen Durchmesser von etwa $0,5 \mu\text{m}$ besitzen.

Für bestimmte Zehnerpotenzen gibt es eigene Abkürzungen und Symbole.

Potenz	Vorsilbe	Symbol	Potenz	Vorsilbe	Symbol
10^1	deka	da	10^{-1}	dezi	d
10^2	hekto	h	10^{-2}	centi	c
10^3	kilo	k	10^{-3}	milli	m
10^6	mega	M	10^{-6}	mikro	μ
10^9	giga	G	10^{-9}	nano	n
10^{12}	tera	T	10^{-12}	pico	p
10^{15}	peta	P	10^{-15}	femto	f
10^{18}	exa	E	10^{-18}	atto	a



2.106 Schreibe die gegebenen Maßzahlen möglichst einfach in eine passendere Einheit um.

- $5 \cdot 10^3 \text{ W} =$
- $3 \cdot 10^6 \text{ J} =$
- $0,7 \cdot 10^9 \text{ m} =$
- $70 \cdot 10^{-2} \text{ V} =$
- $0,006 \cdot 10^{-9} \text{ s} =$
- $4530 \cdot 10^{-12} \text{ g} =$

2.107 Zeige, dass 1 Tonne genau einem Megagramm entspricht.

2.108 Wandle in die gefragte Einheit um. Verwende die Schreibweise in Zehnerpotenzen oder Gleitkommadarstellung.

- $500 \text{ cg} = 500 \cdot 10^{-5} \text{ kg}$
- $3,2 \text{ mm} =$ μm
- $75 \text{ km} =$ Gm
- $400 \text{ GB/s} =$ TB/s
- $800 \text{ pm} =$ m
- $12 \text{ cm} =$ nm
- $0,04 \text{ GW} =$ kW
- $45\,000 \text{ pm} =$ μm
- $2,5 \text{ TB} =$ MB
- $68\,000 \text{ ns} =$ ms
- $0,005 \text{ mg} =$ ng
- $8,4 \cdot 10^{12} \text{ pW} =$ kW

zu a) Eine sichere Methode zum Umwandeln bietet zunächst das Rückschreiben auf die „Basis-Einheit“ und anschließend durch die entsprechende Zehnerpotenz zu dividieren:

$$500 \text{ cg} = 500 \cdot 10^{-2} \text{ g} = 500 \cdot 10^{-2} : 10^3 \text{ kg} = 500 \cdot 10^{-5} \text{ kg}$$

$\cdot 10^{-2}$ (wegen centi) $: 10^3$ (wegen kilo)

2.7 Binärsystem

2.109 Wandle in die gesuchte Einheit um und gib dein Ergebnis in Gleitkommadarstellung an.

- a) 750 TB = $7,5 \cdot 10^5$ GB b) 4 530 nm = μm c) 0,05 GHz = kHz
d) 12 000 pm = mm e) 3 500 μg = dag f) 2,5 TB = MB
g) 8 mm = nm h) 0,003 g = ng i) 0,045 pm = km
j) 5,83 ms = ns k) 0,0094 kh = Mh l) 368,23 hl = dl

zu a) $750 \text{ TB} = 750 \cdot 10^{12} \text{ B} = 750 \cdot 10^{12} : 10^9 \text{ GB} = 750 \cdot 10^3 \text{ GB} = 7,5 \cdot 10^2 \cdot 10^3 \text{ GB} = 7,5 \cdot 10^5 \text{ GB}$

2.110 Sebastian ist 176 cm groß und hat eine Masse von 72 kg. Ein 20-Euro-Schein wiegt 0,81 g, ist 100 μm dick, hat eine Breite von 133 mm und eine Höhe von 72 mm. Tina beginnt, einen Turm aus Geldscheinen in der Körpergröße von Sebastian zu bauen. Vervollständige den Satz so, dass er mathematisch korrekt ist.



Sie benötigt 1 Geldscheine, die zusammen 2 kg wiegen.

1		2	
16 500	<input type="text"/>	12,465	<input type="text"/>
17 450	<input type="text"/>	14,256	<input type="text"/>
17 600	<input type="text"/>	15,225	<input type="text"/>

2.111 Das größte Säugetier der Welt ist der Blauwal, er wiegt 200 t. Der leichteste Fisch ist der Stout Infantfish mit 1 mg. Kreuze an, wie viele Stout Infantfish man benötigt, um die Masse eines Blauwals zu erreichen. [1 aus 5]

$2 \cdot 10^{10}$	$2 \cdot 10^2$	$2 \cdot 10^{11}$	$2 \cdot 10^{12}$	$2 \cdot 10^9$
☐	☐	☐	☐	☐

2.7 Binärsystem

Das dekadische Zahlensystem ist ein Stellenwertsystem. Als Grundlage dienen die Potenzen von 10, ihre Vielfachheit wird mithilfe der Ziffern 0 bis 9 ermittelt.

Name	Hunderttausender	Zehntausender	Tausender	Hunderter	Zehner	Einer
Abkürzung	HT	ZT	T	H	Z	E
Zehnerpotenz	10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0

2.112 Schreibe die Zahl mittels der dekadischen Einheiten und der Zehnerpotenzen.

a) 40 513

$$40\,513 = 4 \text{ ZT} + 0 \text{ T} + 5 \text{ H} + 1 \text{ Z} + 3 \text{ E} = 4 \cdot 10^4 + 0 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$$

b) 48 000 =

c) 5 622 =

d) 1 850 000 =

e) 55 243 =

f) 7 000 =

g) 6 572 120 =

Das **Binärsystem** (oder Dualsystem) ist ein Stellenwertsystem mit der Basis 2.

Als Ziffern werden 0 und 1 verwendet. Schreibweise: $[x]_2$

GeoGebra

Umrechnungen Zahlensystem
 VonBasis(Zahl als Text,Basis)
 (Umrechnung ins dekadische System)
 ZuBasis(Zahl,Basis)
 (Umrechnung vom dekadischen in ein
 anderes System)

1 VonBasis(101, 2)
☐ → **5**

2 ZuBasis(5, 2)
☐ → **101₂**

Eigene Technologie

2.113 Wandle die angegebenen Zahlen vom Dezimalsystem in das Binärsystem um.

a) 109

Potenzen von 2: $2^6 = 64$ $2^5 = 32$ $2^4 = 16$ $2^3 = 8$ $2^2 = 4$ $2^1 = 2$ $2^0 = 1$

109 = $1 \cdot 64 + 1 \cdot 32 + 0 \cdot 16 + 1 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \rightarrow 109 = [1101101]_2$

b) 400

c) 85

d) 48

e) 1 000

f) 495

g) 52

h) 37

i) 67

j) 1345

k) 2100

l) 34000

m) 200 000

2.114 Wandle die angegebenen Zahlen vom Dualsystem in das Dezimalsystem um.

a) $[11001101]_2$

Potenzen von 2: $2^7 = 128$ $2^6 = 64$ $2^5 = 32$ $2^4 = 16$ $2^3 = 8$ $2^2 = 4$ $2^1 = 2$ $2^0 = 1$

$[11001101]_2 = 1 \cdot 128 + 1 \cdot 64 + 0 \cdot 32 + 0 \cdot 16 + 1 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 205$

b) $[1011001110]_2$

c) $[111]_2$

d) $[101010]_2$

e) $[11111111]_2$

f) $[100]_2$

g) $[100010010001]_2$

h) $[11111111111111]_2$

i) $[1000000000000011]_2$

j) $[101010101010101010]_2$

2.115 Gegeben ist die Zahl 200 im Dezimalsystem. Eine der angegebenen Darstellungen stellt eine korrekte Umrechnung in das Dualsystem dar. Kreuze die zutreffende Antwort an. [1 aus 5]

11000010	10101000	11000100	11001000	11100000
☐	☐	☐	☐	☐

2.116 Wie kann man sofort erkennen, ob eine Zahl im Dualsystem einer geraden bzw. ungeraden Zahl im Dezimalsystem entspricht?

2.117 Die kleinste Informationseinheit (0/1) wird als Bit bezeichnet.
 8 Bit sind 1 Byte, 2^{10} Byte sind 1 kB (kiloByte), 2^{10} kB sind 1 MB (MegaByte) usw.

- a) Wie viele MB sind 1 GB? 1 GB = 2^{10} MB = 1024 MB
- b) Wie viele GB sind 1 TB? 1 TB = GB = GB
- c) Wie viele MB sind 1 TB? 1 TB = GB = MB = MB

Teil-1-Aufgaben

2.118 $M = (0; 8]$ ist eine Teilmenge der reellen Zahlen.

Aufgabenstellung: Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an. [2 aus 5]

Die Menge M enthält alle natürlichen Zahlen.	☐
In der Menge M gibt es gleich viele rationale und irrationale Zahlen.	☐
In der Menge M sind nur nicht negative Zahlen enthalten.	☐
Eine kleinste Zahl für das Intervall kann angegeben werden.	☐
Jede positive reelle Zahl kleiner gleich 8 ist in der Menge M enthalten.	☐

2.119 Gegeben sind Aussagen zu zwei negativen ganzen Zahlen a und b.

Aufgabenstellung: Kreuzen Sie die beiden Aussagen an, die jedenfalls zutreffen. [2 aus 5]

$a - b \in \mathbb{Z}^-$	$\sqrt{-a \cdot b} \in \mathbb{R}$	$a \cdot b \in \mathbb{N}$	$b \in \mathbb{Q}^+$	$a + b^2 \in \mathbb{N}$
☐	☐	☐	☐	☐

2.120 Nachstehend sind Aussagen über Zahlen und Zahlenmengen angeführt.

Aufgabenstellung: Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an. [2 aus 5]

Die Quadratwurzel jeder natürlichen Zahl ist eine irrationale Zahl.	☐
Jede rationale Zahl kann als Bruch in der Form $\frac{a}{b}$ mit $a \in \mathbb{Z}$ und $b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ dargestellt werden.	☐
Das Produkt zweier rationaler Zahlen kann eine natürliche Zahl sein.	☐
Jede reelle Zahl kann als Bruch in der Form $\frac{a}{b}$ mit $a \in \mathbb{Z}$ und $b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ dargestellt werden.	☐
Es gibt eine kleinste ganze Zahl.	☐

2.121 Es werden Aussagen über Zahlenbereiche gemacht.

Aufgabenstellung: Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine korrekte Aussage entsteht.

Jede rationale Zahl ist auch eine 1 Zahl, weil es gilt: 2.

1		2	
reelle	☐	$\mathbb{Q} \subset \mathbb{Z}$	☐
natürliche	☐	$\mathbb{Q} \subset \mathbb{N}$	☐
ganze	☐	$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$	☐

2.122 Jemand behauptet, dass jede rationale Zahl einem Punkt auf der Zahlengeraden entspricht, aber nicht jeder Punkt auf der Zahlengeraden entspricht einer rationalen Zahl.

Aufgabenstellung: Argumentieren Sie die Richtigkeit dieser Aussage.

2.123 Gegeben sind zwei Bereiche der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ in der Intervallschreibweise sowie vier Möglichkeiten in der Mengenschreibweise.

Aufgabenstellung: Ordnen Sie den zwei Intervallen die korrekte Mengenschreibweise aus A bis D zu.

$(-3; 4)$	☐	A $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -3 \vee x < 4\}$
$[-3; 4]$	☐	B $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -3 \wedge x < 4\}$
		C $C = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x < 4\}$
		D $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 4\}$

2 Teil-2-Aufgaben

- 2.124** Ein Modelabel gibt für ein Kleidungsstück einen nicht kartellierten Verkaufspreis von 1 499 € an. Im Geschäft wird das Kleidungsstück zum regulären Preis von 1 299 € verkauft. Am Ende der Saison wird das Kleidungsstück in diesem Geschäft um 222 € verbilligt und dann um weitere 30 % verbilligt abverkauft.

Aufgabenstellung: Berechnen Sie, um wie viel Prozent das Kleidungsstück im Ausverkauf billiger ist als der nicht kartellierte Verkaufspreis des Modelabels.

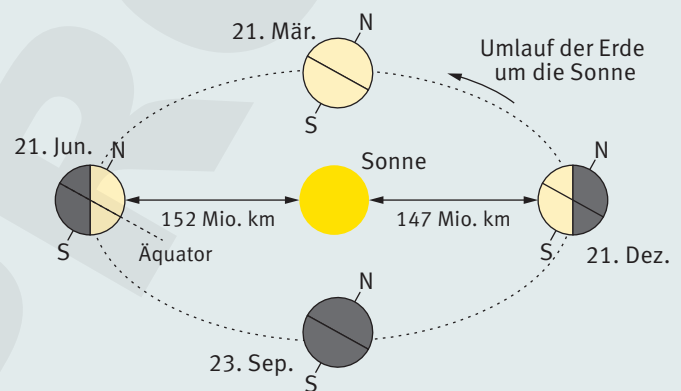
- 2.125** Das Samsung Galaxy S6 kostete zu Beginn 700 €, heute ist es um 420 € erhältlich.

Aufgabenstellung: Kreuzen Sie die korrekte Aussage an. [1 aus 5]

Die im Verkaufspreis enthaltene Mehrwertsteuer in Euro blieb gleich.	☐
Das Gerät wurde um 60 % günstiger.	☐
Das Gerät kostet heute nur mehr $\frac{2}{3}$ des ursprünglichen Preises.	☐
Das Gerät ist um 40 % billiger geworden.	☐
Ursprünglich war das Gerät um 60 % teurer als heute.	☐

- 2.126** Zur Wintersonnenwende in Österreich am 21.12. befindet sich die Erde im Perihel (sonnennächster Punkt) in einer Entfernung von 147 Mio. km von der Sonne, zur Sommersonnenwende am 21.6. im Aphel (sonnenfernster Punkt) in einer Entfernung von 152 Mio. km.

Aufgabenstellung: Berechnen Sie, um wie viel Prozent die Erde im Perihel weniger weit von der Sonne entfernt ist als im Aphel.



- 2.127** Die Raumsonde Voyager 2 wurde am 20. August 1977 von der NASA zur Erforschung des äußeren Planetensystems gestartet. Das Projekt ist einer der größten Erfolge der NASA, denn in der Zwischenzeit hat die Sonde das Sonnensystem bereits verlassen, sendet aber noch immer Daten zur Erde. Am 28. August 2017 war die Sonde etwa 114,24 Astronomische Einheiten von der Erde entfernt, wobei gilt: 1 AE = 150 Mio. km.



Aufgabenstellung: Berechnen Sie, wie lange es am 28.8.2017 gedauert hat, bis ein Signal von der Sonde die Erde erreicht hat, wenn es sich mit der Lichtgeschwindigkeit $c = 300\,000\text{ km/s}$ bewegt.

- 2.128** Eine Dose Cola zu 330 ml hat einen Energiegehalt von etwa 60 kJ. Eine Boeing 747 verbraucht auf dem Flug von Frankfurt in die Karibik (ca. 7 500 km) Kerosin für etwa 4,5 TJ. Stellen Sie sich vor, das Flugzeug könnte mit Cola statt mit Kerosin fliegen.

Aufgabenstellung: Kreuzen Sie jene Zahl an, die die Anzahl der Dosen angibt, die ebenso viel Energie enthalten. [1 aus 5]

75 000	☐
750 000	☐
7 500 000	☐
75 000 000	☐
750 000 000	☐

Teil-2-Aufgaben

2.129 Das finale Zahlen-Abenteuer

Einige Schüler/innen haben das Schloss des Geheimbunds der Mathematiker/innen erreicht. Um das Tor zu öffnen, müssen sie vier fortgeschrittene Rätsel lösen.

- a) Die Schüler/innen sehen ein Zahlenschloss mit verschiedenen Symbolen. Sie wissen, dass der Code nur aus Zahlen besteht, die zur Menge $\mathbb{R}$ gehören, aber nicht zur Menge $\mathbb{Q}$.

Kreuzen Sie jene beiden Zahlen an, welche für den Code verwendet werden dürfen. [2 aus 5]

-7	☐
π	☐
$\frac{22}{7}$	☐
$\sqrt{5}$	☐
$0,\dot{3}$	☐

- b) Um einen Laser zu deaktivieren, muss ein weiteres Rätsel gelöst werden. Der Sensor fordert eine Zahl z aus der Menge $\mathbb{Z}$. Die Zahl muss zwei Bedingungen erfüllen:

- $|z| = 5$
- Die Zahl selbst ist keine Primzahl.

Bestimmen Sie jene Zahl z , welche den Laser ausschaltet.

$z =$

- c) An der Tür steht noch folgende Frage:

„Betrachte die Menge aller Primzahlen. Ist diese Menge bezüglich der Addition abgeschlossen?“

Beantworten Sie die Frage und begründen Sie Ihre Entscheidung.

2.130 Die Umwelt-Analytik des Bodensees

Ein Labor für Umweltanalytik untersucht Wasserproben aus dem Bodensee, um die Reinheit des Trinkwassers und die Belastung durch Mikroplastik sowie Schadstoffe zu überwachen. Bei den Berechnungen müssen verschiedene mathematische Darstellungen genutzt werden.

- a) In einer Rohwasserprobe von 2 kg werden exakt 0,8 g eines bestimmten Salzes gefunden.

- 1) Berechnen Sie den Massenanteil des Salzes in Promille.

Die behördliche Obergrenze für dieses Salz liegt bei einem relativen Anteil von 0,15.

- 2) Hält die Wasserprobe diesen Grenzwert ein? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

- b) Das Labor nutzt einen Filter, der Partikel bis zu einer Größe von 5 μm zurückhält.

- 1) Drücken Sie die Filtergrenze in der Basiseinheit Meter aus. Verwenden Sie dazu die Gleitkommadarstellung.

- 2) Bei einer Messung werden in einem Kubikmeter Wasser $2,4 \cdot 10^5$ Mikroplastik-Partikel gefunden.

Durch ein neues Reinigungsverfahren kann diese Zahl auf 0,5 % des ursprünglichen Wertes gesenkt werden.

Bestimmen Sie, wie viele Partikel sich nach der Reinigung noch im Wasser befinden. Geben Sie das Ergebnis ebenfalls in Gleitkommadarstellung an.

- c) Die optimale Betriebstemperatur T (in $^{\circ}\text{C}$) für die hochempfindlichen Analysegeräte im Labor liegt bei 21°C mit einer maximal zulässigen Abweichung von $1,5^{\circ}\text{C}$.

- 1) Stellen Sie diesen zulässigen Temperaturbereich als reelles Intervall I dar.

$I =$

Während einer Störung der Klimaanlage steigt die Temperatur auf einen Wert $T_{\text{Störung}}$. Für diesen Wert gilt in $^{\circ}\text{C}$: $T_{\text{Störung}} = (23,5; 24,8]$.

- 2) Erklären Sie in eigenen Worten, ob bei $23,5^{\circ}\text{C}$ eine Störung vorliegt oder nicht.

- 2.131** Let $M = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -2\}$. A student wants to describe the subset¹ of M that contains only the negative integers².

Task: Complete the following sentence by putting a cross next to the correct option for each gap so that the sentence becomes a true statement.

To get only the negative integers from M , we must find the intersection of and the set 1. This resulting intersection³ contains exactly 2 element(s).

1	
$\mathbb{Z}^-$	☐
$\mathbb{Z}$	☐
$\mathbb{N}$	☐

2	
zero	☐
one	☐
infinitely many	☐

- ¹ **subset** = Teilmenge
² **integers** = ganze Zahlen
³ **intersection** = Schnittmenge

- 2.132** Two mathematical expressions and four descriptions (properties) are given.

Task: Match each mathematical expression on the left with its correct description or property on the right by writing the corresponding letter (A–D) into the box.

$x \in (-1; 3]$	
$\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$	

A	This set ⁴ contains all negative integers and zero.
B	Both -1 and 3 are included in the set.
C	This set contains all negative integers.
D	The number -1 is excluded, but 3 is included.

⁴ **set** = Menge

- 2.133** Five mathematical statements regarding intervals and number sets are given.

Task: Which of the following statements is true? Put a cross next to the correct statement. [1 out of 5]

The intersection of the interval $[1; 5]$ and the interval $[5; 10]$ is the empty set ⁵ ($\emptyset$).	☐
The number $0.\overline{3}$ ($0.333\dots$) is an rational number ⁶ only because it has infinitely many decimal places.	☐
The interval $(-\infty; 0)$ contains all negative real numbers ⁷ .	☐
The set of integers $\mathbb{Z}$ is a subset of the natural numbers ⁸ $\mathbb{N}$.	☐
If $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$, the interval $[a; b)$ contains exactly the same elements as the interval $(a; b]$.	☐

- ⁵ **empty set** = leere Menge
⁶ **rational numbers** = rationale Zahlen
⁷ **real numbers** = reelle Zahlen
⁸ **natural numbers** = natürliche Zahlen

- 2.134** A specific interval on the real number line⁸ is defined by the following inequality⁹: $|x| \leq 4$, $x \in \mathbb{R}$

Task: Express this condition as a single interval using standard interval notation.

I =

- ⁸ **real number line** = reelle Zahlengerade
⁹ **inequality** = Ungleichung

- 2.135** The structural components of living organisms vary drastically in size. A typical bacterium has a length of approximately $2 \cdot 10^{-6}$ meters. A typical virus, on the other hand, is much smaller, measuring only about $1.5 \cdot 10^{-8}$ meters in length. An optical microscope can easily resolve the bacterium, but to view the virus, advanced electron microscopy is required.

Task: Calculate how many times longer the typical bacterium is compared to the typical virus. Express your result as a single power of ten¹⁰ (10^x or $a \cdot 10^x$).

¹⁰ **power of ten** = Zehnerpotenz

- 2.136** In physics and data technology, specific metric prefixes are used to scale units of measurement. A student is analyzing data transmission rates and storage sizes.

Task: Put a cross next to each of the two statements that are true. [2 out of 5]

A storage size of 5 Gigabytes (5 GB) is equivalent ¹¹ to $5 \cdot 10^6$ Kilobytes (5 KB).	☐
A time of 50 milliseconds (250 ms) is exactly 0.25 seconds.	☐
If a frequency increases by 300 %, the new frequency is three times the original frequency.	☐
A concentration of 4.5 ‰ (per mille ¹²) corresponds to 0.45 % (percent ¹³).	☐
An electric current of 0,007 Amperes (A) can be written as 70 microamperes (70 μ A)	☐

¹¹ **equivalent** = äquivalent/gleichbedeutend

¹² **per mille** = Promille

¹³ **per cent** = Prozent

- 2.137** The price of a product is changed twice in a row. First, the original price is increased by 15 %. A few weeks later, this new price is decreased by 15 %.

Task: Put a cross next to the correct statement. [1 out of 5]

The final price is exactly equal to the original price P.	☐
The final price is 2.25 % higher than the original price P.	☐
The final price is 2.25 % lower than the original price P.	☐
The final price can be calculated using the expression $P \cdot 1.15 \cdot 0.15$.	☐
The final price is 97.75 % higher than the original price P.	☐

- 2.138** A certain water sample contains 0.08 grams of salt per 1 kilogram of water.

Task: Calculate the salt concentration of this sample in per mille (‰).

- 2.139** The total length of a microscopic cell is given as $d = 4.2 \cdot 10^{-5}$ meters.

Task: Express this length d in micrometers (μ m) using a decimal number¹⁴.

d =

¹⁴ **decimal number** = Dezimalzahl

- 2.140** In computer science and digital electronics, data is processed using the binary system (base-2), which consists only of the digits 0 and 1. A software engineer is analyzing a system log and encounters the binary number $[110101]_2$.

Task: Which of the following numbers in the decimal system¹⁵ represents the exact same value as the given binary number¹⁶? Put a cross next to the true answer. [1 out of 5]

26	☐
37	☐
53	☐
55	☐
61	☐

¹⁵ **decimal system** = Dezimalsystem

¹⁶ **binary number** = Binärzahl

2.141 Environmental Monitoring at Lake Neusiedl

An environmental agency monitors the water quality and ecosystem health of Lake Neusiedl (Neusiedler See). Technicians analyze chemical concentrations, water volume fluctuations, and microscopic organisms using various scale units and percentage calculations.

LAKE WATER ANALYSIS RECORD	
Parameter	Value / Description
Current Volume	$1.8 \cdot 10^8 \text{ m}^3$
Target Phosphorus Level	< 50 ppb
Algae Cell Length	$3.5 \cdot 10^{-5} \text{ m}$

- Due to heavy rainfall, the initial water volume of the lake ($1.8 \cdot 10^8 \text{ m}^3$) increases by 5 %. During a subsequent heatwave, this new volume evaporates and decreases by 12 %.
 - Calculate the final volume of the lake after both changes.
 - Determine the overall percentage change relative to the initial volume.
- The concentration of dissolved phosphorus in a specific water sample is measured at 35 ppb (parts per billion).
 - Explain what the expression “35 ppb” means in term of a fraction¹⁷.
 - Convert¹⁸ this concentration into ppm (parts per million) and express the result in scientific notation¹⁹.
- A technician isolates a specific type of microalgae. The length of a single cell is exactly $d = 3.5 \cdot 10^{-5}$ meters.
 - Convert this length into micrometers (μm) and nanometers (nm).
Let A be the set of lengths of all organisms that can be classified under this specific algae family, defined as $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 20 \mu\text{m} \leq x < 60 \mu\text{m}\}$.
 - State whether the isolated cell (d) belongs to set A and write the set A using interval notation²⁰.

¹⁷ **fraction** = Bruch

¹⁸ **to convert** = umwandeln

¹⁹ **scientific notation** = wissenschaftliche Schreibweise (gemeint ist hier die normierte Gleitkommadarstellung)

²⁰ **interval notation** = Intervallschreibweise

2.142 Semiconductor Manufacturing Quality Control

A high-tech company in Carinthia produces microchips. Silicon wafers are processed, checked for microscopic impurities, and tested for performance efficiency.

- A quality control robot scans a silicon wafer surface for defects. The sizes of the detected microscopic dust particles (in micrometers) during a test run are described by the interval: $I = (0.5; 4.5]$
 - Interpret the meaning of the brackets in this interval regarding whether a particle of exactly $0.5 \mu\text{m}$ or $4.5 \mu\text{m}$ is included in the scan report.
A new laser filter only registers particles that are strictly greater than²¹ $1.2 \mu\text{m}$.
Let this be interval $J = (1.2; \infty)$.
 - Determine the intersection and write your answer using interval notation.
- In a cleanroom, the maximum allowed concentration of a specific contaminant gas is 2.25 ppm (parts per million).
 - Convert this concentration into per mille (‰).
A sensor detects a critical spike where the gas concentration reaches 0.0035 %.
 - Argue mathematically whether this concentration exceeds the maximum allowed limit of 2.25 ppm.
- Due to a factory upgrade, the production capacity increases from $1.2 \cdot 10^5$ microchips per week to $1.5 \cdot 10^5$ microchips per week.
 - Calculate the relative increase of the production capacity in percent.
The chip components have a structural width of 7 nanometers (7 nm).
 - Express this width in meters (m) using scientific notation.

²¹ **strictly greater** = (nur) größer (>)