

LESEPROBE

ERFOLGREICH
mit Mathematik

1

WALZL
WEISER
BLANCKENSTEIN
HOFBAUER

Lehrplan 2027

HAK

+CLIL

hpt

Kapitel 1
Zahlen und Mengen



Jedes Jahr werden weltweit große Mengen an Lebensmitteln produziert, die nie gegessen werden. Von der Landwirtschaft über die Verarbeitung der Lebensmittel bis in den Handel und die privaten Haushalte gehen wertvolle Ressourcen verloren. Lebensmittelverschwendung belastet Umwelt, Klima und Gesellschaft und natürlich die Wirtschaft. Laut einer Studie des World Wide Fund For Nature (WWF) aus dem Mai 2026 entsorgt ein österreichischer Haushalt monatlich Lebensmittel im Wert von durchschnittlich 100 € oder ca. 14 kg.[1]

Erst Zahlen zeigen die Größe des Problems auf und können dazu beitragen, dass aus einer Schlagzeile eine Information wird, die man einordnen und bewerten kann.

Punkte, einfache Strichlisten oder Einkerbungen in Knochen aus der Steinzeit vor mehr als 50 000 Jahren belegen, dass die Menschen bereits damals gezählt haben. So konnten sie die Anzahl der erlegten Tiere festhalten oder einen einfachen Kalender erstellen.

Neue Herausforderungen der Gesellschaft, der Wirtschaft und Wissenschaft haben dazu geführt, dass immer neue Zahlen gebraucht wurden, um Rechenoperationen uneingeschränkt durchführen zu können.

Im beruflichen Umfeld, egal ob für die Planung von Verkaufsstrategien oder für die Auswertung und Analyse von Marktdaten, werden aufgrund von Daten Entscheidungen getroffen. Diese müssen strukturiert und in formaler Sprache verfasst werden.

Mathematische Symbole dienen der präzisen, kompakten und eindeutigen Darstellung von Beziehungen zwischen Zahlen und Rechenoperationen, sind auf diese Weise wichtige Werkzeuge der Kommunikation und ersetzen lange Beschreibungen in Worten.

Mengenvergleiche werden in der Praxis sehr häufig mithilfe von Brüchen oder Prozenten angegeben, mit dem Ziel das Verhältnis von zwei unterschiedlichen Dimensionen darzustellen.

Ein Beispiel dafür: der Größenunterschied zwischen einem Atom und seinem Kern beträgt 1 : 100 000. Als Bruch dargestellt $\frac{1}{100\,000}$ oder als Prozentzahl 0,001 %.

Genau diesen grundlegenden Werkzeugen der Mathematik widmet sich dieses Kapitel.

Du kannst ...

- mit Beträgen, Darstellungen von Zahlen und Zahlenmengen auf der Zahlengeraden arbeiten.
- mit den Zahlbereichen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und ihren Zusammenhängen arbeiten.
- mit Zahlen aus diesen Mengen operieren.
- Rechenergebnisse abschätzen und Schranken angeben.
- relative Anteile ermitteln und interpretieren.
- mit Zahlenangaben in Prozent- und Promilledarstellung arbeiten.

HEFT PROBE

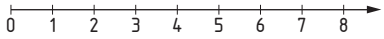
1.1 Natürliche Zahlen

1.1.1 Beschreibung von Zahlen als Mengen

In der Mathematik werden Zahlen oft als Mengen beschrieben, also als Zusammenfassungen von Objekten mit gemeinsamen Eigenschaften. Ein Grundprinzip der mathematischen Arbeitsweise ist es, Behauptungen mithilfe korrekter Rechen- und Argumentationsschritte auf bereits Bewiesenes zurückzuführen. Deshalb muss man einige unbewiesene Grundaussagen, sogenannte **Axiome** (altgriechisch „Grundsatz"), akzeptieren.
Auch die Beschreibung der natürlichen Zahlen durch den italienischen Mathematiker Guiseppe Peano erfolgt nach diesen Grundsätzen. Sie lauten vereinfacht ausgedrückt:

- 0 ist eine natürliche Zahl.
- Jede natürliche Zahl hat einen Nachfolger.
- Verschiedene natürliche Zahlen haben verschiedene Nachfolger.
- Keine natürliche Zahl hat den Nachfolger 0.
- Eine Menge, die 0 enthält und zu jeder Zahl auch deren Nachfolger, enthält alle natürlichen Zahlen. Es existiert keine größte natürliche Zahl.

Kardinalzahlen (Angabe einer Anzahl): eins, zwei, drei, … Vergleiche: one, two, three, …
Ordinalzahlen (Angabe einer Reihenfolge): erstes, zweites, … Vergleiche: first, second, …

Zahlenstrahl: 

Georg Cantor (1845 – 1918) beschreibt eine **Menge** als eine Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterscheidbaren Objekten zu einem Ganzen. Einzelne Objekte einer Menge werden Elemente genannt.

$A = \{2, 4, 7\}$ A ist die Bezeichnung der Menge 2, 4 und 7 sind Elemente der Menge A

Die **Menge der natürlichen Zahlen** wird mit $\mathbb{N}$ bezeichnet. Ihre Elemente werden mithilfe von geschwungenen Klammern { }, auch Mengenklammern genannt, angeschrieben: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
Beachte: Laut DIN-Norm 5473 gehört die Zahl Null zu den natürlichen Zahlen.
Mit $\mathbb{N}^*$ wird die Menge der natürlichen Zahlen ohne die Zahl Null bezeichnet: $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$
Mit $\mathbb{N}_g$ wird die Menge der geraden natürlichen Zahlen bezeichnet: $\mathbb{N}_g = \{0, 2, 4, 6, \ldots\}$
Mit $\mathbb{N}_u$ wird die Menge der ungeraden natürlichen Zahlen bezeichnet: $\mathbb{N}_u = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$

Die Mengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{N}_g$ und $\mathbb{N}_u$ haben jeweils unendlich viele Elemente. Sie werden daher als **unendliche Mengen** bezeichnet.

Wir beschäftigen uns auch mit **endlichen Mengen**. Das sind Mengen, bei denen die Anzahl der Elemente durch eine natürliche Zahl ausdrückbar ist.

Eine Menge, die keine Elemente enthält, heißt **leere Menge** und wird mit { } oder $\varnothing$ bezeichnet.
Folgende Symbole werden für die Beschreibung von Mengen verwendet:

$\mid$ … für die gilt	$\wedge$ … **und** (sowohl als auch)	$\vee$ … **oder**	$\setminus$ … ohne
$=$ … ist gleich	$\neq$ … ist nicht gleich	$\Rightarrow$ … daraus folgt	
$<$ … kleiner	$\leqslant$ … kleiner oder gleich	$>$ … größer	$\geqslant$ … größer oder gleich

Merke: Das Symbol für **und** ist **u**nten offen: $\wedge$ Das Symbol für **oder** ist **o**ben offen: $\vee$

Für die Zugehörigkeit eines Elements zu einer Menge verwenden wir folgende Symbole:

$\in$ … ist Element von (zB $9 \in \mathbb{N}_u$, $12 \in \mathbb{N}_g$); $\notin$ … ist nicht Element von (zB $0 \notin \mathbb{N}^*$, $9 \notin \mathbb{N}_g$, $12 \notin \mathbb{N}_u$)

Mengen werden üblicherweise mit Großbuchstaben bezeichnet und können auf zwei Arten angegeben werden:

- **aufzählendes Verfahren**: durch Aufzählen der einzelnen Elemente, zB $A = \{0, 1, 2, 3\}$. Die Reihenfolge der Elemente ist nicht von Bedeutung. Gleiche Elemente können auch nicht mehrfach in einer Menge vorkommen.
- **beschreibendes Verfahren**: durch Angeben einer Bedingung, zB $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 4\}$
  [Sprich: *„B ist die Menge aller x aus den natürlichen Zahlen, für die gilt: x ist kleiner als 4."*]

LESEPROBE

1.001 Gib die Menge M der geraden natürlichen Zahlen von 6 bis 12 im aufzählenden und im beschreibenden Verfahren sowie die Anzahl ihrer Elemente an.

Lösung:

- aufzählendes Verfahren: $M = \{6, 8, 10, 12\}$
- beschreibendes Verfahren: $M = \{x \in \mathbb{N}_g \mid x \geqslant 6 \wedge x \leqslant 12\}$ bzw. $\{x \in \mathbb{N}_g \mid 6 \leqslant x \leqslant 12\}$

Die Menge M enthält 4 Elemente.

1.002 Gib die Menge M der natürlichen Zahlen, die kleiner als 3 oder größer als 7 sind, im aufzählenden und im beschreibenden Verfahren an.
Begründe, warum man für die Anzahl der Elemente der Menge M keine natürliche Zahl angeben kann.

Lösung:

- aufzählendes Verfahren: $M = \{0, 1, 2, 8, 9, 10, 11, ...\}$
- beschreibendes Verfahren: $M = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 3 \vee x > 7\}$

Die Menge M enthält ab der Zahl 8 alle natürlichen Zahlen. Wir deuten durch 3 Punkte an, dass den angeführten Zahlen noch unendliche viele weitere folgen. Daher kann für die Anzahl der Elemente der Menge M keine natürliche Zahl angegeben werden.

1.003 Gib die Menge M der ungeraden natürlichen Zahlen von 5 bis 11 im aufzählenden und im beschreibenden Verfahren sowie die Anzahl ihrer Elemente an.

1.004 Gib die Menge M der geraden natürlichen Zahlen, die kleiner als 4 oder größer als 8 sind, im aufzählenden und im beschreibenden Verfahren an.
Begründe, warum man für die Anzahl der Elemente der Menge M keine natürliche Zahl angeben kann.

1.005 Gib die Menge M der ungeraden natürlichen Zahlen, die größer als 3 und kleiner als 5 sind, im beschreibenden Verfahren an.
Gib an, um welche „besondere Menge" es sich dabei handelt.

1.006 Kreuze die beiden leeren Mengen an. *[2 aus 5]*

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 1\}$	☐
$B = \{x \in \mathbb{N}_g \mid x < 1\}$	☐
$C = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x < 1\}$	☐
$D = \{x \in \mathbb{N}_g \mid 4 < x < 6\}$	☐
$E = \{x \in \mathbb{N}_u \mid 4 < x < 6\}$	☐

1.007 Bestimme, ob das jeweilige Element aus der angegebenen Menge stammt. Verwende die Symbole $\in$ bzw. $\notin$.

a) A ist die Menge aller Hauptstädte in Österreich.
Wien, Vorarlberg, St. Pölten, Graz, Krems, Innsbruck

b) B ist die Menge aller vierbeinigen Tiere.
Ente, Hase, Krokodil, Pandabär, Pferd, Känguru

1.008 Gegeben sind die Mengen $A = \{2, 6, 8\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x \leqslant 7\}$ und $C = \{1, 6, 7, 9\}$.
Ordne den beschreibenden Verfahren die richtigen Elemente zu.

$\{x \in A \mid x \in C \wedge x \notin B\}$	☐
$\{x \in B \mid x \in A \vee x \in C\}$	☐

A	{2, 6, 7}
B	{ }
C	{8}
D	{2}

LESEPROBE

Teilmenge

In der Mathematik ist es oft notwendig, mit mehreren Mengen zu arbeiten.

	Schreibweise:
Eine Menge A heißt **Teilmenge** einer Menge B, wenn jedes Element der Menge A auch ein Element der Menge B ist.	$A \subseteq B$
Eine Menge A heißt **echte Teilmenge** einer Menge B, wenn $A \subseteq B$ und $A \neq B$ ist.	$A \subset B$
Die größere Menge wird auch **Obermenge** genannt.	
Zwei Mengen A und B heißen **gleich**, wenn sie **die gleichen Elemente** enthalten, also jedes Element der Menge A ist auch ein Element der Menge B und umgekehrt. Es gilt also: $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Leftrightarrow A = B$	$A = B$
Die Reihenfolge der Elemente in einer Menge ist dabei nicht von Bedeutung.	

Für die Mengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{N}_g$ und $\mathbb{N}_u$ gilt daher: $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N}$, $\mathbb{N}_g \subset \mathbb{N}$ und $\mathbb{N}_u \subset \mathbb{N}$.

1.009 Gib jeweils an, ob $A \subset B$, $B \subset A$ oder $A = B$ gilt.

a) $A = \{3, 4, 5\}$; $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leq x \leq 6\}$

b) $A = \{1, 2, 3, 4\}$; $B = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x \leq 4\}$

c) $A = \{x \in \mathbb{N}_u \mid x > 3\}$; $B = \{5, 7, 9, 11, 13\}$

d) $A = \{x \in \mathbb{N}_g \mid x > 1\}$; $B = \{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}$

Lösung:

a) $A = \{3, 4, 5\}$; $B = \{2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow A \subset B$

b) $A = \{1, 2, 3, 4\}$; $B = \{1, 2, 3, 4\} \Rightarrow A = B$

c) $A = \{5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, \ldots\}$; $B = \{5, 7, 9, 11, 13\} \Rightarrow B \subset A$

d) $A = \{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}$; $B = \{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\} \Rightarrow A = B$

1.010 Bilde alle Teilmengen der Menge $M = \{1, 2, 3\}$.

Lösung:

$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{\}$

Hinweis: Die leere Menge ist Teilmenge jeder Menge.

1.011 Gib jeweils an, ob $A \subset B$, $B \subset A$ oder $A = B$ gilt.

a) $A = \{9, 10, 11\}$; $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 11\}$

b) $A = \{x \in \mathbb{N}_u \mid x \leq 13\}$; $B = \{5, 7, 9, 11, 13\}$

c) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 6\}$; $B = \{2, 3, 4\}$

d) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \geq 6\}$, $B = \{x \in \mathbb{N}_g \mid x \geq 5\}$

1.012 Bilde alle Teilmengen der Menge $M = \{x \in \mathbb{N}_g \mid 0 < x < 7\}$.

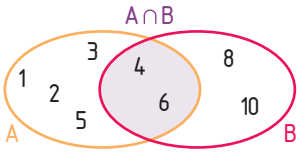
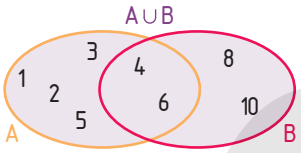
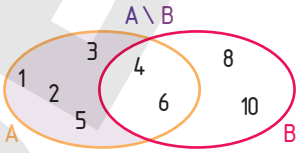
1.013 Kreuze jene Menge an, die keine Teilmenge von $\mathbb{N}$ ist. *[1 aus 5]*

$A = \{0, 1, 2, 3, 7, 8, 9\}$	☐
$B = \{20, 18, 12, 9\}$	☐
$C = \{-1, 2, 3, 5, 9\}$	☐
$D = \{\}$	☐
$E = \{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}$	☐

LESEPROBE

Mengenverknüpfungen

Zur Veranschaulichung von Mengenverknüpfungen können **Mengendiagramme** (Venn-Diagramme, John Venn, englischer Mathematiker, 1834 – 1923) verwendet werden. Dabei wird eine Menge durch eine ovale Fläche dargestellt.

Durchschnittsmenge	Vereinigungsmenge	Differenzmenge
Menge der Elemente, die **sowohl** in A **als auch** in B enthalten sind	Menge der Elemente, die in einer Menge A **oder** in einer Menge B enthalten sind	Menge der Elemente von A, die nicht in B enthalten sind
		
$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$	$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$	$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$
[Sprich: **„A geschnitten B** ist die Menge aller x, für die gilt: **x ist ein Element von A und x ist ein Element von B**.“]	[Sprich: **„A vereinigt B** ist die Menge aller x, für die gilt: **x ist ein Element von A oder x ist ein Element von B**.“]	[Sprich: **„A ohne B“**]
Beispiel: $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $B = \{4, 6, 8, 10\}$ $A \cap B = \{4, 6\}$	Beispiel: $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $B = \{4, 6, 8, 10\}$ $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10\}$	Beachte: $A \setminus B \neq B \setminus A$ Beispiel: $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $B = \{4, 6, 8, 10\}$ $A \setminus B = \{1, 2, 3, 5\}$, aber $B \setminus A = \{8, 10\}$

Enthält der Durchschnitt zweier Mengen kein Element, nennt man die Mengen **disjunkt**.

1.014 Gegeben sind die Mengen $A = \{2, 4, 7, 9\}$, $B = \{1, 3, 4, 7\}$ und $C = \{4, 5, 9, 10\}$.

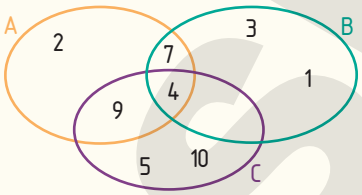
a) Stelle diese Mengen in einem Mengendiagramm dar.

b) Gib folgende Mengen im aufzählenden Verfahren an:

1) $A \cup B$ **2)** $A \cap B \cap C$ **3)** $B \setminus A$

Lösung:

a)



b) **1)** $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 7, 9\}$
2) $A \cap B \cap C = \{4\}$
3) $B \setminus A = \{1, 3\}$

1.015 Gegeben sind die Mengen $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$, $B = \{3, 6, 9, 12, 15\}$ und $C = \{4, 8, 12, 16, 20\}$.

a) Stelle diese Mengen in einem Mengendiagramm dar.

b) Gib folgende Mengen im aufzählenden Verfahren an:

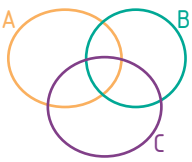
1) $A \cup B$ **2)** $B \cap C$ **3)** $A \cap B \cap C$ **4)** $A \cap C$

1.016 Gegeben sind die Mengen $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid B \leq x \leq 15\}$ und $C = \{10, 12, 14, 16\}$.
Bestimme die Menge für den Ausdruck $(A \cap B) \setminus (B \cap C)$.

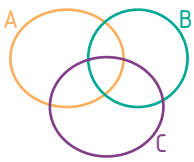
1.017 Kennzeichne die angegebene Menge im jeweiligen Venn-Diagramm.

a) 

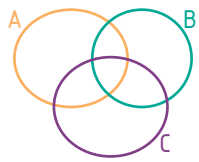
$A \setminus (B \cap C)$

b) 

$(A \cup C) \setminus B$

c) 

$(A \cap B) \cap C$

d) 

$(A \cup B) \setminus (A \cap C)$

Erfolgreich mit Mathematik für Handelsakademien 1. Lehrplan 2027 (SBNR 230734) | © www. hpt.at, 2026

1.1.2 Rechnen mit natürlichen Zahlen

Wir fassen wichtige Bezeichnungen und die für die Grundrechnungsarten geltenden Rechengesetze zusammen.

Rechenart	Abgeschlossenheit* bzgl. $\mathbb{N}$	Kommutativgesetz (Vertauschungsgesetz)	Assoziativgesetz (Verbindungsgesetz)
Addition $a + b = c$ Summand + Summand = Summe	✓ Beispiel $5 + 3 = 8 \in \mathbb{N}$	✓ $a + b = b + a$	✓ $a + (b + c) = (a + b) + c$
Subtraktion $a - b = c$ Minuend – Subtrahend = Differenz	Gegenbeispiel $4 - 7 = -3 \notin \mathbb{N}$	Gegenbeispiel $6 - 3 \neq 3 - 6$	Gegenbeispiel $8 - (4 - 3) = 8 - 1 = 7$ $(8 - 4) - 3 = 4 - 3 = 1$
Multiplikation $a \cdot b = c$ Faktor · Faktor = Produkt	✓ Beispiel $2 \cdot 3 = 6 \in \mathbb{N}$	✓ $a \cdot b = b \cdot a$	✓ $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
Division $a : b = c$ Dividend : Divisor = Quotient	Gegenbeispiel $1 : 4 = 0{,}25 \notin \mathbb{N}$	Gegenbeispiel $2 : 4 \neq 2 : 4$	Gegenbeispiel $8 : (4 : 2) = 8 : 2 = 4$ $(8 : 4) : 2 = 2 : 2 = 1$

* Eine Zahlenmenge ist **abgeschlossen** bezüglich einer Rechenoperation, wenn das Ergebnis dieser Rechenoperation immer in dieser Zahlenmenge liegt.

Weitere allgemeine Rechenregeln

Vorrangregeln: KlaPuStri
(Klammern vor Punkt- vor Strichrechnung)

$30 + (7 - 3) \cdot 2 =$ Klammer
$30 + 4 \cdot 2 =$ Punktrechnung
$30 + 8 =$ Strichrechnung
38

Alternative: Distributivgesetz (Verteilungsgesetz)
$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ oder $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

$30 + (7 - 3) \cdot 2 =$ Distributivgesetz
$30 + (7 \cdot 2 - 3 \cdot 2) =$ Klammer → Punktrechnung
$30 + (14 - 6) =$ Klammer
$30 + 8 =$ Strichrechnung
38

Klammerauflösung: Plus vor der Klammer
→ Rechenzeichen in der Klammer unverändert

$2 + (3 - 5 + 7) = 2 + 3 - 5 + 7 = 7$

Klammerauflösung: Minus vor der Klammer
→ Rechenzeichen in der Klammer umgekehrt

$2 - (3 - 5 + 7) = 2 - 3 + 5 - 7 = -3$

1.018 Berechne das Ergebnis schrittweise, beachte die Vorrangregeln. Überprüfe dein Ergebnis mit dem Taschenrechner.

a) $2 \cdot 7 + 4 \cdot 3$ **b)** $2 \cdot (7 + 4 \cdot 3)$ **c)** $2 \cdot (7 + 4) \cdot 3$ **d)** $(2 \cdot 7 + 4) \cdot 3$ **e)** $14 \cdot 10 + 30 - 50 : 4$ **f)** $14 - 10 + 30 \cdot 50 + 4$ **g)** $14 \cdot (10 + 30)^2 - 50 + 4^2$ **h)** $14 \cdot [10 + (30 + 50) : 4]$

1.019 Setze die fehlende Klammer an der richtigen Stelle ein.

a) $2 \cdot 5 + 4 \cdot 3 + 1) = 26$ **b)** $2 \cdot (5 + 4 \cdot 3 + 1 = 36$ **c)** $2 \cdot (5 + 4 \cdot 3 + 1 = 55$

1.020 Berechne auf zwei verschiedene Arten: Zuerst von links nach rechts, danach durch Zusammenfassen der Subtrahenden in einer Klammer. Entscheide, welchen Lösungsweg du bevorzugst.

a) $33 - 10 - 11 - 2$ **b)** $125 - 40 - 55 - 17$ **c)** $1\,020 - 550 - 290 - 99$

LESEPROBE

1.021 Arbeite mit den Zahlen aus dem blauen Kästchen.

45 38 99 110 10 19 87

a) Gib die größte bzw. die kleinste Summe an, die aus zwei Zahlen gebildet werden kann.
b) Gib jeweils jene beiden Zahlen an, welche die größte bzw. die kleinste Differenz haben.
c) Wähle jene drei Zahlen aus, deren Summe möglichst knapp über 100 liegt.

1.022 Ein Sportverein hat 364 Mitglieder, von denen jedes jeweils nur eine Sportart ausübt. Davon spielen 176 Fußball, 98 Tennis und der Rest Volleyball. Die Jahresmitgliedschaft für beliebig viele Trainingsstunden pro Jahr kostet für Fußball 160 €, für Tennis 350 € und für Volleyball 120 €.



a) Berechne, wie viele Mitglieder Volleyball spielen.
b) Ermittle, wie viel Geld dem Verein insgesamt durch die Mitgliedsbeiträge zur Verfügung steht.

Eine einzelne Tennisstunde kostet 20 €.
c) Prüfe, ab wie vielen Stunden sich eine Jahresmitgliedschaft lohnt.

1.023 Eine Floristin hat 200 Rosen zur Verfügung und soll damit 10 Sträuße mit je 9 Rosen binden. Die restlichen Rosen soll sie zu Sträußen mit je 7 Rosen binden.
Berechne, wie viele Sträuße die Floristin insgesamt binden kann und berechne, wie viele Rosen übrigbleiben.

1.024 Julia kauft drei Notizblöcke um je 3 €, fünf Buntstifte um je 2 € und eine Schere um 8 €.
Berechne den Gesamtpreis.

1.025 Xenia hat 4 Münzen zu je 2 €, 6 Münzen zu je 1 € und 5 Stück 5 €-Scheine in ihrer Geldbörse.
Berechne, ob sie sich eine Zugfahrkarte um 34 € und 3 Snacks zu je 2 € leisten kann und wie viel Euro sie übrig hat bzw. wie viel Euro ihr fehlen.

1.026 Berechne den Quotienten, wenn der Dividend 48 und der Divisor 4 beträgt. Schreibe eine Rechnung an.

1.027 Berechne, von welcher Zahl man 7 312 subtrahieren muss, um 1 264 zu erhalten.

1.028 Dokumentiere deinen Lösungsweg nachvollziehbar. Zur Überprüfung deiner Erkenntnisse kannst du deinen Taschenrechner verwenden.

a) Gib an, wie sich die Differenz zweier Zahlen ändert, wenn man den Minuenden um 40 vergrößert.
b) Gib an, wie sich die Summe von zwei Zahlen ändert, wenn man einen Summanden um 7 vergrößert und den anderen um 6 vermindert.
c) Gib an, wie sich das Produkt zweier Zahlen ändert, wenn man beide Faktoren verdoppelt.
d) Gib an, wie sich das Produkt zweier Zahlen ändert, wenn man einen Faktor verdoppelt und den anderen Faktor halbiert.

1.029 Entscheide, ob die Behauptung wahr ist oder nicht. Formuliere eine Lösungsstrategie zum Lösen solcher Aufgaben.

a) Die Summe von natürlichen Zahlen ist immer größer als jeder einzelne Summand.
b) Die Differenz von zwei natürlichen Zahlen ist kleiner als der Subtrahend.
c) Die Differenz von zwei natürlichen Zahlen ist nie kleiner als der Minuend.

1.030 Timo erzählt in der Klasse: „Das Ergebnis bleibt gleich, egal ob ich 3 + 5 rechne oder 5 + 3 rechne."
Nenne das mathematische Rechengesetz, das hier zur Anwendung kommt.

1.031 Kreuze die beiden richtigen Aussagen an. *[2 aus 5]*

Das Assoziativgesetz oder Vertauschungsgesetz lautet bei der Addition $a + (b + c) = (a + b) + c$	☐
Das Distributivgesetz oder Verteilungsgesetz lautet $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ oder $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	☐
Die natürlichen Zahlen sind in der Addition und Multiplikation abgeschlossen.	☐
Minuend – Differenz = Subtrahend	☐
Das Kommutativgesetz gilt in allen Rechenarten.	☐

1.032 Erkläre den Begriff „Abgeschlossenheit einer Zahlenmenge" anhand eines konkreten Beispiels.

VERPROBE

1.1.3 Primzahlen und Teilbarkeit

1.033 Ein Säckchen enthält 18 kleine Schokoladestücke.

a) Ermittle, auf wie viele Personen man die Schokoladestücke aufteilen kann, wenn alle gleich viele bekommen sollen und kein Stück übrig bleiben darf.

b) Jemand hat vor dem Aufteilen schon ein Stück genascht.
Argumentiere, ob eine Aufteilung nun noch gelingen kann.

Die natürliche Zahl t heißt **Teiler** einer natürlichen Zahl n, wenn bei der Division n : t kein Rest bleibt. Man schreibt dann t | n (sprich: „t teilt n“).

Es gilt zwar 3 | 12, aber nicht 12 | 3. In diesem Fall schreibt man 12 ∤ 3 (sprich: „12 teilt nicht 3“).

Die Zahlen 1 und n sind **unechte Teiler** der Zahl n. Alle weiteren Teiler sind **echte Teiler** der Zahl n.

Beispiel: 1 und 18 sind unechte Teiler von 18.
2, 3, 6 und 9 sind echte Teiler von 18.

Eine natürliche Zahl größer 1, die nur durch 1 und sich selbst teilbar ist, heißt **Primzahl**.
Die **Menge der Primzahlen** wird mit $\mathbb{P}$ bezeichnet: $\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots\}$

Beispiel: 17 ist eine **Primzahl**, weil sie nur durch 1 und 17 teilbar ist.

Alle echten Vielfachen von Primzahlen sind keine Primzahlen. Sie heißen **zusammengesetzte Zahlen** und sind als **Produkt von Primzahlen** darstellbar.

Auf diesem Zusammenhang beruht eine einfache, seit der Antike bekannte Methode zur Ermittlung von Primzahlen. Sie wurde nach dem griechischen Mathematiker Eratosthenes von Kyrene (ca. 273 – 194 v. Chr.) benannt, der die Bezeichnung „Sieb“ für das im Folgenden für die Bestimmung der Primzahlen bis 100 gezeigte Vorgehen verwendete.

1.034 So funktioniert das **Sieb des Eratosthenes**: Verwende die nachstehende Tabelle mit den natürlichen Zahlen von 1 bis 100 und führe die Aufgaben aus.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

- Streiche die Zahl 1 durch, da 1 keine Primzahl ist.
- Die kleinste Primzahl ist 2. Kreise diese ein. Alle Vielfachen von 2 sind keine Primzahlen, streiche daher alle Vielfachen von 2 durch.
- Die nächste nicht durchgestrichene Zahl ist 3. Die Zahl wurde nicht gestrichen, weil sie nicht durch 2 teilbar ist. 3 ist also eine Primzahl. Streiche nun wieder alle Vielfachen von 3 durch.
- Die nächste Zahl 4 ist bereits von dir gestrichen, weil sie ein Vielfaches der Primzahl 2 und daher selbst keine Primzahl ist.
- 5 ist durch keine davor liegende Zahl teilbar, also eine Primzahl. Streiche alle Vielfachen von 5 durch.
- Setze mit diesem Schema fort, bis du alle Primzahlen bis 100 gefunden hast und trage sie unten ein.

Die Primzahlen bis 100 lauten:

1.035 Nutze einen beliebigen KI-Chatbot und beantworte folgende Fragen:

a) Warum ist 1 keine Primzahl?

b) Wie lautet die bisher größte bekannte Primzahl?

PROBE

Teilbarkeitsregeln

Um zu überprüfen, ob eine Zahl durch eine andere ohne Rest teilbar ist, kann man eine Division ausführen. Für einige Zahlen gibt es jedoch einfache Regeln, die diese Überprüfung ohne Ausführen der Division ermöglichen.

2	Alle geraden Zahlen sind durch 2 teilbar, sie haben die **Endziffer 0, 2, 4, 6 oder 8**.

Beispiel: 2 teilt 5 79**8**, weil die Endziffer **8** ist.

3 bzw. 9	Eine Zahl ist durch 3 bzw. 9 teilbar, wenn ihre **Ziffernsumme durch 3 bzw. 9 teilbar** ist.

Beispiel: 3 teilt 435, da 4 + 3 + 5 = 12 (durch 3 teilbar); 9 teilt 414, da 4 + 1 + 4 = 9

5	Alle Zahlen mit den **Endziffern 0 oder 5** sind durch 5 teilbar.

Beispiel: 5 teilt 34 87**5**, weil die Endziffer **5** ist.

4 bzw. 25	Eine Zahl ist durch 4 bzw. 25 teilbar, wenn die **aus Einer- und Zehnerziffer gebildete Zahl** durch 4 bzw. durch 25 teilbar ist.

Beispiel: 4 teilt 23 9**16**, da **16** durch 4 teilbar ist; 25 teilt 7 9**75**, da **75** durch 25 teilbar ist.

10	Eine Zahl ist durch 10 teilbar, wenn die Endziffer 0 ist.

Beispiel: 10 teilt 1 25**0**, weil die letzte Ziffer 0 ist.

1.036 Finde mit einem KI-Chatbot oder im Internet die Teilbarkeitsregel für 6 heraus. Kontrolliere das Ergebnis mit mindestens zwei unabhängigen Suchmaschinen.
Argumentiere, ob die gefundene Regel auch für die Zahl 8 gilt.

1.037 Gib die Primfaktorzerlegung von 150 an. Beschreibe deine Vorgehensweise.

Lösung:
Zerlege die Zahl 150 schrittweise und beginne dabei mit möglichst kleinen Primfaktoren:
150 = 2 · 75 = 2 · 3 · 25 = 2 · 3 · 5 · 5

Oft wird auch folgende Schreibweise verwendet:

150	2
75	3
25	5
5	5
1	

1.038 Gib die Primfaktorenzerlegung folgender Zahlen an.
a) 36 **b)** 270 **c)** 635 **d)** 2 340 **e)** 11 700 **f)** 17 820 **g)** 340 200

1.039 Schätze wie viele Primzahlen es bis 1000 gibt. Überprüfe deine geschätzte Zahl anschließend mithilfe einer geeigneten Suchmaschine.

1.040 Kreuze an.

... ist Teiler von ...	216	325	540	963	1 260	2 916	3 599	6 930
2								
3								
4								
5								
6								
8								
9								
10								
25								

LESEPROBE

Der größte gemeinsame Teiler (ggT)

Der größte gemeinsame Teiler zweier oder mehrerer Zahlen ist die größte natürliche Zahl, die alle gegebenen Zahlen ohne Rest teilt. Er ist das **Produkt seiner gemeinsamen Primfaktoren**.

Das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV)

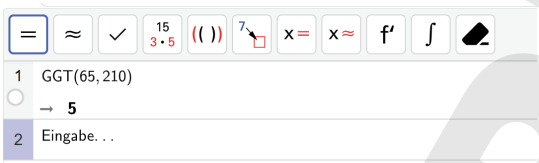
Das kleinste gemeinsame Vielfache zweier oder mehrerer Zahlen ist die kleinste positive natürliche Zahl, die ein Vielfaches aller gegebenen Zahlen ist. Es ist das **Produkt aller vorkommenden Primfaktoren**.

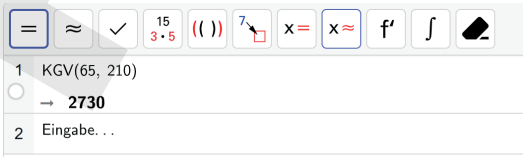
Zwei natürliche Zahlen heißen **teilerfremd**, wenn sie keinen gemeinsamen Teiler außer 1 besitzen (ggT = 1). Teilerfremde Zahlen müssen nicht selbst Primzahlen sein, zB 8 und 15 sind beide keine Primzahlen und haben keinen gemeinsamen Teiler außer 1.

Auch mit Technologieeinsatz können ggT und kgV bestimmt werden.
Wir verwenden **GeoGebra**.
Berechnungen werden immer im CAS-Fenster durchgeführt: **Ansicht → CAS** einblenden



Die Eingabe lautet **GGT(Zahl1,Zahl2)** bzw. **KGV(Zahl1,Zahl2)** und wird mit = bzw. ≈ berechnet.





Für generelle Hinweise zu GeoGebra wird auf den **Anhang „Technologieeinsatz“** verwiesen.

1.041 Bestimme den größten gemeinsamen Teiler der Zahlen 420 und 450.

Lösung:
Wir bestimmen die Primfaktorzerlegung beider Zahlen.
Nun markieren wir alle Primfaktoren, die in beiden Zerlegungen vorkommen und bilden das Produkt.

$ggT(420,450) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$

420	2	450	2
210	2	225	3
105	3	75	3
35	5	25	5
7	7	5	5
1		1	

1.042 Bestimme das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen 420 und 450.

Lösung:
Wir bestimmen die Primfaktorenzerlegung beider Zahlen.
Nun markieren wir alle Primfaktoren der ersten Zahl und ergänzen die fehlenden Primfaktoren aus der zweiten Zahl.
Anschließend bilden wir das Produkt aller vorkommenden markierten Primzahlen.

$kgV(420,450) = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}_{420} \cdot \underbrace{3 \cdot 5}_{15} =$
$= 420 \cdot 15 = 6\,300$

420	2	450	2 ✓
210	2	225	3 ✓
105	3	75	3
35	5	25	5 ✓
7	7	5	5
1		1	

Merke: Bei der Bildung des **ggT** benötigt man die **kleinste** Anzahl von Primfaktoren pro Zerlegung, beim **kgV** verwendet man die **größte** Anzahl von Primfaktoren pro Zerlegung.

LESEPROBE

1.043 Bestimme den größten gemeinsamen Teiler und das kleinste gemeinsame Vielfache.

a) 84, 126 **c)** 176, 330 **e)** 18, 36, 40 **g)** 15, 43, 100
b) 135, 315 **d)** 252, 392 **f)** 18, 36, 72 **h)** 120, 145, 205

1.044 Bestimme den ggT und das kgV.

a) 30, 42 **c)** 60, 72 **e)** 5, 30, 24 **g)** 5, 31, 47
b) 55, 105 **d)** 42, 66 **f)** 4, 20, 21 **h)** 14, 52, 60

1.045 Am Busbahnhof fährt die Linie 45 alle 12 Minuten, die Linie 43 alle 15 Minuten und die Linie 27B alle 20 Minuten ab. Die ersten Busse verlassen die Station jeweils um 6:30 Uhr.
Berechne, nach wie vielen Minuten wieder gleichzeitig von jeder der genannten Linien ein Bus abfährt.

1.046 Die Produktion eines bestimmten Guts durchläuft drei Maschinen. Maschine M_1 muss alle 6 Tage gewartet werden, Maschine M_2 alle 16 Tage und Maschine M_3 alle 40 Tage.
Berechne, in welchem zeitlichen Abstand alle drei Maschinen gleichzeitig gewartet werden.

1.047 Für ein Schulprojekt stehen folgende Sticker zur Verfügung: 96 Tier-Sticker, 72 Pflanzen-Sticker, 120 Wetter-Sticker. Die Sticker sollen auf gleichartige Projektmappen verteilt werden. Jede Mappe soll gleich viele Sticker jeder Sorte enthalten.

a) Ermittle, wie viele Mappen maximal erstellt werden können.
b) Berechne, wie viele Sticker jeder Sorte in einer Mappe enthalten sind.

1.048 Eine Kindergärtnerin benötigt für ein Projekt lauter gleich lange Seile. Es stehen ihr zwei Seile zur Verfügung, die sie zerschneiden kann. Das erste ist 1,25 m, das zweite 2,75 m lang.
Berechne die maximale Länge in cm der Seilstücke, wenn kein Verschnitt bleiben soll.

1.049 Frau Bertl möchte den Boden in ihrem Badezimmer mit quadratischen Marmorfliesen neu eindecken. Der Boden hat eine Abmessung von 397 cm x 244,5 cm. Zwischen den Fliesen sowie an den Rändern ist jeweils eine 5 mm breite Fuge vorgesehen.
Berechne, wie breit die Fliesen höchstens sein dürfen, damit der Boden vollständig mit gleich großen Marmorfliesen ausgelegt werden kann, ohne eine Fliese zuschneiden zu müssen.

1.050 Bei einem Gaming-Turnier nehmen 48 Spielerinnen und Spieler aus Wien und 36 aus Graz teil.
Für das Turnier sollen gleich große Teams gebildet werden. Jede Person soll genau in einem Team spielen und Teams dürfen nur aus Personen derselben Stadt bestehen.

a) Ermittle, wie viele Spielerinnen und Spieler maximal in einem Team sein können.
b) Berechne, wie viele Teams aus Wien und wie viele Teams aus Graz entstehen.



1.051 In einer Werkstatt soll ein rechteckiges Metallblech zugeschnitten werden. Das Blech ist 1,92 m lang und 1,44 m breit. Daraus sollen quadratische Metallplatten mit größtmöglicher Kantenlänge ausgeschnitten werden. Es dürfen nur ganze Platten verwendet werden, es soll keinen Verschnitt geben und die Schnittbreite bleibt unberücksichtigt.

a) Berechne die größtmögliche Kantenlänge der quadratischen Metallplatten in cm.
b) Bestimme, wie viele solcher Metallplatten aus dem Blech geschnitten werden können.

1.052 Bei einem Konzert bringen drei Shuttlebusse die Besucher regelmäßig vom Parkplatz zum Haupteingang. Bus A fährt alle 8 Minuten, Bus B alle 24 Minuten und Bus C alle 45 Minuten vom Parkplatz Richtung Haupteingang. Alle Busse beginnen um 14:00 Uhr.
Berechne, um wieviel Uhr sich die drei Busse beim Parkplatz wieder treffen.

1.053 Bereits Euklid war bekannt: *„Ein Produkt ist nur dann durch eine Primzahl teilbar, wenn mindestens ein Faktor durch diese Primzahl teilbar ist."*
Prüfe den Zusammenhang an selbst gewählten Beispielen nach.

LESEPROBE

1.2 Ganze Zahlen

1.2.1 Rechnen mit ganzen Zahlen

1.054 Um 11:00 Uhr zeigt das Thermometer +2 °C. Drei Stunden vorher war es noch um 5 °C kälter. Berechne, wie viel Grad Celsius es um 8:00 Uhr hatte.

Für die Angabe von Temperaturen in Grad Celsius, die unter dem Gefrierpunkt (0 °C) liegen, benötigt man negative Zahlen.

Die **Menge der ganzen Zahlen** wird mit $\mathbb{Z}$ bezeichnet. $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$

Darstellung auf der Zahlengeraden:



$\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$ $\mathbb{Z}^- = \{..., -5, -4, -3, -2, -1\}$

Null ist weder positiv noch negativ.

Man nennt (–n) die **Gegenzahl** von n.
zB: (–3) ist die Gegenzahl von (+3) und umgekehrt.

In der Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ kann man uneingeschränkt addieren, subtrahieren und multiplizieren. Die Menge $\mathbb{Z}$ ist daher **abgeschlossen bezüglich der Addition, der Subtraktion und der Multiplikation**.

Beachte den Unterschied:

11 – (–3)

Rechenzeichen **Vorzeichen**

Das **Rechenzeichen** „–“ stellt den „Arbeitsauftrag“ Subtrahieren dar. Diese Rechenoperation „arbeitet“ mit zwei Zahlen, dem Minuenden und dem Subtrahenden.

Das **Vorzeichen** „–“ informiert darüber, dass es sich um eine negative Zahl handelt. Es bezieht sich nur auf eine Zahl und gibt deren Lage auf der Zahlengeraden an.

Technologieeinsatz: Rechen- und Vorzeichen
Am Taschenrechner wird meist durch eigene Tasten zwischen **Vorzeichen** (–) und **Rechenzeichen** – unterschieden.

Die für natürliche Zahlen angegebenen Rechenregeln gelten weiterhin. Meist werden das Vorzeichen „+“ und nicht notwendige Klammern weggelassen. zB: (+3) · (–4) = 3 · (–4)

Vorzeichenregeln		
Addition und Subtraktion	Das **Addieren einer negativen ganzen Zahl** entspricht dem **Subtrahieren der Gegenzahl**.	
	(+a) + (–b) = (+a) – (+b) = a – b	zB: (+5) + (–2) = 5 – 2 = 3
	(–a) + (–b) = (–a) – (+b) = –a – b	zB: (–5) + (–2) = –5 – 2 = –7
	Das **Subtrahieren einer negativen ganzen Zahl** entspricht dem **Addieren der Gegenzahl**.	
	(+a) – (–b) = (+a) + (+b) = a + b	zB: (+5) – (–2) = 5 + 2 = 7
	(–a) – (–b) = (–a) + (+b) = –a + b	zB: (–5) – (–2) = –5 + 2 = –3
Multiplikation	Haben die Faktoren das **gleiche Vorzeichen**, so ist das Ergebnis **positiv**.	
	(+a) · (+b) = a · b	zB: (+6) · (+3) = 6 · 3 = 18
	(–a) · (–b) = a · b	zB: (–6) · (–3) = 6 · 3 = 18
	Haben die Faktoren ein **unterschiedliches Vorzeichen**, so ist das Ergebnis **negativ**.	
	(+a) · (–b) = –a · b	zB: (+6) · (–3) = –6 · 3 = –18
	(–a) · (+b) = –a · b	zB: (–6) · (+3) = –6 · 3 = –18
Division	Haben Dividend und Divisor das **gleiche Vorzeichen**, so ist das Ergebnis **positiv**.	
	(+a) : (+b) = a : b	zB: (+6) : (+3) = 6 : 3 = 2
	(–a) · (–b) = a : b	zB: (–6) : (–3) = 6 : 3 = 2
	Haben Dividend und Divisor **unterschiedliche Vorzeichen**, so ist das Ergebnis **negativ**.	
	(+a) : (–b) = – a : b	zB: (+6) : (–3) = –6 : 3 = –2
	(–a) : (+b) = – a : b	zB: (–6) : (+3) = –6 : 3 = –2

LEIPROBE

1.2.2 Betrag ganzer Zahlen

1.055 Auf einer Ferieninsel werden U-Bootfahrten angeboten. Das U-Boot sinkt dabei von der Meeresoberfläche auf eine Meereshöhe von −35 m.
Ermittle, wie viel Meter es getaucht ist.

Unter dem **Betrag** einer ganzen Zahl z versteht man deren Abstand vom Nullpunkt auf der Zahlengerade.
Man schreibt |z|.
[Sprich: *„Betrag von z"*], | | ... Betragsstriche

Beispiel:
z = +3 ist drei Einheiten von Null entfernt, daher |+3| = 3
z = −3 ist drei Einheiten von Null entfernt, daher |−3| = 3



Betrag (Absolutbetrag) einer Zahl z: $|z| = \begin{cases} z, \text{ wenn } z \geqslant 0 \\ -z, \text{ wenn } z < 0 \end{cases}$

1.056 Berechne. **a)** |−2| − |2| **b)** |−2 + 4| − |−4| **c)** −4 + |2 − 4|

Lösung:
a) |−2| − |2| = 2 − 2 = 0 **b)** |−2 + 4| − |−4| = |2| − 4 = 2 − 4 = 2 **c)** −4 + |2 − 4| = −4 + |−2| = −4 + 2 = −2

1.057 Setze die richtigen Vor- bzw. Rechenzeichen ein.

a) 2 + 5 = ☐ 5 ☐ 2
b) −2 + 5 = ☐ 5 ☐ 2
c) 2 − 5 = ☐ 5 ☐ 2
d) −2 − 5 = ☐ 5 ☐ 2

1.058 Berechne jeweils das Ergebnis. Beachte die Vorrangregeln. Kontrolliere dein Ergebnis mit dem Taschenrechner. Achte dabei ebenso auf die Eingabe von Klammern sowie auf die Unterscheidung zwischen Vor- und Rechenzeichen.

a) −35 : (−7) − 11 · (−2)
b) 16 − 15 · (−2) + (−21) : (−3)
c) −2 · (−3) − (−12) : (−2)
d) 2 · (−5) − (−8 · (−3) − 12 : (−6))
e) (−1) − (−26) · [(+26) : (−13)] + 6
f) [(+14) + (−27) : (−9)] · 2^2 − (−120)
g) [(−56) : (−7)]^2 : (−4) + (−33)
h) [(+5) · (−60)] − (−182) : (+14)

1.059 Setze die passende Zahl ein.

a) (−36) : ☐ = (−4)
b) ☐ − (−15) = 20
c) (−6) · ☐ = 120
d) (−32) + ☐ = 89

1.060 Berechne.
a) |−2 − 7| − 8 **b)** −|−5 + 8| − |−4 + 2| **c)** |−7 − 8| + |−7| **d)** |−6 + 8| − |−4| − 6 + |8|

1.061 Berechne.
a) |−3| · 2 − |3 · 4 − 11| − (−2) · (−3)
b) |−3 + 5| − 3 · |− 7 − 11| − |−5|
c) (−8) · (16 − |2 · 5 − 3 · 4| − 10) + |7 − 9|
d) 12 − |4 − 12| − |−4| · |−12| − 12 · |−4|
e) |3 · (−5) − 22| + [24 : |−8| · |+3|]
f) 45 + |(−30) : (−5) + 9| · [6^2 : |−2|]

1.062 Kennzeichne die angegebenen Zahlen auf der Zahlengeraden und gib die Menge im aufzählenden Verfahren an.
a) A = {x∈ℤ| |x| < 3} **b)** B = {x∈ℤ| |x| > 4} **c)** C = {x∈ℤ| |x| ⩾ 5}

1.063 An einem bestimmten Tag werden von Wetterstationen folgende Temperaturen gemessen:
- Arktis: −34 °C
- Alpen: −15 °C
- Reykjavik: −3 °C
- Wüste Gobi: 28 °C

a) Berechne den Temperaturunterschied zwischen der Arktis und der Wüste Gobi.
b) Vergleiche, wie viel wärmer es in den Alpen als in der Arktis ist.
c) Ermittle, zu welchem Ort Reykjavik den größten Temperaturunterschied aufweist.



LESEPROBE

1.3 Rationale Zahlen

1.3.1 Rechnen mit Brüchen

1.064 Einige Schülerinnen und Schüler der 1A bestellen in der Mittagspause gemeinsam Pizza. Ermittle, wie viel jede Person bei gleichmäßiger Aufteilung bekommt.

a) 1 Pizza für 4 Personen **b)** 3 Pizzen für 8 Personen



Um Teile von einem Ganzen anzugeben, benötigt man rationale Zahlen.
Im Alltag werden rationale Zahlen oft in Bruchdarstellung geschrieben, meist kurz Brüche genannt.

Alle positiven und negativen Zahlen der Form $\frac{a}{b}$ mit $a \in \mathbb{Z}$ und $b \in \mathbb{N}^*$ bilden die **rationalen Zahlen**.
Die **Menge der rationalen Zahlen** wird mit $\mathbb{Q}$ bezeichnet: $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{N}^*\right\}$
In der Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ kann man uneingeschränkt addieren, subtrahieren, multiplizieren und dividieren. Die Menge $\mathbb{Q}$ ist daher **abgeschlossen bezüglich der Addition, der Subtraktion, der Multiplikation und der Division**.

Auch alle ganzen Zahlen sind rationale Zahlen, zB $2 = \frac{2}{1}$.
Rational kommt vom lateinischen Wort „ratio“, das Verhältnis bedeutet. Auch im Englischen heißt Verhältnis ratio.
Das $\mathbb{Q}$ als Abkürzung kommt vom Wort Quotient.

Bezeichnungen und Begriffe

- Bruch $= \frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}}$
- **Dezimalbrüche:** Nenner entspricht einer dekadischen Einheit $\left(10, 100, 1000, \ldots;\ \text{zB: } \frac{6}{100}\right)$
- **Erweitern:** Zähler und Nenner werden mit der gleichen Zahl ($\neq 0$) multipliziert. $\left(\text{zB: } \frac{3}{4} \overset{\cdot 3}{=} \frac{9}{12}\right)$
- **Kürzen:** Zähler und Nenner werden durch die gleiche Zahl ($\neq 0$) dividiert. $\left(\text{zB: } \frac{12}{18} \overset{:6}{=} \frac{2}{3}\right)$

Addieren und Subtrahieren von Brüchen

Brüche mit gleichem Nenner (gleichnamige Brüche) werden addiert bzw. subtrahiert, indem man die Zähler der Brüche addiert bzw. subtrahiert. Der Nenner bleibt dabei unverändert.

Brüche, die verschiedene Nenner haben (ungleichnamige Brüche), müssen vor dem Addieren bzw. Subtrahieren gleichnamig gemacht werden.

Als gemeinsamen Nenner verwendet man meist den kleinsten gemeinsamen Nenner, das ist das kleinste gemeinsame Vielfache der Einzelnenner.

Multiplizieren und Dividieren von Brüchen

Brüche werden multipliziert, indem man die Zähler miteinander multipliziert und die Nenner miteinander multipliziert.

$$\frac{\text{Zähler 1}}{\text{Nenner 1}} \cdot \frac{\text{Zähler 2}}{\text{Nenner 2}} = \frac{\text{Zähler 1} \cdot \text{Zähler 2}}{\text{Nenner 1} \cdot \text{Nenner 2}}$$

Man dividiert durch einen Bruch, indem man den Dividenden mit dem **Kehrwert des Divisors** multipliziert.
Der Kehrwert eines Bruchs wird durch Vertauschen von Zähler und Nenner gebildet.

$$\frac{\text{Zähler 1}}{\text{Nenner 1}} : \frac{\text{Zähler 2}}{\text{Nenner 2}} = \frac{\text{Zähler 1}}{\text{Nenner 1}} \cdot \frac{\text{Nenner 2}}{\text{Zähler 2}} = \frac{\text{Zähler 1} \cdot \text{Nenner 2}}{\text{Nenner 1} \cdot \text{Zähler 2}}$$

LESEPROBE

1.065 Erweitere die Brüche $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$ und $\frac{5}{8}$ auf einen (möglichst kleinen) gemeinsamen Nenner.

Lösung:
Der kleinste gemeinsame Nenner ist das kleinste gemeinsame Vielfache der Einzelnenner: kgV(4, 6, 8) = 24
$\frac{3}{4} = \frac{18}{24}$, $\frac{5}{6} = \frac{20}{24}$, $\frac{5}{8} = \frac{15}{24}$

1.066 Kürze so weit wie möglich.

a) $\frac{24}{32}$ **b)** $\frac{75}{125}$ **c)** $\frac{84}{96}$ **d)** $\frac{36}{100}$ **e)** $\frac{108}{144}$ **f)** $\frac{175}{200}$ **g)** $\frac{96}{104}$

1.067 Erweitere auf den angegebenen Nenner.

a) $\frac{3}{5} = \frac{\square}{35}$ **b)** $\frac{3}{8} = \frac{\square}{144}$ **c)** $\frac{2}{5} = \frac{\square}{75}$ **d)** $\frac{2}{3} = \frac{\square}{72}$ **e)** $\frac{5}{12} = \frac{\square}{288}$

1.068 Erweitere so, dass der Nenner eine möglichst kleine dekadische Einheit (zB 10, 100, ...) ist.
Schreibe den Dezimalbruch anschließend als Dezimalzahl an.

a) $\frac{1}{2}$ **b)** $\frac{1}{4}$ **c)** $\frac{2}{5}$ **d)** $\frac{3}{8}$ **e)** $\frac{7}{16}$ **f)** $\frac{11}{25}$ **g)** $\frac{9}{50}$ **h)** $\frac{27}{125}$

1.069 Kreuze jeweils an, welche Zahl einen anderen Wert als die vier anderen Zahlen hat. *[1 aus 5]*
Begründe deine Antwort.

a)

0,2	☐
$\frac{1}{5}$	☐
$\frac{10}{200}$	☐
$\frac{20}{100}$	☐
$\frac{2}{10}$	☐

b)

1,5	☐
$\frac{2}{3}$	☐
$\frac{15}{10}$	☐
$\frac{75}{50}$	☐
$1\frac{1}{2}$	☐

1.070 Argumentiere warum die Zahl

a) $0{,}\dot{3}$ eine rationale Zahl ist. **b)** π keine rationale Zahl ist.

1.071 Ordne folgende Zahlen der Größe nach. Beginne mit der kleinsten Zahl.

a) $\frac{3}{4}$; 0,4; $\frac{3}{10}$; $\frac{50}{100}$; $\frac{4}{5}$ **b)** −1,3; 0,3; $\frac{1}{3}$; $-\frac{14}{10}$; $\frac{300}{1\,000}$

1.072 Berechne das Ergebnis.

a) $\frac{2}{7} + \frac{3}{7} - \frac{1}{7}$ **b)** $\frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{3}{4}$

Lösung:

a) $\frac{2}{7} + \frac{3}{7} - \frac{1}{7} = \frac{2+3-1}{7} = \frac{4}{7}$ **b)** $\frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{3}{4} = \frac{8}{12} + \frac{6}{12} - \frac{9}{12} = \frac{8+6-9}{12} = \frac{5}{12}$

1.073 Berechne und gib das Ergebnis als vollständig gekürzten Bruch an.

a) $\frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \frac{2}{3}$ **b)** $\frac{2}{5} + \frac{3}{2} - \frac{3}{10}$ **c)** $\frac{3}{7} + \frac{3}{10} - \frac{4}{5}$ **d)** $\frac{5}{8} - \frac{1}{4} + \frac{4}{3}$

1.074 Berechne das Ergebnis. Kürze dabei so früh wie möglich.

a) $\frac{5}{12} \cdot \frac{8}{15}$ **b)** $\frac{9}{16} : \frac{3}{20}$

Lösung:

a) $\frac{5}{12} \cdot \frac{8}{15} = \frac{\overset{1}{5} \cdot \overset{2}{8}}{\underset{3}{12} \cdot \underset{3}{15}} = \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 3} = \frac{2}{9}$ **b)** $\frac{9}{16} : \frac{3}{20} = \frac{\overset{3}{9} \cdot \overset{5}{20}}{\underset{4}{16} \cdot \underset{1}{3}} = \frac{15}{4} \left(= 3\frac{3}{4}\right)$

1.075 Berechne und gib das Ergebnis als vollständig gekürzten Bruch an.

a) $\frac{7}{10} \cdot \frac{15}{21}$ **b)** $\frac{16}{21} \cdot \frac{14}{24}$ **c)** $\frac{5}{6} : \frac{10}{9}$ **d)** $\frac{18}{35} : \frac{24}{49}$ **e)** $\frac{21}{2} : 12$

LESEPROBE

1.076 Sandra isst von einer halben Pizza ein Viertel.
Berechne, welchen Anteil an der ganzen Pizza sie isst.

Lösung:
Wir schreiben die Angabe mit Brüchen an: Sandra isst von $\frac{1}{2}$ Pizza $\frac{1}{4}$.
Wir multiplizieren daher $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$.
Von einer halben Pizza ein Viertel entspricht daher einem Achtel einer ganzen Pizza.

1.077 Berechne.

a) $\frac{3}{4}$ von 16 **b)** $\frac{2}{3}$ von 1,5 **c)** $\frac{3}{8}$ von 200 **d)** $\frac{3}{10}$ von 6

1.078 Berechne und gib das Ergebnis als vollständig gekürzten Bruch an.

a) $\left(\frac{3}{5}+\frac{3}{4}\right) \cdot \frac{5}{9}$ **b)** $\left(\frac{3}{8}-\frac{2}{3}\right) : \frac{5}{12}$ **c)** $\frac{4}{3} \cdot \left(\frac{3}{4}-\frac{5}{6}\right)$ **d)** $\frac{3}{10} : \left(\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\right)$ **e)** $\left|\frac{2}{3}-\frac{5}{6}\right|+\frac{1}{3}$ **f)** $\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right) : \frac{9}{4} - \left|-\frac{1}{6}\right|$ **g)** $\frac{28}{27} : \left(\frac{7}{5} \cdot \frac{10}{9}\right)$ **h)** $\left(\frac{17}{19}-\frac{49}{57}\right) \cdot 3$

1.079 Wandle in Dezimalschreibweise um.

a) $\frac{4}{100}$ **b)** $\frac{2}{5}$ **c)** $\frac{57}{1\,000}$ **d)** $\frac{7}{4}$ **e)** $\frac{22}{10}$ **f)** $\frac{1}{9}$

++ Lösen eines Doppelbruchs

$\left(\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}\right) = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$ Außen · Außen / Innen · Innen

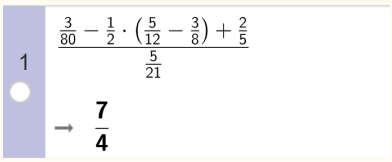
zB $\left(\frac{\frac{6}{4}}{\frac{2}{8}}\right) = \frac{3 \cdot 8^2}{1 \cdot 2_1} = \frac{6}{1} = 6$

1.080 Berechne. Kürze soweit wie möglich.

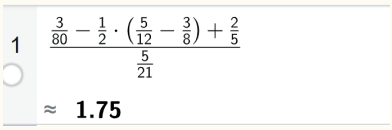
a) $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}}$ **b)** $\frac{\frac{5}{6}}{\frac{10}{9}}$ **c)** $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{9}{16}}$ **d)** $\frac{1}{-\frac{2}{5}}$ **e)** $\frac{2+\frac{1}{3}}{\frac{7}{9}}$ **f)** $\frac{\frac{3}{5}+\frac{1}{2}}{\frac{4}{3}}$

1.081 Führe die Rechnung mittels Technologie durch:
$\left[\frac{3}{80}-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{12}-\frac{3}{8}\right)+\frac{2}{5}\right] : \frac{5}{21} =$
Achte bei der Eingabe auf die korrekte Struktur des Terms.

Lösung:
Die gesamte Rechnung wird in **GeoGebra** in der **CAS-Ansicht** in einer Zeile eingegeben. Dabei ist im Vorfeld bereits genau zu überlegen, wo Klammern zu setzen sind. Es kann auch auf vorgegebene Strukturen (Brüche) zur erleichterten Eingabe zurückgegriffen werden. Am Ende der Eingabe kann mit dem Häkchen die Richtigkeit der Eingabe überprüft werden.



Das Ergebnis wird üblicherweise zuerst als Bruchzahl angezeigt. Durch einen Klick auf das Rundungssymbol wird das Ergebnis als Dezimalzahl angezeigt.



1.082 Berechne mithilfe von Technologieeinsatz (zB Taschenrechner, GeoGebra, ...).
Achte auf die Klammersetzung.

a) $\frac{2}{3}+5$ **b)** $\frac{2}{3+5}-2$ **c)** $\frac{\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{2}+4}{2}$ **d)** $4+\frac{5}{2+3}$ **e)** $2 \cdot \frac{5}{2}+\frac{4+3}{3} \cdot 5$

LESEPROBE

1.083 Berechne und finde heraus, welche der beiden Aufgaben kein Ergebnis hat. Begründe anschließend, wieso das so ist.

a) $\left(\frac{1}{6}-\frac{3}{18}\right):\left(-\frac{6}{17}\right)=$

b) $\left(-\frac{5}{11}\right):\left(-\frac{4}{7}+\frac{16}{28}\right)=$

1.084 Berechne und gib das Ergebnis als vollständig gekürzten Bruch bzw. als gemischte Zahl an. Kontrolliere anschließend mit Technologie. Achte bei der Eingabe der Angabe auf die korrekte Setzung von Klammern.

a) $\frac{2}{5}-\left[1-\left(\frac{5}{6}+\frac{2}{9}\right)\right]\cdot\frac{9}{5}$

b) $\left[\left(\frac{5}{7}-\frac{5}{8}\right)\cdot\frac{4}{5}+\frac{2}{7}\right]:\frac{5}{7}-\frac{2}{5}$

c) $1\frac{1}{6}-\left[\left(\frac{3}{4}+\frac{2}{5}\right)\cdot 3\frac{1}{3}-\frac{7}{6}\right]\cdot\frac{2}{9}$

d) $\left[\left(\frac{5}{6}+\frac{7}{12}\right)\cdot\frac{4}{9}-\frac{1}{3}\right]\cdot\frac{9}{5}+\frac{2}{7}$

e) $\frac{4}{5}\cdot\left[\left(\frac{9}{10}-\frac{2}{3}\right):\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\right]-\frac{3}{8}$

f) $\left[\frac{7}{8}-\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{4}\right)\cdot 2\frac{2}{5}\right]:1\frac{1}{2}+\frac{2}{3}$

1.085 Setze die passende Zahl ein.

a) $\frac{5}{8}\cdot\square=-1$

b) $\left(-\frac{5}{8}\right)-\square=0$

c) $(-6{,}9):\square=-2{,}3$

d) $(-6{,}5)+\square=-1$

1.086 Erstelle mithilfe eines KI-Chatbots eine Übersicht aller Rechenregeln, die du zum Rechnen mit rationalen Zahlen brauchst. Achte darauf, die Rechenregeln sinnvoll zu gliedern und gib jeweils eine Rechnung als Beispiel an.

1.087 Kreuze die beiden falschen Aussage an. *[2 aus 5]*

Wird der Zähler eines Bruchs vergrößert, so vergrößert sich sein Wert.	☐
Wird der Nenner eines Bruchs vergrößert, so vergrößert sich sein Wert.	☐
Zwei Brüche werden miteinander multipliziert, indem man die Zähler miteinander multipliziert und die Nenner miteinander multipliziert.	☐
Ein Bruch wird mit einer ganzen Zahl multipliziert, indem man Zähler und Nenner mit dieser Zahl multipliziert.	☐
Ein Bruch wird durch eine ganze Zahl dividiert, indem man den Nenner mit dieser Zahl multipliziert.	☐

1.088 Ein Supermarkt erhält eine Lieferung von 720 Joghurts. Drei Fünftel der Joghurts werden innerhalb weniger Tage verkauft. Drei Viertel der übrigen Joghurts wird kurz vor Ablauf des Mindesthaltbarkeitsdatums mit Rabatt verkauft. Der Rest wird entsorgt.



a) Ermittle, wie viele Joghurts regulär, also ohne Rabatt, verkauft werden.

b) Berechne, wie viele Joghurts insgesamt verkauft werden.

c) Interpretiere, was mit folgender Rechnung ermittelt wird:
$720\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}$

d) Überlege, wie die Anzahl an entsorgten Joghurts verringert werden kann.

1.089 Eine Musikschule hat für die Renovierung ihrer Räumlichkeiten einen Kredit in Höhe von 9.800 € aufgenommen. Im darauffolgenden Jahr konnte sie durch erfolgreiche Spendenaktionen $\frac{2}{7}$ dieses Kredits zurückzahlen. Berechne den offenen Betrag des Kredits nach der Spendenaktion.

1.090 Ändere den Bruch $\frac{7}{11}$ einerseits, indem du den Zähler um 1 verminderst und andererseits, indem du den Nenner um 1 vergrößerst.

a) Gib an, ob der Bruch mit dem verminderten Zähler oder jener mit dem vergrößerten Nenner größer ist.

b) Finde Beispiele für Brüche, bei denen **a)** anders als für den Bruch $\frac{7}{11}$ zu beantworten ist.
Setze dabei voraus, dass Zähler und Nenner jeweils positive Zahlen sind.

c) Argumentiere, ob es sein kann, dass die entsprechenden Brüche den gleichen Wert haben.

LESEPROBE

1.3.2 Verhältnisse

1.091 Die Zwillinge Paul und Marie möchten für ihre Geburtstagsfeier Muffins backen.
Sie haben folgendes Rezept für 12 Stück. Da die beiden jedoch mehr Freunde eingeladen haben, möchten sie insgesamt 20 Stück Muffins machen und müssen die Zutatenmenge entsprechend anpassen.

a) Berechne die benötigten Zutatenmengen für 20 Stück Muffins.
b) Finde heraus, in welchem Verhältnis die Mengen von Mehl und Zucker stehen. Gib das Verhältnis möglichst einfach an.
c) Argumentiere, was passieren würde, wenn Paul und Marie die Mehlmenge verdoppeln, aber die Milchmenge unverändert lassen.
d) Erkläre, warum es wichtig ist, das Verhältnis der Zutaten beizubehalten.

Rezept für Muffins (12 Stück)
180 g weiche Butter
150 g Zucker
5 g Salz
3 Eier
200 g Mehl
2 TL Backpulver
100 g Heidelbeeren



Unter dem **Verhältnis** zweier Zahlen (bzw. Größen) a und b versteht man den Quotienten $\frac{a}{b}$ und schreibt oft a : b [sprich: *„a zu b“*].

Oft werden Verhältnisse so umgeformt, dass entweder a oder b gleich 1 ist, oder das Verhältnis wird mit möglichst kleinen natürlichen Zahlen angegeben.

1.092 Stelle das Verhältnis 45 : 120
a) als Verhältnis möglichst kleiner natürlicher Zahlen
b) in der Form a : 1
dar.

Lösung:
a) Division durch den ggT(45,120) = 15: 45 : 120 = 3 : 8
b) Division durch 120: 45 : 120 = 0,375 : 1

1.093 Prüfe, ob folgende Aussage wahr ist.
a) 150 : 30 = 25 : 5 **b)** 35 : 20 = 5 : 3 **c)** 100 : 20 = 4 : 1 **d)** 81 : 18 = 9 : 2

1.094 Stelle das gegebene Verhältnis in der Form **1)** a : 1, **2)** 1 : b dar.
a) 32 : 8 **b)** 52 : 13 **c)** 56 : 14 **d)** 18 : 96

1.095 Stelle jeweils als Verhältnis möglichst kleiner natürlicher Zahlen dar.
a) 68 : 85 **b)** 1,25 : 2,5 **c)** 567 : 837 **d)** 0,48 : 1,68 **e)** 648 : 504 **f)** 51,84 : 691,2 **g)** 645 : 860 **h)** 0,2 : 3,6

1.096 Ermittle, welches Größenverhältnis zwischen einem Neugeborenen und einem Erwachsenen besteht, wenn die Durchschnittsgröße eines Neugeborenen mit 50 cm und die Durchschnittsgröße eines Erwachsenen mit 1,75 m angenommen werden kann.

1.097 Farbenfehlsichtigkeit bezeichnet eine Sehstörung, bei der bestimmte Farben nicht deutlich voneinander unterschieden werden können.
In einer Gruppe von 100 Männern sind erfahrungsgemäß 8 farbenfehlsichtig.
a) Gib das Verhältnis von farbfehlsichtigen zu normal sehenden Männern in einem Verhältnis möglichst kleiner natürlicher Zahlen an.
b) Ermittle, wie viele normal sehende Männer auf einen farbenfehlsichtigen Mann kommen.

1.098 Die meisten Fernseher haben heute ein Bildformat von 16 : 9.
a) Gib die Bildbreite eines Fernsehers mit diesem Verhältnis an, dessen Bildlänge 130 cm entspricht.
b) Miss die Bildlänge und -breite eines Fernsehers ab und überprüfe, ob die Maße dem Verhältnis 16 : 9 entsprechen.
c) Recherchiere die Gründe dafür, weshalb heute die meisten Fernseher das Bildformat 16 : 9 besitzen.

LESEPROBE

++ 1.3.3 Rationale Zahlen in Dezimaldarstellung

Jede rationale Zahl in Bruchschreibweise lässt sich durch Ausführen der entsprechenden Division in eine **endliche** oder eine **periodische Dezimaldarstellung** umwandeln.

Umgekehrt kann man jede endliche und jede periodische Dezimaldarstellung in eine **Bruchdarstellung** umwandeln.

1.099 Schreibe anstelle des Bruchs die Division auf und berechne. **a)** $\frac{3}{4}$ **b)** $\frac{1}{3}$
Beschreibe den unterschiedlichen Verlauf der beiden Divisionen mit eigenen Worten.

> Wenn die Division nach einer endlichen Anzahl von Dezimalstellen zu Ende ist, erhalten wir eine **endliche Dezimaldarstellung**. Andernfalls führt die Division auf eine **periodische Dezimaldarstellung**.

Ein Beispiel zur Ermittlung der Bruchdarstellung mit periodischen Zahlen findest du im E-Book.

Für periodische Dezimalzahlen sind die folgenden Schreibweisen üblich:
$0,\overline{3333}\ldots \quad = 0,\dot{3}$

Eine Zahl kann in der Bruchdarstellung bzw. Dezimaldarstellung am **Taschenrechner** mit der Taste a b/c bzw. f◂▸d angezeigt und umgewandelt werden.

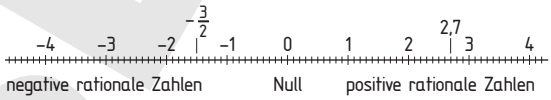
In **GeoGebra** können periodische Dezimalzahlen als Bruchzahl oder mithilfe der Tastatur im Programm eingegeben werden.
Umgewandelt können die Ergebnisse mit den Symbolen
= (exakte Lösung) und ≈ (numerische Lösung) werden.
Symbol für Tastatur:

Symbol für Tastatur:
Eingabe 0.□375
Ergebnis: $0.\overline{375}$

$0.\overline{375}$ → $\frac{125}{333}$ bzw. $0.\overline{375}$ ≈ **0.3754**

In Programmen wie **Word** bzw. **Excel** von Microsoft kann eine periodische Dezimalzahl mit dem Formeleditor geschrieben werden. Mit einer Formel aus dem Formeleditor kann aber nicht weiter gerechnet werden. Zum Rechnen in Excel muss eine periodische Zahl entweder als Bruch (exakte Zahl) oder als Dezimalzahl mit ausreichenden Nachkommastellen (zB 0,333333333 = $0,\dot{3}$) eingegeben werden.

Auch rationale Zahlen kann man auf der Zahlengeraden darstellen:



Zwischen zwei rationalen Zahlen kann man immer beliebig viele weitere rationale Zahlen finden.
Zwischen 3,5 und 3,6 liegt zum Beispiel 3,51. Zwischen 3,5 und 3,51 liegt 3,501 usw.

1.100 Ermittle durch Ausführen der Division die endliche bzw. periodische Dezimaldarstellung des gegebenen Bruchs.
a) $\frac{1}{4}$ **b)** $\frac{2}{7}$ **c)** $\frac{7}{10}$ **d)** $\frac{8}{25}$ **e)** $\frac{11}{6}$ **f)** $\frac{13}{100}$ **g)** $\frac{1}{99}$

1.101 Lies ab, welche Zahlen auf der Zahlengeraden markiert sind.

a)


b)


1.102 Berechne und gib das Ergebnis als vollständig gekürzten Bruch bzw. als gemischte Zahl an. Kontrolliere anschließend mit Technologie. Achte bei der Eingabe der Angabe auf die korrekte Setzung von Klammern.

a) $-0,8 \cdot \left(\frac{2}{5} - 3\right) : \frac{1}{5}$

b) $\frac{3}{5} \cdot \left(\frac{3}{4} - 2\right) + \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3}$

c) $0,75 \cdot \left(\frac{7}{8} - 2\right) + 0,5 \cdot \left(\frac{3}{4} + 1\right)$

d) $-0,9 \cdot \left(\frac{4}{5} - 3\right) + 1,2 \cdot \frac{5}{6} - 0,3$

LESEPROBE

1.4 Reelle Zahlen

Irrationale Zahlen

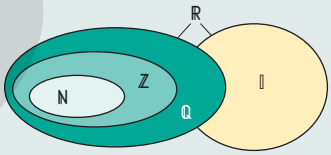
Manche Zahlen können nicht als Bruch zweier ganzer Zahlen dargestellt werden. Das gilt zum Beispiel für Wurzeln aus Primzahlen, wie $\sqrt{2} = 1{,}4142135... \approx 1{,}41$.

Auch die Kreiszahl $\pi = 3{,}1415926535897... \approx 3{,}14$ ist eine irrationale Zahl.

Eine reelle Zahl, die nicht als Bruch (Quotient) zweier ganzer Zahlen darstellbar ist, heißt **irrationale Zahl**.
Sie hat eine nichtperiodische Dezimaldarstellung mit unendlich vielen Dezimalstellen. $\mathbb{I} = \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$

Reelle Zahlen

Die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ und die Menge der irrationalen Zahlen $\mathbb{I}$ bilden zusammen die **Menge der reellen Zahlen** $\mathbb{R}$.
Es gilt: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ und $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$.



Für folgende Teilmengen der Menge der reellen Zahlen gibt es spezielle Symbole:

$\mathbb{R}^+$ ... Menge der positiven reellen Zahlen

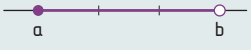
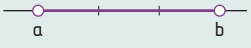
$\mathbb{R}^-$ ... Menge der negativen reellen Zahlen

Jeder reellen Zahl kann ein Punkt auf der Zahlengeraden zugeordnet werden und umgekehrt. Auch für reelle Zahlen gelten die für die natürlichen Zahlen besprochenen Rechengesetze.

Intervalle

Eine Teilmenge der reellen Zahlen, die sich als zusammenhängender Bereich auf der Zahlengeraden darstellen lässt, nennt man ein **Intervall**.

Intervalle können in **Intervallschreibweise** oder als **Menge** angegeben bzw. auf der Zahlengeraden dargestellt werden.

Intervall- und Mengenschreibweise	Darstellung auf der Zahlengeraden	Bemerkungen
abgeschlossenes Intervall: $[a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$		Die Randwerte a und b gehören zum Intervall und werden auf der Zahlengeraden mit vollflächigen Kreisen dargestellt.
rechts offenes Intervall (halboffen): $[a; b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$		Der rechte Randwert b gehört nicht zum Intervall und wird auf der Zahlengeraden mit einem offenen Kreis dargestellt.
links offenes Intervall (halboffen): $]a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$		Der linke Randwert a gehört nicht zum Intervall.
offenes Intervall: $]a; b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$		Die beiden Randwerte a und b gehören nicht zum Intervall.

Offene und halboffene Intervalle können auch wie folgt angeschrieben werden:
$]a; b[= (a; b)$; $[a; b[= [a; b)$; $]a; b] = (a; b]$

Für alle oben dargestellten Intervalle gilt $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ und $a < b$.

Erfolgreich mit Mathematik für Handelsakademien 1. Lehrplan 2027 (SBNR 230734) | © www. hpt.at, 2026

LESEPROBE

1.103 Trage ein: $\in$ bzw. $\notin$

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{I}$	$\mathbb{R}$
-3					
$0,\dot{5}$					
$\frac{40}{5}$					
$\sqrt{13}$					
$\frac{1}{9}$					
$\sqrt[3]{8}$					

1.104 Kreuze die beiden zutreffenden Aussagen über die Zahlenmengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ an. *[2 aus 5]*

Jede ganze Zahl ist auch eine rationale Zahl.	☐
Jede rationale Zahl ist auch eine natürliche Zahl.	☐
Jede natürliche Zahl ist auch eine reelle Zahl.	☐
Jede rationale Zahl ist auch eine ganze Zahl.	☐
Jede reelle Zahl ist auch eine rationale Zahl.	☐

1.105 Schreibe den angegebenen Bereich der reellen Zahlen als Intervall an.
Kennzeichne ihn auf einem geeigneten Ausschnitt der Zahlengeraden.

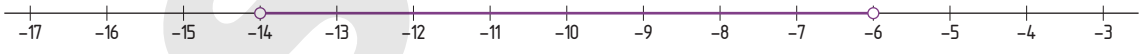
a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 3\}$
b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 6\}$
c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x < -1{,}5\}$
d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid 2{,}5 \leq x \leq 5\}$
e) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid -7 < x \leq -5\}$
f) $F = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2\}$

1.106 Auf den gegebenen Zahlengeraden sind Mengen A bis D dargestellt.
Gib die Mengen in Intervall- und Mengenschreibweise an.

a)


b)


c)

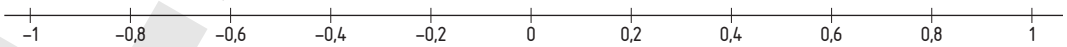

d)


1.107 Schreibe als Menge an.

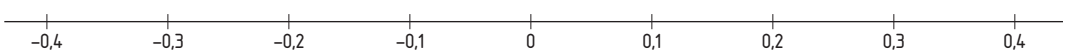
a) $[3; 6]$ **b)** $]5; 8{,}9[$ **c)** $]-7; -2{,}5]$ **d)** $[0; 3{,}7[$ **e)** $]-2{,}3; 0{,}5[$

1.108 Kennzeichne die Menge auf dem jeweiligen Zahlenstrahl und schreibe sie als Intervall an.

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leq x < 2\}$


b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -0{,}8 \leq x \leq -0{,}2\}$


c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid -20 < x < 30\}$


d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -0{,}15 < x \leq 0{,}15\}$


LESEPROBE

1.5 Prozentrechnung

Im Alltag und in der Wirtschaft stellt man relative Anteile häufig durch Prozentzahlen dar.

Ein **Prozent** ist ein Hundertstel. Es gilt daher: $1\ \% = \frac{1}{100} = 0{,}01$

1.109 **a)** Gib 20 % als Bruch und als Dezimalzahl an. **b)** Gib $\frac{1}{4}$ als Dezimalzahl und in Prozent an.

Lösung:

a) $20\ \% = \frac{20}{100} = \frac{1}{5} = 0{,}2$ **b)** $\frac{1}{4} = \frac{25}{100} = 0{,}25 = 25\ \%$

1.5.1 Absolute und relative Anteile

1.110 In zwei Studiengängen wird für eine wissenschaftliche Untersuchung erhoben, wie viele Studierende linkshändig schreiben.
Studiengang Architektur: 15 von insgesamt 120 Studierenden
Studiengang Betriebswirtschaftslehre: 30 von insgesamt 288 Studierenden
Diskutiert in Partnerarbeit, in welchem Studiengang es mehr Studierende gibt, die linkshändig schreiben.

Bezeichnet G eine Gesamtzahl (Grundwert) und A einen Teil davon, dann nennt man **A** den **absoluten Anteil**. Setzt man den Anteil A ins Verhältnis zum Grundwert G, so nennt man den Bruch $\frac{A}{G}$ den **relativen Anteil**.

Ein relativer Anteil kann auch als Dezimalzahl bzw. in Prozent dargestellt werden, zB $\frac{12}{80} = 0{,}15 = 15\ \%$.

1.111 An einer Wiener HAK geben 341 von insgesamt 623 Jugendlichen an, regelmäßig Fastfood zu konsumieren. Von einer HLW in Niederösterreich geben das 294 von 487 Jugendlichen an.

a) Bestimme den absoluten und relativen Anteil jener Jugendlichen, die regelmäßig Fastfood zu sich nehmen, je Schule. Stelle deine Ergebnisse in einer Tabelle dar.

b) Beurteile anschließend, welche der beiden Schulen größeren Handlungsbedarf hat, ihre Schülerschaft über einen bewussteren Umgang mit Fastfood aufzuklären.

Lösung:

a)

	Absoluter Anteil	Relativer Anteil
Wiener HAK	341 Schülerinnen und Schüler	$\frac{341}{623} = 0{,}5473\ldots \approx 54{,}73\ \%$
HLW in Niederösterreich	294 Schülerinnen und Schüler	$\frac{294}{487} = 0{,}6037\ldots \approx 60{,}37\ \%$

b) Absolut gesehen nehmen an der Wiener HAK mehr Schülerinnen und Schüler regelmäßig Fastfood zu sich. Im Verhältnis zur Gesamtzahl der Schülerschaft jedoch konsumiert an der Wiener HAK ein kleinerer Anteil regelmäßig Fastfood als an der HLW in Niederösterreich. Daher hat die HLW einen größeren diesbezüglichen Handlungsbedarf. Der Unterschied ist jedoch relativ klein.

p % eines **Grundwertes G** werden als **Anteil A (Prozentanteil, Prozentwert)** bezeichnet.
p wird als **Prozentsatz** bezeichnet. $p\ \% = \frac{p}{100}$
Es gilt der folgende Zusammenhang: $\frac{A}{G} = \frac{p}{100}$

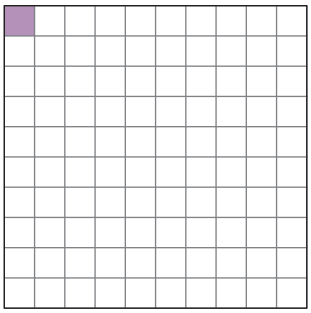
Durch Umformen der Formel von oben erhält man

- Für die Berechnung des Anteils $A = \frac{G \cdot p}{100}$
- Für die Berechnung des Prozentsatzes $p = \frac{A \cdot 100}{G}$ sowie
- Für die Berechnung des Grundwertes $G = \frac{A \cdot 100}{p}$

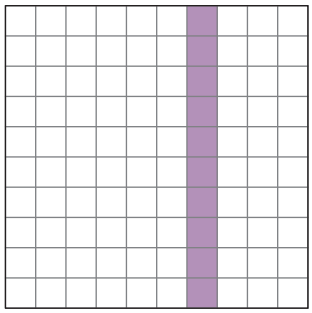
PROBE

1.112 Gib an, wie viel Prozent der Fläche gefärbt sind.

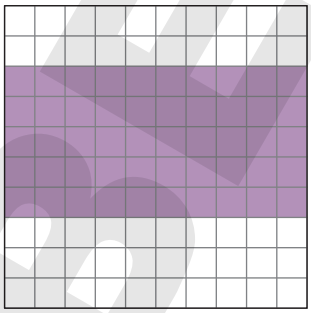
a)



b)



c)



1.113 Gib als vollständig gekürzten Bruch und als Dezimalzahl an.

a) 33 % **b)** 40 % **c)** 7 % **d)** 1,3 % **e)** 99,4 % **f)** 0,23 %

1.114 Gib jeweils in Prozent an.

a) $\frac{25}{100}$ **b)** $\frac{1}{2}$ **c)** $\frac{2}{100}$ **d)** $\frac{3}{4}$ **e)** $\frac{200}{100}$ **f)** $\frac{3}{20}$ **g)** $\frac{124}{100}$ **h)** $\frac{2}{5}$ **i)** $\frac{99}{100}$ **j)** $\frac{9}{10}$ **k)** $\frac{83}{100}$ **l)** $\frac{1}{50}$

1.115 Gib in Prozent an.

a) 0,03 **b)** 0,77 **c)** 0,5 **d)** 0,015 **e)** 1,5 **f)** 0,002

1.116 Kreuze jenen Bruch an, der weniger als 20 % entspricht. *[1 aus 5]*

$\frac{3}{4}$	☐
$\frac{1}{7}$	☐
$\frac{3}{10}$	☐
$\frac{1}{4}$	☐
$\frac{1}{5}$	☐

1.117 Durchschnittlich hat eine von fünf Personen Angst vor Spinnen.

a) Berechne, wie viele Personen mit Angst vor Spinnen man in einem Saal mit 100 Menschen erwarten kann.

b) Leite aus **a)** ab, wie viel Prozent der Menschen Angst vor Spinnen haben.

1.118 An einer Veranstaltung nehmen insgesamt 45 Personen teil. Davon sind 20 Erwachsene, der Rest sind Kinder.

a) Gib jeweils den absoluten Anteil der Kinder und Erwachsenen an.

b) Gib jeweils den relativen Anteil der Kinder und Erwachsenen als möglichst einfachen Bruch sowie als Dezimalzahl an.

1.119 Auf einer belebten Einkaufsstraße werden insgesamt 200 Personen zu ihrer Einstellung gegenüber dem Einwegflaschen-Pfandsystem befragt. Etwa jede siebte Person gibt an, diese Maßnahme als sinnvoll zu erachten.



a) Berechne, wie viele Personen das sind.

b) Versuche, das Symbol, das Einwegpfandflaschen kennzeichnet, aus dem Gedächtnis zu skizzieren. Vergleiche anschließend deine Skizze mit dem echten Pfandsymbol.

c) Recherchiere, wie Einwegpfandflaschen nach ihrer Sammlung weiterverarbeitet und recycelt werden.

1.120 Im Zuge eines Handyexperiments soll getestet werden, wie Jugendliche auf handyfreie Zeit reagieren. In der Klasse 1A nehmen 18 von 25 Jugendlichen an dem Experiment teil.
In der Klasse 1B sind es 16 von 20 Jugendlichen.

a) Argumentiere, in welcher Klasse der relative Anteil der Teilnehmenden größer ist.

b) Ermittle, wie viele zusätzliche Jugendliche noch am Experiment in einer Klasse teilnehmen müssten, damit der relative Anteil an Teilnehmenden in beiden Klassen gleich hoch ist.

c) Notiere Vorteile, die handyfreie Zeit mit sich bringen würde. Denke auch darüber nach, welche Dinge man vorab organisieren bzw. bedenken müsste (zB Wecker stellen).

Erfolgreich mit Mathematik für Handelsakademien 1. Lehrplan 2027 (SBNR 230734) | © www. hpt.at, 2026

HTL-PROBE

Berechnung des Anteils

Sind der Grundwert und der Prozentsatz gegeben, so gibt es für die Berechnung des Anteils verschiedene Möglichkeiten, die anhand des folgenden Beispiels gezeigt werden.

1.121 Berechne 15 % von 200 €.

Lösung:

1. Möglichkeit: Verwendung der Formel $A = \frac{G \cdot p}{100}$

$G = 200$ und $p = 15 \Rightarrow A = \frac{G \cdot p}{100} = \frac{200 \cdot 15}{100} = 30$

2. Möglichkeit: Multiplikation mit einer Dezimalzahl

$15\,\% = \frac{15}{100} = 0{,}15$

$A = 200 \cdot 0{,}15 = 30$

- Prozentangabe als Dezimalzahl anschreiben
- Grundwert mit dieser Dezimalzahl multiplizieren

3. Möglichkeit: mithilfe einer Schlussrechnung

: 100 ↘	100 %	200 € ↙ : 100
· 15 ↘	1 %	2 € ↙ · 15
	15 %	30 €

- Der Anteil (Prozentwert) A steht zum Prozentsatz im direkten Verhältnis. Je größer der Prozentsatz, desto größer der Anteil.

Wir erhalten in allen drei Fällen das folgende Ergebnis: 15 % von 200 € sind 30 €.

1.122 Berechne den Anteil.

a) 5 % von 200 s
b) 4 % von 700 €
c) 25 % von 16 €
d) 55 % von 400 Stück
e) 40 % von 120 h
f) 99 % von 1 000 cm

1.123 Gib den Faktor an, mit dem der Grundwert G multipliziert werden muss, um den Anteil zu erhalten.

a) 5 % von G
b) 10 % von G
c) 18 % von G
d) 110 % von G
e) 85 % von G
f) 200 % von G

1.124 Ordne den beiden Satzteilen jeweils die passende Ergänzung aus A bis D zu.

5 % von G können berechnet werden mit ...	☐
95 % von G können berechnet werden mit ...	☐

A	G · 9,5
B	G · 0,95
C	G · 0,05
D	G · 0,50

1.125 85 % der 520 Parkplätze eines Einkaufszentrums sind besetzt.

a) Berechne die Anzahl der besetzten Parkplätze auf zwei verschiedene Möglichkeiten. Vergleiche deine Lösungswege und entscheide, welchen du bevorzugst.

5 % der Parkplätze sind Familienparkplätze und weitere 5 % sind barrierefreie Parkplätze.

b) Erkläre, was mit dem Ausdruck 520 · 0,9 berechnet wird.

1.126 Ein Supermarkt bietet pro Woche etwa 2 800 kg Lebensmittel zum Verkauf an.
Davon werden etwa 4,5 % nicht verkauft und entsorgt.

a) Ermittle, wie viele Kilogramm pro Jahr entsorgt werden (52 Wochen).

b) Eine Initiative des Supermarkts reduziert die Verschwendung auf 3 %.
Berechne, wie viele Kilogramm entsorgte Lebensmittel pro Jahr eingespart werden.

1.127 Ein Bauer erntet in einem Jahr 2 750 kg Äpfel. 80 % dieser Menge werden zu Saft und der Rest der Apfelernte zu Apfelchips verarbeitet.

a) Berechne, wie viel kg zu Saft verarbeitet werden.

b) Um zu berechnen, wie viel kg zu Chips verarbeitet werden, meint Asadullah, dass man nur von der gesamten Ernte das Ergebnis aus **a)** abziehen müsste. Leontina entgegnet, dass man mithilfe der Rechnung 2 750 · 0,2 zum Ergebnis kommt. Argumentiere, wer von beiden Recht hat.



PROBE

Rabatt: mengen- oder treuebedingter Preisnachlass für eine Ware bzw. Dienstleistung (10 %, 15 %, …)
Skonto: Preisnachlass für eine schnelle Bezahlung (2 % oder 3 %)
Nettopreis: Preis ohne Umsatzsteuer **Bruttopreis:** Preis inklusive Umsatzsteuer

Änderungsfaktor

In der Wirtschaft geht es oft um die Auswirkung von prozentuellen Änderungen, zB Erhöhung oder Senkung des Preises um einen bestimmten Prozentsatz. In solchen Fällen ist es zweckmäßig, den jeweiligen Grundwert mit einem Änderungsfaktor zu multiplizieren.

p % mehr bedeutet: Der neue Wert entspricht $100\ \% + p\ \% = 1 + \frac{p}{100}$.
zB 10 % Preiserhöhung: Der neue Preis entspricht $100\ \% + 10\ \% = 110\ \%$ des bisherigen Preises.
Der Änderungsfaktor ist in diesem Fall **1,1**, weil $110\ \% = \frac{110}{100} = 1{,}1$.

p % weniger bedeutet: Der neue Wert entspricht $100\ \% - p\ \% = 1 - \frac{p}{100}$.
zB 10 % Preissenkung: Der neue Preis entspricht $100\ \% - 10\ \% = 90\ \%$ des bisherigen Preises.
Der Änderungsfaktor ist in diesem Fall **0,9**, weil $90\ \% = \frac{90}{100} = 0{,}9$.

1.128 Berechne mit dem Änderungsfaktor den Endpreis.
a) Eine Bluse um 62 € wird um 25 % verbilligt.
b) Ein Laptop kostet 899 € netto. Die Umsatzsteuer beträgt 20 %.

Lösung:
a) $62 \cdot \mathbf{0{,}75} = 46{,}50$ € **b)** $899 \cdot \mathbf{1{,}20} = 1\,078{,}80$ €

1.129 Gib den Änderungsfaktor an, mit dem der Grundwert G multipliziert werden muss.
a) G wird um 7 % erhöht **c)** G steigt um 30 % **e)** G wird um 12 % vermehrt
b) G wird um 8 % gesenkt **d)** G sinkt um 50 % **f)** G sinkt um 0,04 %

1.130 Gib an, um wie viel Prozent der Grundwert G gestiegen bzw. gesunken ist.
a) $G \cdot 1{,}1$ **b)** $G \cdot 0{,}8$ **c)** $G \cdot 1{,}01$ **d)** $G \cdot 0{,}12$ **e)** $G \cdot 1{,}3$ **f)** $G \cdot 0{,}95$

1.131 Der Preis P einer Ware ändert sich auf den Preis P_{neu}.
Ordne den beiden Gleichungen jeweils die zugehörige Aussage aus A bis D zu.

$P_{neu} = P \cdot 1{,}02$	☐
$P_{neu} = P \cdot 0{,}98$	☐

A	Der Preis P wird um 0,02 % gesenkt.
B	Der Preis P wird um 2 % erhöht.
C	Der Preis P wird um 1,02 % erhöht.
D	Der Preis P wird um 2 % gesenkt.

1.132 Eva möchte für ihre Freundin Süßigkeiten kaufen. Aktuell gibt es auf das gesamte Süßigkeitensortiment 25 % Rabatt. Auf Schokolade gibt es zusätzlich 10 % Preisnachlass.
a) Berechne den reduzierten Preis einer Packung Gummibären, die ohne Abzug des Rabatts 4,59 € kosten würden. Runde auf Cent genau.
b) Gib den Preisnachlass in Euro an, den man beim Kauf einer Tafel Schokolade mit dem ursprünglichen Preis von 3,90 € bekommt.
c) Formuliere zum Ausdruck $3 \cdot 4{,}59 \cdot 0{,}75 + 2 \cdot 3{,}90 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}9$ einen passenden Sachkontext.

1.133 Ein Handwerksbetrieb stellt einer Kundin für Renovierungsarbeiten eine Rechnung über 1.280 € aus. Auf der Rechnung findet sich folgender Hinweis: „Bei Bezahlung innerhalb von 10 Tagen gewähren wir 2 % Skonto."
a) Erkläre die Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen einem Rabatt und Skonto.
b) Berechne, wie viel die Kundin bezahlen muss, wenn sie den Rechnungsbetrag innerhalb dieser Frist überweist.
Nachträglich erhält die Kundin noch einen Rabatt von 5 % wegen Mängeln bei den Arbeiten.
c) Prüft in Partnerarbeit, ob die Reihenfolge der Abzüge einen Unterschied macht und findet eine nachvollziehbare Begründung für eure Erkenntnisse.

Erfolgreich mit Mathematik für Handelsakademien 1. Lehrplan 2027 (SBNR 230734) | © www. hpt.at, 2026

Berechnung des Grundwerts

Sind der Anteil und der Prozentsatz gegeben, kann man auch den Grundwert auf verschiedene Arten ermitteln.

1.134 465 Angestellte einer Firma – das sind 75 % aller Angestellten dieser Firma – kommen mit einem öffentlichen Verkehrsmittel zur Arbeit.
Berechne, wie viele Angestellte es in dieser Firma insgesamt gibt.

Lösung:

1. Möglichkeit: Verwendung der Formel $G = \frac{A \cdot 100}{p}$

$A = 465$ und $p = 75 \Rightarrow G = \frac{A \cdot 100}{p} = \frac{465 \cdot 100}{75} = 620$

2. Möglichkeit: Division durch eine Dezimalzahl

$75\,\% = \frac{75}{100} = 0{,}75$

- Prozentangabe als Dezimalzahl anschreiben

Da bei der Berechnung des Anteils A der gegebene Grundwert G mit dem als Dezimalzahl angegebenen Prozentsatz multipliziert wird, muss bei der Grundwertberechnung der gegebene Anteil durch den als Dezimalzahl angegebenen Prozentsatz dividiert werden.

$G = 465 : 0{,}75 = 620$

3. Möglichkeit: mithilfe einer Schlussrechnung

: 75 ↘	75 %	 465	↙ : 75
· 100 ↘	1 %	 6,2	↙ · 100
	100 %	 620	

- Der Anteil (Prozentwert) A steht zum Prozentsatz im direkten Verhältnis. Je größer der Prozentsatz, desto größer der Anteil.

Wir erhalten jeweils das Ergebnis: Es gibt in dieser Firma insgesamt 620 Angestellte.

1.135 Berechne den Grundwert.

a) 5 % des Grundwerts sind 12 €.
b) 15 % des Grundwerts sind 3 m.
c) 120 % des Grundwerts sind 480 €.
d) 3,99 € sind 50 % des Grundwerts.
e) 68 s sind 34 % des Grundwerts.
f) 45 Stück sind 125 % des Grundwerts.

1.136 Aus einer Erhebung über das Rauchverhalten der österreichischen Bevölkerung aus dem Jahr 1997 wurde ersichtlich, dass zu diesem Zeitpunkt 1,89 Millionen Menschen rauchten. Das entsprach 23,5 % der damaligen österreichischen Bevölkerung.

a) Berechne, wie groß die österreichische Bevölkerung zu diesem Zeitpunkt war.
b) Diskutiert in Gruppen, wie eine entsprechende Befragung heute vermutlich ausfallen würde. Begründet eure Einschätzungen und vergleicht mögliche Veränderungen mit der damaligen Situation.

(nach *Rauchgewohnheiten 1997*. Statistik Austria, 2002)



1.137 Auf einer deutschen Website ist der Preis einer Uhr inklusive 19 % Umsatzsteuer mit 428,40 € angegeben.

a) Berechne den Nettopreis der Uhr.

Ein Kunde aus Österreich legt die Uhr in den Warenkorb, woraufhin die Umsatzsteuer auf 20 % korrigiert wird. Er soll nun 432 € für die Uhr bezahlen.

b) Argumentiere, ob der Preis korrekt angepasst wurde.

1.138 Nach einer Mieterhöhung um 15 % bezahlt eine Gastwirtin für ihr Lokal monatlich 1.552,50 € Miete. In einem Schreiben ihres Vermieters ist zu lesen: „Aufgrund der gestiegenen Inflation sehen wir uns leider gezwungen, die Miete um etwa 100 € (entsprechend 15 %) zu erhöhen."
Widerlege, dass die Mieterhöhung nur etwa 100 € betragen hat.

1.139 Ordne den Aufgaben jeweils die richtige Formel aus A bis D zu.

Der ursprüngliche Preis P wird um 45 % vermindert. Der neue Preis soll berechnet werden.	
Der neue Preis P beträgt 45 % des ursprünglichen Preises. Der ursprüngliche Preis soll berechnet werden.	

A	P · 0,45
B	P · 0,55
C	P : 0,45
D	P : 0,55

PROBE

Berechnung des Prozentsatzes

Sind der Anteil und der Grundwert gegeben, kann man auch den Prozentsatz auf verschiedene Arten ermitteln.

1.140 Eine Hose kostete 80 € und wird im Ausverkauf um 20 € billiger angeboten.
Berechne, um wie viel Prozent sie verbilligt wurde.

Lösung:

1. Möglichkeit: Verwendung der Formel $p = \frac{A \cdot 100}{G}$

$G = 80$ und $A = 20 \Rightarrow p = \frac{A \cdot 100}{G} = \frac{20 \cdot 100}{80} = 25$

2. Möglichkeit: Division des Anteils durch den Grundwert
Da bei der Berechnung des Anteils A der gegebene Grundwert G mit dem als Dezimalzahl angegebenen Prozentsatz multipliziert wird, erhält man als Quotient aus Anteil und Grundwert den als Dezimalzahl angegebenen Prozentsatz, den man wie gewohnt umrechnen kann.

$p = \frac{20}{80} = 0{,}25 = \frac{25}{100} = 25\ \%$

3. Möglichkeit: mithilfe einer Schlussrechnung

: 80	80 €	100	%
· 20	1 €	1,25 %	: 80 / · 20
	20 €	25	%

- Der Anteil (Prozentwert) A steht zum Prozentsatz im direkten Verhältnis. Je größer der Prozentsatz, desto größer der Anteil.

Wir erhalten jeweils das Ergebnis: Die Hose wurde um 25 % verbilligt.

1.141 Berechne den Prozentsatz für den angegebenen Prozentwert und Grundwert.

a) 100 € von 400 €
b) 15 s von 300 s
c) 3,49 € von 6,98 €
d) 4 Stück von 200 Stück
e) 70 Personen von 1 400 Personen
f) 15 cm von 500 cm

1.142 Für eine neue Mitarbeiterin wird ein Laptop gekauft. Zwei gleichwertige Modelle stehen zur Auswahl. Modell_1 hat einen Preis von 456 €, Modell_2 einen Preis von 480 €.

a) Interpretiere im Sachzusammenhang, was mit dem Ausdruck $\frac{480 - 456}{480} \cdot 100$ berechnet wird.
b) Berechne, um wie viel Prozent Modell_2 teurer ist als Modell_1.
c) Vergleiche die Ergebnisse aus **a)** und **b)**.

1.143 Ein Drogeriemarkt bewirbt ein Waschmittel mit folgendem Angebot: *„WaschRein in der neuen Größe von 750 ml – 20 % mehr Inhalt zum Angebotspreis von nur 4,70 €!“*
Herr Goldner erinnert sich, dass er das Waschmittel bisher um 3,90 € gekauft hat.



a) Berechne den Inhalt des Waschmittels in der alten Größe.
b) Entscheide, ob das Waschmittel in der neuen Größe zum Angebotspreis tatsächlich günstiger ist. Begründe deine Entscheidung mithilfe einer Rechnung.

1.144 Ein Chef lädt seine Klienten zu einem Geschäftsessen ein. Er bezahlt insgesamt 705,78 € (inklusive Trinkgeld in der Höhe von 52,28 €). Auf der Rechnung sind die Getränke mit 263,00 € ausgewiesen.

a) Berechne, wie viel Prozent das Trinkgeld ausmacht.
b) Berechne den prozentuellen Anteil der konsumierten Getränke.
c) Berechne den Nettobetrag der Getränke, wenn 20% MWSt verrechnet wurden.
d) Recherchiere im Internet, welche unterschiedlichen Umsatzsteuersätze in Österreich für Getränke und Speisen gelten.

1.145 Vier Schulklassen einer Schule fahren auf Sommersportwoche. Insgesamt nehmen 116 von 130 Schülerinnen und Schüler teil. Während dieser Woche erleben die Schülerinnen und Schüler verschiedene sportliche Aktivitäten.

a) Berechne den Prozentsatz der teilnehmenden Schülerinnen und Schüler.

Emine kauft sich in einem Sportgeschäft einen Fahrradhelm und bekommt 14,90 € Rabatt. Der reguläre Preis des Helms beträgt 59,90 €.

b) Berechne den Rabatt des Fahrradhelms in Prozent.

Die Schülerinnen und Schüler machen eine 40 km lange Radtour. Nach 22 km legen sie eine Pause ein.

c) Berechne, wie viel Prozent der Strecke sie bereits geschafft haben.

Erik trifft beim Bogenschießen mit 18 von insgesamt 24 Pfeilen ins Ziel.

d) Berechne die Trefferquote von Erik in Prozent.

Erfolgreich mit Mathematik für Handelsakademien 1. Lehrplan 2027 (SBNR 230734) | © www. hpt.at, 2026

PROBE

Vermischte Aufgaben mit Prozenten

1.146 Eine Ware wird zunächst um 20 % verbilligt. Eine Woche später wird sie nochmals um 10 % des letzten Preises verbilligt.
Berechne, um wie viel Prozent des ursprünglichen Preises diese Ware insgesamt verbilligt wurde.

Lösung:
P … ursprünglicher Preis
P · 0,8 … Preis nach der Verbilligung um 20 %
P · 0,8 · 0,9 = P · 0,72 … Preis nach der weiteren Verbilligung um 10 %

Der Letztpreis beträgt 72 % des ursprünglichen Preises.
Das entspricht einer Verbilligung um 28 %.

1.147 Ein Fahrrad kostet ursprünglich 769 €.
a) Erkläre, was mit dem Ausdruck 769 · 1,05 · 1,05 · 1,05 in diesem Sachkontext berechnet werden kann.
b) Berechne, um wie viel Euro sich der ursprüngliche Preis verändert, wenn er um 15 % angehoben wird.
c) Vergleiche den Ausdruck aus **a)** und deine Rechnung aus **b)** und beschreibe deren Unterschiede.

1.148 Ein Snowboard kostet ursprünglich 329 €. Der Preis wird nach Saisonbeginn um 10 % ermäßigt. Im März wird der ermäßigte Preis nochmals um 30 % reduziert.
a) Gib einen Änderungsfaktor an, mit dem du die beiden Preisreduktionen berücksichtigen kannst und berechne anschließend den neuen Preis des Snowboards.
b) Bestimme, um wie viel Prozent sich der Preis durch diese Reduktionen vermindert hat.

1.149 Ordne den Beschreibungen links den korrekten Term für den Preis nach den Änderungen zu.

1	Der Preis a einer Ware wird zunächst um 10 % reduziert und danach um 10 % erhöht.	☐
2	Der Preis a einer Ware wird zunächst um 5 % reduziert und danach um 15 % erhöht.	☐

A	a · 0,99
B	a
C	a · 1,0925
D	a · 1,1

1.150 Der Preis für ein Smartphone wurde zweimal reduziert, zuerst um 10 % und 2 Wochen später um weitere 15 %.
a) Argumentiere, warum der Preis nach 2 Wochen höher ist, als wenn man diesen gleich um 25 % reduziert hätte.
b) Berechne, um wie viel Prozent der Preis des Smartphones nach 2 Wochen billiger ist als vor der ersten Preissenkung.

1.151 Vollmilch hat einen Fettgehalt von 3,6 %.
a) Berechne, wie viel Milliliter reines Fett in einem halben Liter Vollmilch enthalten sind.
b) Recherchiere den Fettgehalt weiterer Milchsorten und pflanzlicher Drinks. Erstelle eine Tabelle, in der jeweils der Fettgehalt in Prozent sowie in g bzw. ml pro halben Liter angegeben ist.

1.152 Ein Fernseher kostet ursprünglich 1.000 €. Am Black Friday bekommt man ihn günstiger.
Der Preisnachlass beträgt 40 % bei Barzahlung bzw. 20 % bei Zahlung mit Kreditkarte. Bernd bezahlt bar, Karin mit Kreditkarte.
Kreuze die beiden richtigen Aussagen an und überprüfe jeweils mit einer Rechnung. *[2 aus 5]*

Bernd bezahlt 40 % des Neupreises.	☐
Bernd bezahlt um 20 % weniger als Karin.	☐
Karin zahlt um ein Drittel mehr als Bernd.	☐
Bernd bezahlt 75 % des Preises, den Karin bezahlt.	☐
Bernd bezahlt um 400 € weniger als Karin.	☐

HEPROBE

1.153 In einem Baumarkt sind die Preise ohne 20 % Umsatzsteuer angegeben.
Herr Müller erhält einen Stammkundenrabatt von 10 %.
Er behauptet: *„Für den zu bezahlenden Betrag macht es keinen Unterschied, ob der Rabatt vor oder nach dem Dazurechnen der Umsatzsteuer abgezogen wird."*
Zeige, dass Herr Müller recht hat.

1.154 In den beiden Sommermonaten Juli und August 2026 wurden auf den sechs österreichischen Flughäfen 7 019 113 Fluggäste befördert. Das entspricht einen Rückgang um 5,1 % im Vergleich zu den Monaten Juli und August im Vorjahr.
a) Berechne, wie viele Fluggäste im Juli und August 2025 auf den österreichischen Flughäfen befördert wurden.
Der Flughafen Salzburg verbuchte im Juli und August 2026 einen Anstieg um 8,9 % auf 353 383 Fluggäste und erzielte damit einen seiner je in einem Sommer verzeichneten höchsten Wert.
b) Berechne die Anzahl der Fluggäste am Salzburger Flughafen im Vorjahr.
c) Berechne den prozentuellen Anteil der Salzburger Fluggäste von ganz Österreich im Jahr 2026.
(Quelle: Statistik Austria)

1.155 Eine Familie kauft für einen Wocheneinkauf folgende Lebensmittel ein:

Lebensmittel	eingekaufte Menge	Prozentanteil der weggeworfenen Lebensmittel im Haushalt (Quelle: wwf)
Obst und Gemüse	5,8 kg	27 %
Brot	1,6 kg	28 %
Milchprodukte	2,4 kg	12 %
Reis	1,5 kg	7 %



Untersuchungen zeigen, dass durchschnittlich ein Prozentanteil der gekauften Lebensmittel im Haushalt weggeworfen werden (siehe Tabelle).
Ermittle, wie viele Kilogramm Lebensmittel von diesem Einkauf lt. Statistik weggeworfen werden.

1.156 Der Preis für einen Beamer beträgt 1.495 €.
In einer Aktionswoche wird der Preis des Beamers um 20 % gesenkt, danach wird der Preis wieder um 20 % erhöht.
a) Überprüfe mithilfe einer Rechnung, ob der Preis des Geräts nach der Reduktion und nach der Erhöhung um jeweils 20 % dem ursprünglichen Preis von 1.495 € entspricht.
b) Berechne, um welchen Prozentsatz der reduzierte Preis erhöht werden muss, damit der ursprüngliche Preis von 1.495 € wieder verlangt werden kann.
c) Erkläre, warum der gesuchte Prozentsatz bei der Erhöhung höher als 20 % sein muss.

1.157 Im Jahr 2025 verunglückten 10 479 Radfahrende im Straßenverkehr. 4 831 Beteiligte trugen keinen Fahrradhelm. 65 Radfahrende wurden getötet, 26,67 % wurden trotz Fahrradhelm schwer verletzt.
a) Interpretiere im Sachzusammenhang, was mit dem Ausdruck $\frac{4\,831}{10\,485} \cdot 100$ berechnet wird.
b) Berechne, wie viele Personen mit Fahrradhelm schwer verletzt wurden.
c) Berechne, wie viel Prozent der Radfahrenden getötet wurden.
(Quelle: Statistik Austria)



1.158 Ein Möbelhaus wirbt mit dem Angebot „Nur heute: 20 % Mehrwertsteuer geschenkt". Im Kleingedruckten ist folgender Satz zu lesen: „Entspricht einem Preisnachlass von 16,67 %."
a) Erkläre, wie es zu der Differenz im Rabatt kommt.
b) Berechne, wie viel man bei diesem Angebot für eine Couch im Wert von 879 € bezahlen müsste.

KOSTENPROBE

1.5.2 Promille

Sehr kleine Anteile an einem Ganzen werden im Alltag und in der Wirtschaft durch **Promille** oder ppm (Parts per million) beschrieben. Die Berechnungen erfolgen analog zu jenen der Prozentrechnung.

Ein **Promille** ist ein Tausendstel. Es gilt daher: $1\ ‰ = \frac{1}{1000} = 0{,}001 = 10^{-3}$

p ‰ eines **Grundwertes G** werden als **Anteil A (Promilleanteil, Promillewert)** bezeichnet. **p** wird in diesem Fall als **Promillesatz** bezeichnet.

Es gilt: $A = \frac{G \cdot p}{1000}$

++ **Parts per million (ppm)** beschreibt, wie viele Teile auf 1 000 000 Gesamtteile kommen.

$1\ ppm = \frac{1}{1\,000\,000} = 10^{-6} = 0{,}001\ ‰$

Es gilt: **1 Promille** entspricht genau **1 000 ppm**. Diese Einheit wird für folgende Messungen verwendet: CO_2-Konzentration in der Luft, Salzgehalt im Meerwasser, Chlor im Poolwasser, ...

Dezimalzahl	0,0003	0,002	0,01	0,5	4
Prozent	0,03 %	0,2 %	1 %	50 %	400 %
Promille	0,3 ‰	2 ‰	10 ‰	500 ‰	4 000 ‰
ppm	300	2 000	10 000	500 000	4 000 000

1.159 Gib den Promillesatz als Bruch und als Dezimalzahl an.

a) 33 ‰ **b)** 40 ‰ **c)** 7 ‰ **d)** 1,3 ‰ **e)** 99,4 ‰ **f)** 0,2 ‰

1.160 Gib in Promille an.

a) 0,005 **b)** 0,015 **c)** 0,33 **d)** 1,25 **e)** 0,003 **f)** 0,125

1.161 Ordne den mit einem Änderungsfaktor multiplizierten Grundwerten G die korrekten Änderungsfaktoren in Prozent- bzw. Promilledarstellung zu.

1	G · 1,001	
2	G · 1,0001	

A	0,1 %
B	1 %
C	10 ‰
D	0,1 ‰

1.162 In Österreich gilt beim Lenken von Fahrzeugen ein gesetzlicher Höchstwert von 0,5 ‰ Blutalkohol. Bei einer Polizeikontrolle wurden bei einer Person 0,2 ml Alkohol pro Liter Atemluft gemessen. Das entspricht umgerechnet einer Gesamtmenge von 2,5 ml Alkohol im Blut.
Entscheide, ob diese Person in Österreich ein Fahrzeug lenken dürfte. Nimm dazu an, dass eine Person etwa sechs Liter Blut hat.



1.163 Der Gehalt an reinem Gold wird in Promille angegeben. So enthält ein Schmuckstück aus „585er Gold“ 585 ‰ Gold, ein Schmuckstück aus „750er Gold“ 750 ‰.
Gib den reinen Goldgehalt in g an.

a) 70 g schwere Halskette aus 585er Gold **b)** 5 g schwerer Ring aus 750er Gold

1.164 Eine Handwerkerin hat eine Haftpflichtversicherung abgeschlossen. Sie bezahlt
a) 1.050 € jährliche Prämie bei einer Versicherungssumme von 600.000 €,
b) 1.850 € jährliche Prämie bei einer Versicherungssumme von 1.000.000 €.
Berechne, wie viel Promille der Versicherungssumme die Prämie beträgt.

Erfolgreich mit Mathematik für Handelsakademien 1. Lehrplan 2027 (SBNR 230734) | © www. hpt.at, 2026

MUSTERPROBE

1.5.3 SRDP Aufgabenpool kennenlernen

Der SRDP (standardisierte Reife- und Diplomprüfung) Aufgabenpool bietet zahlreiche ehemalige und veröffentlichte Maturaaufgaben inklusive Lösungen, die zum Üben verwendet werden können.

Wie kommt man zum Aufgabenpool?

1. Öffne die Webseite www.matura.gv.at
   Hier sind auch gesamte Maturaangaben inkl. Lösungen zu finden.
2. Wähle den Bereich **Angewandte Mathematik** aus.
3. Unter „Aufgabenpool & Übungsplattform“ findet ihr den Link zum Aufgabenpool, alternativ geht das auch direkt mit www.aufgabenpool.at
4. Wähle nochmals Angewandte Mathematik aus und suche nach passenden Aufgaben.
   Hinweis: Aufgaben mit einem * sind ehemalige Maturaaufgaben.

1.165 **Bluthochdruck bei Erwachsenen * c)**

Im Jahr 1975 hatten in einer bestimmten Stadt 40,8 % aller Männer Bluthochdruck. Im Jahr 2015 hatten in dieser Stadt nur noch 25,2 % aller Männer Bluthochdruck.
Jemand argumentiert: „Im Jahr 1975 war die Anzahl der Männer mit Bluthochdruck in dieser Stadt daher sicher größer als jene im Jahr 2015.“
Begründen Sie, warum diese Argumentation unzulässig ist.

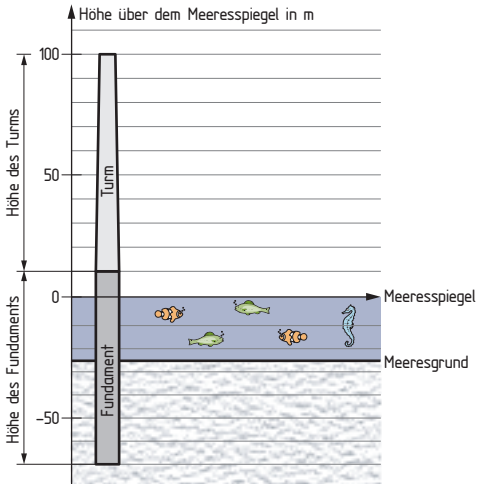
1.166 **Käse * c)**

Bei Käse ist die Gesamtmasse die Summe aus der Trockenmasse und der Masse an enthaltenem Wasser.
Jemand kauft ein Käsestück mit einer Gesamtmasse von 120 g.
Der Wasseranteil dieses Käsestücks beträgt 35 %.
Auf der Verpackung wird der Fettanteil in der Trockenmasse mit 40 % angegeben.
Kreuzen Sie die zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]*

Die Trockenmasse beträgt 85 g.	☐
Die Fettmasse beträgt 35 g.	☐
Der Fettanteil an der Gesamtmasse beträgt 26 %.	☐
Der Anteil der Trockenmasse an der Gesamtmasse beträgt 60 %.	☐
Die Wassermasse beträgt 30 g.	☐

1.167 **Windparks * b)**

Offshore-Windparks werden auf dem Meer in Küstennähe errichtet.
In einer Broschüre über einen Offshore-Windpark ist die nachstehende Skizze abgebildet.
Kreuzen Sie die auf die Skizze zutreffende Aussage an. (Die Prozent-Angaben sind auf ganze Zahlen gerundet.) *[1 aus 5]*



Rund 33 % der Höhe des Fundaments befinden sich über dem Meeresspiegel.	☐
Rund 91 % der Höhe des Fundaments befinden sich unterhalb des Meeresgrunds.	☐
Rund 53 % der Gesamthöhe (Fundament und Turm) entsprechen der Turmhöhe.	☐
Rund 27 % der Gesamthöhe (Fundament und Turm) befinden sich über dem Meeresspiegel.	☐
Rund 51 % der Höhe des Fundaments befinden sich zwischen Meeresgrund und Meeresspiegel.	☐

1.168 **U-Bahn * a)**

Für die Linie U1 gilt: 67,187 % der Fahrstrecke verlaufen unterirdisch, das sind 12,9 km. Die restliche Fahrstrecke verläuft oberirdisch.
Berechnen Sie die Länge der gesamten Fahrstrecke der Linie U1.

LEPROBE

1.6 Runden von Zahlen, Überschlagsrechnung

1.6.1 Runden von Zahlen

1.169 Eine Tafel Schokolade kostet im Supermarkt 1,69 €. Musab hat einen 5-Euro-Schein mit.
Er rechnet: 5 : 1,69 = 2,958... ≈ 3 und nimmt daher drei Tafeln.
Argumentiere, ob Musab bei der Kassa die drei Tafeln bezahlen kann.

Beim **kaufmännischen Runden** von Zahlen auf eine bestimmte dekadische Einheit wird nur die Stelle unmittelbar rechts von dieser Einheit beachtet.
Ist diese Ziffer 0, 1, 2, 3 oder 4 wird abgerundet, bei 5, 6, 7, 8 oder 9 wird aufgerundet.

Tipp

Bevor du eine Zahl rundest, beachte immer den **Kontext der Aufgabenstellung**. Überlege, ob und auf wie viele Stellen gerundet werden soll. Manchmal müssen Zahlen trotz Abrundungsregel aufgerundet werden oder umgekehrt.

Beispiele:
*) Geldbeträge meistens auf 2 Nachkommastellen runden
*) bei der Anzahl an Menschen oder Tieren auf Ganze runden
*) bei Fragestellungen wie „Wie viele Kartons passen in das Auto?“ immer abrunden
*) bei Fragestellungen wie „Wie viele Träger braucht man für ...?“ immer aufrunden

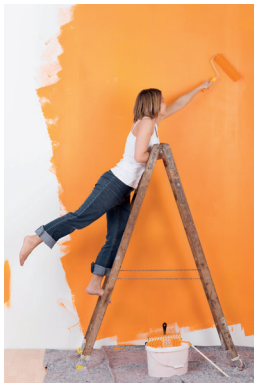
Technologieeinsatz: Runden
Taschenrechner können so eingestellt werden, dass die angezeigte Zahl auf eine fixe Anzahl von Dezimalstellen gerundet ist. Entweder ist die Taste mit **FIX** beschriftet oder die Einstellung ist unter MODE zu finden. Hier kann die gewünschte Anzahl der Nachkommastellen festgelegt werden.
FLOAT (floating point) bedeutet Fließkommamodus.

1.170
a) Runde 17,349 und 33,999 auf Zehntel.
b) Runde 234 167 auf Zehner, Hunderter bzw. Tausender.
c) Runde 67,1875 auf zwei Nachkommastellen.
d) Runde 4,5249 € auf Cent genau.

Lösung:
a) 17,349 ≈ 17,3 und 33,999 ≈ 34,0
b) Zehner: 234 167 ≈ 234 170, Hunderter: 234 167 ≈ 234 200, Tausender: 234 167 ≈ 234 000
c) 67,1875 ≈ 67,19
d) 4,5246 € ≈ 4,52 €

1.171 Runde auf **1)** Zehntel, **2)** Hundertstel, **3)** Tausendstel.
a) 2,34549 **b)** 0,90999 **c)** 1,091104 **d)** 0,0999 **e)** 0,9999

1.172 Ein Kübel Farbe reicht zum Streichen von 15 m^2 Wand.
Argumentiere, wie viele Kübel man für das Streichen von 32 m^2 Wand besorgen soll.
Begründe deine Antwort.



1.173 Hatice hat für einen Klassenausflug mit Hilfe einer Division die Kosten durch die Anzahl der Teilnehmerinnen und Teilnehmer berechnet, dass der Bus pro Person 8,742 € kostet.
Diskutiert in der Klasse, welchen Betrag Hatice pro Kopf einsammeln sollte.

LESEPROBE

1.6.2 Überschlagsrechnung

Im Alltag ist es oft wichtig, das ungefähre Ergebnis einer Rechnung mit geringem Aufwand im Kopf ermitteln zu können. Auch wenn man einen Taschenrechner verwendet, braucht man eine Vorstellung von der Größenordnung des Ergebnisses, damit man Eingabefehler bemerken kann.

Um das Ergebnis einer Rechnung näherungsweise zu ermitteln, verwendet man eine **Überschlagsrechnung**. Dies ist eine vereinfachte Rechnung, mit der man das Ergebnis ungefähr abschätzt.

1.174 Zwei Geschwister kaufen sich gemeinsam ein Fahrrad um 478 € und zwei Fahrradhelme um je 29 €. Berechne mit einer Überschlagsrechnung, wie viel Euro jedes Geschwisterkind bezahlen muss.

Lösung:
Fahrrad: $478\ € \approx 500\ €$, Helm: $29\ € \approx 30\ € \cdot 2 \approx 60\ €$
$500 + 60 = 560 : 2 = 280$ € pro Geschwisterkind

Multiplikation	Division
Beispiel: $3{,}4 \cdot 5{,}6 = 19{,}04$	Beispiel: $18{,}3 : 2{,}5 = 7{,}32$
Obere Schranke (OS): beide Faktoren aufrunden $4 \cdot 6 = 24$	**OS**: Dividend aufrunden, Divisor abrunden $19 : 2 = 9{,}5$
Untere Schranke (US): beide Faktoren abrunden $3 \cdot 5 = 15$	**US**: Dividend abrunden, Divisor aufrunden $18 : 3 = 6$
$\mathbf{15 < 3{,}4 \cdot 5{,}6 < 24}$	$\mathbf{6 < 18{,}3 : 2{,}5 < 9{,}5}$
Fazit: Für die Überschlagsrechnung (ÜR) ist es zielführend, **„gegensinnig“** zu runden: Ein Faktor wird auf- und der andere abgerundet. ÜR: $3 \cdot 6 = 18$ oder $4 \cdot 5 = 20$	**Fazit:** Für die Überschlagsrechnung ist es zielführend, **„gleichsinnig“** zu runden: Entweder werden Dividend und Divisor auf- oder beide abgerundet. ÜR: $18 : 2 = 9$ oder $19 : 3 = 6{,}\dot{3}$

1.175 Berechne überschlagsweise.
a) $48{,}4 \cdot 2{,}59$ **b)** $43\,500 : 85{,}9$

Lösung:
a) $48{,}4 \cdot 2{,}59 \approx 50 \cdot 2 = 100$
b) $43\,500 : 85{,}9 \approx 40\,000 : 80 = 500$

1.176 Berechne überschlagsweise $46 \cdot 1{,}4$ und $46 : 1{,}4$.
Gib je zwei Überschlagsrechnungen an und vergleiche jeweils das Ergebnis mit dem genauen Ergebnis.

1.177 Ein Auto verbraucht auf 100 km rund 5,9 L Dieseltreibstoff. Der Tank fasst 45 L.
Schätze mithilfe einer Überschlagsrechnung ab, ob ein voller Tank für eine Fahrt von Wien nach Venedig (ungefähr 630 km) reicht.

1.178 Führe für die beiden Rechnungen eine Überschlagsrechnung durch und ordne ihnen den passenden Überschlagswert zu.

1	$470 \cdot 38{,}9$	
2	$5\,820 : 3{,}1$	

A	200
B	2 000
C	20 000
D	200 000

LESEPROBE

ZUSAMMENFASSUNG

Zahlenmengen

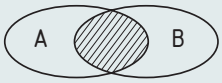
Symbole für die Beschreibung von Zahlenmengen

| ... für die gilt	$\wedge$ ... und (sowohl als auch)	$\vee$ ... oder	\ ... ohne
= ... ist gleich	$\neq$ ... ist nicht gleich	$\Rightarrow$ ... daraus folgt	
$<$ ... kleiner	$\leqslant$ ... kleiner oder gleich	$>$ ... größer	$\geqslant$ ... größer oder gleich
$\in$ ... ist Element von	$\notin$ ... ist nicht Element von		

Zwei Mengen A und B sind gleich (A = B), wenn jedes Element von A auch Element von B ist und umgekehrt.
A ist Teilmenge von B ($A \subseteq B$), wenn jedes Element von A auch Element von B ist.
A ist echte Teilmenge von B ($A \subset B$), wenn $A \subseteq B$ und $A \neq B$.

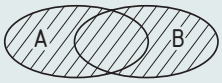
Mengenverknüpfungen

Die **Durchschnittsmenge A $\cap$ B** enthält alle Elemente, die in der Menge A UND in der Menge B enthalten sind.
$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$



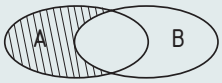
$A \cap B$

Die **Vereinigungsmenge A $\cup$ B** enthält alle Elemente, die in der Menge A ODER in der Menge B enthalten sind. ODER ist im mathematischen Sinn (nicht ausschließend) zu verstehen.
$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$



$A \cup B$

Die **Differenzmenge A \ B** enthält alle Elemente, die in A, aber nicht in B vorkommen.
$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$



$A \setminus B$

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ ... **Menge der natürlichen Zahlen**
$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, ...\}$ ... Menge der natürlichen Zahlen ohne Null
$\mathbb{N}_g = \{0, 2, 4, 6, ...\}$ ... Menge der geraden natürlichen Zahlen
$\mathbb{N}_u = \{1, 3, 5, 7, ...\}$ ... Menge der ungeraden natürlichen Zahlen

Eine natürliche Zahl größer 1, die nur durch 1 und sich selbst teilbar ist, heißt **Primzahl**.
$\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ...\}$ ... Menge der Primzahlen

$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, ...\}$ ... Menge der **ganzen Zahlen**

Betrag (Absolutbetrag) einer Zahl: $|a| = a$, wenn $a \geqslant 0$
$|a| = -a$, wenn $a < 0$

$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{N}^*\right\}$ ... Menge der **rationalen Zahlen**

Jede rationale Zahl in **Bruchdarstellung** kann als **endliche oder periodische Dezimalzahl** angegeben werden.
Das **Verhältnis** a : b zweier Zahlen (oder Größen) a und b ist der Quotient $\frac{a}{b}$.

Eine Zahl, die nicht als Verhältnis ganzer Zahlen ausdrückbar ist, heißt **irrationale Zahl** (zB $\sqrt{2}$, π). Die Menge der rationalen Zahlen und die Menge der irrationalen Zahlen bilden zusammen die **Menge der reellen Zahlen** $\mathbb{R}$. Es gilt: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ und $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$.

LESEPROBE

Rechenoperationen

Addition: Summand + Summand = Summe
$a + b = b + a$ (Kommutativgesetz)
$a + (b + c) = (a + b) + c$ (Assoziativgesetz)

Subtraktion: Minuend – Subtrahend = Differenz
Es gilt: $a - (b + c) = a - b - c$

Multiplikation: Faktor · Faktor = Produkt
$a \cdot b = b \cdot a$ (Kommutativgesetz)
$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (Assoziativgesetz)

Division: Dividend : Divisor = Quotient

Vorzeichenregeln

$(+a) \cdot (+b) = +a \cdot b$	$(-a) \cdot (+b) = -a \cdot b$	$(+a) : (+b) = +a : b$	$(-a) : (+b) = -a : b$
$(+a) \cdot (-b) = -a \cdot b$	$(-a) \cdot (-b) = +a \cdot b$	$(+a) : (-b) = -a : b$	$(-a) : (-b) = +a : b$

Rechnen mit Brüchen
Brüche kann man kürzen und erweitern.
Vor dem Addieren und Subtrahieren müssen Brüche auf den gleichen Nenner gebracht werden, dann werden die Zähler addiert bzw. subtrahiert, der Nenner bleibt unverändert.
Beim Multiplizieren werden die Zähler und die Nenner jeweils miteinander multipliziert. Bei der Division durch einen Bruch wird mit seinem Kehrwert multipliziert.

Intervalle

Eine Teilmenge der reellen Zahlen, die sich als zusammenhängender Bereich auf der Zahlengeraden darstellen lässt, nennt man ein **Intervall**.

Intervall- und Mengenschreibweise	Darstellung auf der Zahlengeraden	Intervall- und Mengenschreibweise	Darstellung auf der Zahlengeraden
abgeschlossenes Intervall: $[a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$		**offenes Intervall:** $]a; b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	
links offenes Intervall (halboffen): $]a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$		**rechts offenes Intervall (halboffen):** $[a; b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	

Prozent und Promille

Relativer und absoluter Anteil

Bezeichnet G eine Gesamtzahl (Grundwert) und A einen Teil davon, dann nennt man **A** den **absoluten Anteil**. Setzt man den Anteil A ins Verhältnis zum Grundwert G, so nennt man den Bruch $\frac{A}{G}$ den **relativen Anteil**.

Prozente

Ein **Prozent** ist ein Hundertstel. Es gilt daher: $1\ \% = \frac{1}{100} = 0{,}01$

p % eines **Grundwertes G** werden als **Anteil A (Prozentanteil, Prozentwert)** bezeichnet. **p** wird als **Prozentsatz** bezeichnet. $p\ \% = \frac{p}{100}$

Es gilt: $\frac{A}{G} = \frac{p}{100}$ bzw. $A = \frac{G \cdot p}{100}$ bzw. $p = \frac{A \cdot 100}{G}$ bzw. $G = \frac{A \cdot 100}{p}$

Änderungsfaktor bei Erhöhung um p %: $1 + \frac{p}{100}$, bei Verringerung um p %: $1 - \frac{p}{100}$

Promille

Ein **Promille** ist ein Tausendstel. Es gilt daher: $1\ ‰ = \frac{1}{1000} = 0{,}001$

p ‰ eines **Grundwertes G** werden als **Anteil A (Promilleanteil, Promillewert)** bezeichnet. **p** wird in diesem Fall als **Promillesatz** bezeichnet.

Es gilt: $A = \frac{G \cdot p}{1000}$

LESEPROBE

Weitere Aufgaben

Natürliche Zahlen und ganze Zahlen

Aufgaben 1.179 – 1.181: Berechne jeweils das Ergebnis.

1.179 **a)** $3^2 \cdot [(-3) \cdot (-5) - (-2) \cdot (-7)]^2$ **b)** $\{(-1) \cdot [3^3 - 5 \cdot (-2)^2] + 9\}^3$

1.180 **a)** $(11^2 - 2^2 \cdot 5 - 3^2 + 2^3) : [18 \cdot (-2) - (-8)^2]$ **b)** $\{5^2 + [13 + (-4) \cdot 2]^2\} : [2 \cdot (-6) + 2]$

1.181 **a)** $25 - (5 - |-3|) - |-7 + 3|$ **b)** $25 - 5 - |-3| - |-7| + 3$

1.182 Kennzeichne die Elemente der Menge auf einem geeigneten Ausschnitt der Zahlengeraden.
a) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 5\}$ **b)** $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| > 2\}$ **c)** $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 8\}$

1.183 Kreuze an.

... ist Teiler von ...	108	270	436	483	1 825	2 310	2 520	3 600
2								
3								
4								
5								
6								
8								
9								
10								
25								

1.184 Bestimme das kleinste gemeinsame Vielfache und den größten gemeinsamen Teiler.
a) 48, 54 **b)** 270, 108 **c)** 210, 315 **d)** 432, 720

1.185 In einer Fabrik sollen 92 kg Haselnüsse, 138 kg Walnüsse und 230 kg Kokosflocken getrennt in möglichst wenige Säcke abgepackt werden. Jeder Sack muss gleich schwer sein.
a) Berechne mithilfe der Primfaktorenzerlegung, wie schwer ein Sack ist.
b) Berechne, wie viele Säcke pro Sorte abgepackt werden.

1.186 Wenn man eine Primzahl „verkehrt" liest und so wieder eine andere Primzahl erhält, nennt man sie Mirp-Zahl, zum Beispiel ist 149 eine Mirp-Zahl, weil auch 941 eine Primzahl ist. Ermittle die Mirp-Zahlen, die kleiner als 100 sind.

1.187 $kgV(a, b) \cdot ggT(a, b) = a \cdot b$ mit $a \in \mathbb{N}$ und $b \in \mathbb{N}$
a) Prüfe die Behauptung mit $a = 24$, $b = 36$ und $a = 315$, $b = 420$ nach.
b) Erkläre, warum die Behauptung allgemein gilt.

1.188 Gegeben sind die Mengen $A = \{2, 5, 8, 11\}$ und $B = \{4, 8, 11, 12\}$.
Bilde die Vereinigungsmenge, die Durchschnittsmenge sowie die Differenzmengen.

1.189 Gegeben sind die Mengen $A = \{n \in \mathbb{N}_u \mid n \leq 13\}$, $B = \{n \in \mathbb{N}_g \mid n < 12\}$, $C = \{n \in \mathbb{P} \mid n < 30\}$.
a) Stelle die Mengen A, B und C in einem Mengendiagramm dar.
b) Gib die Mengen $A \cap C$, $B \cup C$ und $A \setminus C$ im aufzählenden Verfahren an.

1.190 Kreuze die richtige Aussage über Mengen an. *[1 aus 5]*

$\{1, 2, 3, 5, 7\} \neq \{7, 1, 3, 2, 5\}$	☐
Die Besucheranzahl im Rapid-Stadion ist eine unendliche Menge.	☐
$\{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} = \{x \in \mathbb{N} \mid -3 < x < 8\}$	☐
„Alle positiven Zahlen größer 1 und kleiner 5" $= \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leq x \leq 4\}$	☐
$\{1, 2, 3, 5, 7, 11, 13\} = \{x \mid x \text{ ist Primzahl} \wedge x < 15\}$	☐

LEHRPROBE

Rationale und reelle Zahlen

1.191 Gib in Dezimalschreibweise an.

a) $\frac{1}{2}$ **b)** $\frac{1}{4}$ **c)** $\frac{3}{4}$ **d)** $\frac{3}{8}$ **e)** $\frac{2}{5}$ **f)** $\frac{1}{25}$

1.192 Schreibe als gekürzten Bruch an.

a) 0,8 **b)** 0,05 **c)** 0,15 **d)** 0,015 **e)** 0,275 **f)** 0,004

1.193 Kürze so weit wie möglich und berechne das Ergebnis.

a) $\frac{24}{7} \cdot 21$ **b)** $16 : \frac{8}{9}$ **c)** $\frac{12}{25} \cdot \frac{15}{16}$ **d)** $\frac{5}{11} : 10$ **e)** $\frac{6}{5} \cdot \frac{10}{21}$

1.194 Berechne und gib das Ergebnis als vollständig gekürzten Bruch an.

a) $\left(1\frac{3}{4} + \frac{5}{6}\right) : \left(2\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right) =$

b) $3\frac{1}{2} - \left[\frac{2}{3} \cdot \left(1\frac{1}{4} + \frac{5}{8}\right)\right] =$

c) $\frac{30}{7} : \frac{9}{14} - \left[\left(\frac{5}{2} + \frac{10}{3}\right) \cdot \frac{1}{7}\right] : 5 =$

d) $\frac{2}{5} : \frac{15}{5} + \left|\frac{7}{30} - \frac{9}{15}\right| =$

e) $\left[\left(\frac{4}{3}\right)^2 : \left(\frac{2}{3} + \frac{26}{9}\right)\right] \cdot \frac{2}{5} =$

f) $\left(\frac{5}{8} + \left|-\frac{1}{4}\right|\right) : \left(3 \cdot \frac{1}{5} - \frac{3}{12} \cdot \frac{4}{9}\right) =$

1.195 Setze das Zeichen $<$, $>$ oder $=$ so ein, dass eine richtige Aussage entsteht.

a) $-0{,}52 \square -0523$ **c)** $-3{,}8 \square -\frac{17}{5}$ **e)** $0{,}25 \square \frac{1}{4}$ **g)** $-2{,}6 \square -2\frac{3}{5}$ **i)** $0{,}6 \square \frac{4}{5}$

b) $\frac{3}{2} \square \frac{5}{3}$ **d)** $-\frac{1}{6} \square -\frac{1}{10}$ **f)** $0{,}\dot{6} \square \frac{2}{3}$ **h)** $1\,040 \square -1\,040$ **j)** $-0{,}\dot{5} \square -\frac{5}{9}$

1.196 Sortiere die gegebenen Zahlen der Größe nach. Beginne mit der kleinsten Zahl.

a) $\frac{3}{4}$; 0,6; $\frac{2}{5}$; −0,7; −0,54

b) −2,3; $\frac{7}{3}$; $\frac{2}{5}$; −1,7; $\frac{3}{10}$; 0,33; −2,03

1.197 Kennzeichne das angegebene Intervall auf der Zahlengeraden und gib es in Mengenschreibweise an.

a) [2,5; 7] **b)**]−2; 5] **c)** [−3; 4[**d)**]−5; −1[

1.198 In einem magischen Quadrat ist die Summe jeder Zeile, jeder Spalte und jeder Diagonale jeweils gleich. Ergänze die fehlenden Zahlen.

a)

$\frac{3}{4}$		$\frac{7}{12}$
	$\frac{1}{2}$	
		$\frac{1}{4}$

b)

$\frac{17}{12}$		
1		
$\frac{13}{12}$		$\frac{11}{12}$

c)

$\frac{13}{15}$		
$\frac{9}{20}$	$\frac{37}{60}$	$\frac{47}{60}$

1.199 Tom behauptet: „$\sqrt{35}$ ist eine irrationale Zahl, denn die Quadratwurzel aus einer natürlichen Zahl ist immer eine irrationale Zahl."
Erkläre, warum Toms Begründung falsch ist. Formuliere anschließend eine ähnliche, aber korrekte Aussage über Quadratwurzeln und irrationale Zahlen.

1.200 Kreuze alle positiven, rationalen Zahlen an.

a)

$\sqrt{5}$	☐
$\frac{\pi}{4}$	☐
$\sqrt{0{,}0625}$	☐
$\frac{\sqrt{9}}{2}$	☐
$\sqrt{\frac{2}{3}}$	☐

b)

$\sqrt{49}$	☐
$\frac{1}{2}$	☐
0,596124789	☐
$-\frac{7}{13}$	☐
$1{,}\dot{7}$	☐

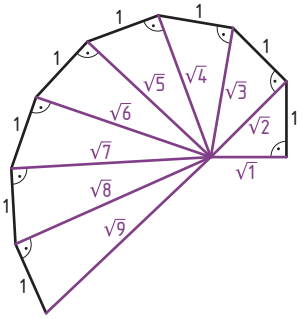
LESEPROBE

1.201 Trage ein: $\in$ bzw. $\notin$

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{I}$	$\mathbb{R}$
-5					
$\sqrt{25}$					
0,37					
π					
$\frac{4}{2}$					
1 263,46					

1.202 Erstelle eine Mindmap über alle dir bekannten Zahlenmengen. Verwende die korrekten Bezeichnungen und Definitionen der Zahlenmengen und führe möglichst aussagekräftige Beispiele und Gegenbeispiele von Zahlen für die jeweiligen Zahlenmengen an.

1.203 Die Abbildung rechts zeigt die Spirale des **Theodoros von Kyrene** (griechischer Mathematiker, 5. Jahrhundert v. Chr.), auch **Wurzelspirale** bzw. **Wurzelschnecke** genannt.



a) Erkläre, welche Formel Theodoros anwendete.
b) Führe die rechts dargestellte Konstruktion so lange fort, bis es zur erstmaligen Überschneidung der Spirale kommt.
c) Gib die größte Zahl an, deren Wurzel man ohne Überschneidung der Spirale darstellen kann.

Prozent und Promille

1.204 Die Herstellungskosten für ein Kilogramm Matchapulver betragen 830 €. Der Hersteller verkauft das Produkt an einen Großhändler und schlägt auf seine Herstellungskosten einen Gewinnaufschlag von 18 % auf. Der Großhändler wiederum verkauft das Matchapulver anschließend an einen Supermarkt weiter. Dabei berechnet er eine Handelsspanne (Preisaufschlag) von 12 % auf seinen Einkaufspreis. Der Supermarkt verkauft das Matchapulver schließlich an die Konsumentinnen und Konsumenten und kalkuliert eine Einzelhandelsmarge (Preisaufschlag) von 25 %.



a) Berechne den Verkaufspreis des Pulvers pro Kilogramm, den
1) der Hersteller vom Großhändler verlangt.
2) der Großhändler vom Supermarkt verlangt.
b) Berechne den Verkaufspreis einer 30-mg-Dose im Supermarkt, wenn neben der Einzelhandelsmarge auch noch die Mehrwertsteuer in Höhe von 10 % berücksichtigt werden muss.
c) Berechne, um wie viel Prozent der Preis des Pulvers vom Hersteller bis zum Verkaufspreis für Konsumentinnen und Konsumenten gestiegen ist (inklusive Mehrwertsteuer).

1.205 Führe in deiner Klasse oder deinem Jahrgang eine Befragung zu einem selbst gewählten Merkmal durch (zB Tragen einer Brille, regelmäßige sportliche Aktivität).
a) Ermittle den absoluten und relativen Anteil der Schülerinnen und Schüler, die das untersuchte Merkmal erfüllen.
b) Formuliere damit anschließend Beschreibungen eurer Schulgemeinschaft, zB „Ein Viertel der Schülerinnen und Schüler unserer Klasse tragen eine Brille, das sind insgesamt sechs Personen."

PROBE

1.206 Achmed hat sich am Samstag ein neues Rennrad gekauft. Der Preis des Rennrades wurde um 7 % auf 1 627,50 Euro herabgesetzt.
Hätte Achmed sofort bar bezahlt, hätte er zusätzlich einen Skonto von 3 % erhalten.
a) Berechne den ursprünglichen Preis des Rennrades.
b) Berechne den Preis bei Barzahlung.
c) Berechne, wie viel Euro sich Achmed erspart hätte, wenn er am Samstag bar bezahlt hätte.

1.207 Herr Bauer braucht eine neue Waschmaschine. Beim Elektrofachhandel entdeckt er ein Modell, das 499 € kostet.
a) Bestimme den Nettopreis dieser Waschmaschine bei 20 % Umsatzsteuer.
Herr Bauer erhält 12 % Stammkundenrabatt und weil er sofort bezahlt, bekommt er noch 3 % Skonto.
b) Bestimme, wie viel Herr Bauer für die Waschmaschine bezahlen muss.

1.208 Julia möchte sich einen neuen Laptop kaufen. Der Preis für diesen Laptop ist 2 115 Euro. Beim Elektrofachhandel in ihrem Wohnort ist dieser im gesamten November um 15 % verbilligt. Am sogenannten „Black Friday“ gibt es nochmals auf den reduzierten Preis 10 % Nachlass.
Berechne, wie viel der Laptop am Black Friday für Julia kostet.

1.209 Der österreichische Gesundheitsbericht gibt einen Überblick über den Gesundheitszustand der Bevölkerung in Österreich und dient als Grundlage für gesundheitspolitische Entscheidungen.
a) Berechne jeweils die Anzahl der Personen, welche die folgende Eigenschaft erfüllen:
47 % der in Österreich lebenden Personen konsumieren täglich Gemüse.
21 % der in Österreich lebenden Personen erfüllen die Bewegungsempfehlungen.
9 % der Männer und 7 % der Frauen konsumieren täglich oder fast täglich Alkohol.
b) Tauscht euch in Gruppen darüber aus, ob euch die genannten Zahlen überraschen. Begründet eure Meinungen und entwickelt gemeinsam Vorschläge, wie Menschen zu einem gesünderen Lebensstil motiviert und dabei unterstützt werden könnten.
(nach *Österreichischer Gesundheitsbericht 2022*. BMSGPK, 2022)

1.210 Der Preis für eine Packung Druckerpapier beträgt 6,89 €. Anjessa verhandelt gut und erhält bei einem Kauf von 100 Packungen dieses Papiers einen Preisnachlass von 34,45 €.
a) Berechne, wie viel Prozent vom Gesamtpreis sich Anjessa erspart.
In einem anderen Shop ist Druckerpapier gerade im Angebot. Man spart 15 % und bezahlt daher pro Packung nur noch 6,49 €.
b) Erkläre, was mit dem Ausdruck 6,49 : 0,85 berechnet werden kann.

1.211 Für die Produktion von Lebensmitteln wird viel Wasser benötigt.

Lebensmittel	Wasserverbrauch
1 kg Brot	1 600 Liter
1 kg Rindfleisch	15 000 Liter
1 kg Äpfel	700 Liter

a) Ein Supermarkt wirft 12 kg Brot weg. Berechne, wie viele Liter Wasser dafür ursprünglich benötigt wurden. Ermittle, wie vielen vollen Badewannen dies entspricht, um einen Eindruck von der Wassermenge zu bekommen.
b) Vergleiche den Wasserverbrauch von 3 kg Rindfleisch und 20 kg Äpfeln.

1.212 Familie Noudo macht mit ihrem Elektroauto eine Reise von 2 500 km.
Vervollständige den Lückentext über die Reise der Familie.
Am ersten Tag kann Familie Noudo 500 Kilometer zurücklegen. Das entspricht ☐ % der gesamten Reisestrecke. Am zweiten Tag schafft sie 15 % der Gesamtstrecke, nämlich ☐ Kilometer. Nach diesen beiden Tagen liegen noch $\frac{\square}{2\,500}$, das sind ☐ % der Reisestrecke, vor der Familie.



LEERPROBE

1.213 Leon möchte sich eine neue Laptop-Tasche kaufen. Im Online-Shop stehen zwei Modelle zur Auswahl:
- Modell A: 50 €
- Modell B: 56 €

a) Berechne, um wie viel Prozent Modell B teurer ist als Modell A.
b) Berechne, um wie viel Prozent Modell A günstiger ist als Modell B.

1.214 Ein neues Tablet soll um 675 € verkauft werden.
In einer Weihnachtsaktion wird der Preis um 18 % gesenkt und nach dieser Aktion wieder um 18 % erhöht.
a) Berechne den Preis, der nach der Reduktion für das Tablet zu zahlen ist.
b) Argumentiere mithilfe einer Rechnung, dass nach einer Erhöhung des reduzierten Preises um 18 % nicht der ursprüngliche Preis von 675 € verlangt wird.
c) Berechne den Unterschied zwischen dem Originalpreis 675 € und dem Preis, der sich nach der Reduktion und der Erhöhung um jeweils 18 % ergibt.

1.215 Ein Supermarkt verkauft Produkte kurz vor Ablauf des Mindesthaltbarkeitsdatums günstiger, um Lebensmittelverschwendung zu vermeiden.



Produkt	Normalpreis	Rabatt
Joghurt	0,90 €	30 %
Brot	3,20 €	25 %
Salat	1,80 €	50 %

a) Berechne den neuen Preis jedes Produkts nach dem Rabatt.
b) Ermittle, wie viel Geld ein Kunde spart, wenn er drei Joghurts, ein Brot und zwei Salate kauft.
c) Vergleiche, bei welchem Produkt der absolute Preisnachlass in Euro am größten ist.
d) Recherchiere den Unterschied zwischen Mindesthaltbarkeits- und Verbrauchsdatum.

1.216 In einer Autohandlung wird der Preis eines PKWs zunächst um 10 % erhöht und in einer Aktionswoche wieder um 10 % gesenkt.
a) Argumentiere, ob nach der Erhöhung und der anschließenden Reduktion der Preis des PKW dem Ausgangspreis entspricht.
b) Zeige mithilfe einer Rechnung und einem ursprünglichen PKW-Preis von 12.000 €, dass es egal ist, ob der Preis zuerst erhöht und dann gesenkt wird oder umgekehrt.

Runden von Zahlen, Überschlagsrechnung

1.217 Runde auf ganze Zahlen.
a) 159,58 **b)** 256,91 **c)** 78 956,41 **d)** 7,499

1.218 Runde auf 3 Dezimalstellen.
a) 67,11539 **b)** 5,674233 **c)** 125,554493 **d)** 0,004079889

1.219 Setze das Komma mithilfe einer Überschlagsrechnung.
a) 239 · 47 = 0 0 1 1 2 3 3 0 0 0
b) 930 430 : 48 970 = 0 0 1 9 0 0
c) 0,00547 · 58 520 = 0 0 3 2 0 1 0 4 4 0 0
d) 0,96555 : 0,00785 = 0 0 1 2 3 0 0

1.220 Berechne überschlagsweise.
a) 2 980 · 0,047
b) 0,0036 · 489
c) 539 · 677
d) 639 : 0,018
e) 8 125 : 0,84
f) 96 002 : 328

1.221 Bestimme zunächst eine obere und untere Schranke für das Ergebnis. Führe anschließend die Überschlagsrechnung durch „gegensinniges“ bzw. „gleichsinniges“ Runden durch.
a) 62,4 · 19,7 **b)** 845,3 : 21,6 **c)** 48,7 · 23,4 **d)** 735,6 : 24,8

LESEPROBE

1.222 Ermittle die Ergebnisse überschlagsweise.

a) $\frac{208{,}7 \cdot 0{,}465}{83{,}45}$ **b)** $\frac{15\,600 \cdot 0{,}0843}{72{,}5}$ **c)** $\frac{7{,}853}{4{,}51 \cdot 407{,}2}$ **d)** $\frac{1\,206}{4{,}96 \cdot 15{,}32}$

1.223 Lukas hat mit dem Taschenrechner gerechnet: $\frac{32{,}5 \cdot 19{,}3}{44{,}201 - 44{,}103} = -29{,}9$

a) Zeige mithilfe einer Überschlagsrechnung, dass das Ergebnis nicht stimmen kann.

b) Beschreibe mit eigenen Worten, welchen Fehler Lukas gemacht hat.

1.224 Jennifer sollte $\frac{4{,}8}{0{,}1005 - 0{,}1004}$ überschlagsweise berechnen. Nach dem Runden wollte sie es sich leicht machen und hat den Taschenrechner benutzt, der jedoch ERROR anzeigt.
Welchen Fehler hat Jennifer wahrscheinlich gemacht? Erkläre das Problem und rechne korrekt.

1.225 Pauls Mutter möchte ihren 50. Geburtstag mit ihrer Familie in einem Gasthaus feiern. Sie lädt 13 Familienmitglieder ein und geht davon aus, dass alle kommen.
Schätze mit einer Überschlagsrechnung, wie viel Bargeld Pauls Mutter mitnehmen muss, um die Rechnung sicher begleichen zu können.

Aufgaben in englischer Sprache



loyalty program	Treueprogramm	annual	jährlich
membership fee	Mitgliedsbeitrag	discount	Rabatt
purchase	Kauf	short ton	Amerikanische Tonne
calculate	berechnen	pound (lbs)	Pfund
billion	Milliarde	revenue	Umsatz

1.226 Sarah is moving to a new house and needs to transport some furniture. She has a small truck that can carry up to two short tons of weight.
The weight of the furniture she plans to move is as follows:

- Sofa: 250 pounds
- Bed: 150 pounds
- Table: 100 pounds
- 28 boxes: each box weighs 45 pounds (1 short ton = 2,000 pounds).

Determine whether Sarah can move all the furniture in one trip.



1.227 Emma is planning to buy a new smartphone that costs € 800. The store offers a 20 % discount on all items for members of their loyalty program, but the membership costs € 50 per year. Emma is unsure whether joining the loyalty program is worth it, as she doesn't plan to make additional purchases this year.

a) Calculate how much Emma saves by joining the loyalty program and buying the phone.

b) Argue whether it is worth it for Emma to join the loyalty program, considering the annual membership fee.

1.228 A technology company earns 3.5 billion US dollars in one year. The company spends 20 % of its revenue on research and development.

a) Write 3.5 billions as a number using digits.

b) Express 3.5 billion in scientific notation.

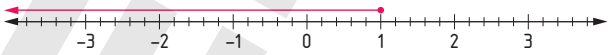
c) Calculate how much money the company spends on research and development.

LESEPROBE

Matura-Check

Du kannst …

- ☐ mit natürlichen, ganzen, rationalen und reellen Zahlen rechnen, ihre Zusammenhänge interpretieren und damit argumentieren und sie auf der Zahlengeraden veranschaulichen.
- ☐ Ergebnisse beim Rechnen mit Zahlen abschätzen (überschlagsrechnen) und in kontextbezogener Genauigkeit angeben (kaufmännisch runden).
- ☐ Zahlenangaben in Prozent und Promille im Kontext verstehen und anwenden.
- ☐ den Betrag einer Zahl verstehen und anwenden.

		gelöst
1	Kreuzen Sie die beiden nicht zutreffenden Mengenbeziehungen an. *[2 aus 5]* ☐ $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$ ☐ $\mathbb{N}_u \subset \mathbb{N}^*$ ☐ $\mathbb{P} \subset \mathbb{N}_u$ ☐ $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ ☐ $\mathbb{R} \subset \mathbb{Q}$	
2	Ein Wassertank enthält 320 Liter Wasser. Für die Bewässerung eines Gartens werden 48 Liter Wasser entnommen. Berechnen Sie, um wie viel Prozent sich die Wassermenge im Tank durch die Entnahme verringert. Die Wassermenge im Tank verringert sich durch die Entnahme um ☐ %.	
3	Gegeben sei folgender Wertebereich:  **a)** Ergänzen Sie die beschreibende Darstellung: $M = \{x \in \mathbb{R} \mid$ ☐ x ☐ $\}$ **b)** Geben Sie den Wertebereich als Intervallschreibweise an. ☐	
4	Kreuzen Sie in der Tabelle jeweils die kleinste Zahlenmenge an, der die gegebene Zahl angehört. *[1 aus 5]* **a)** 1 ☐ $\mathbb{N}$ ☐ $\mathbb{P}$ ☐ $\mathbb{Q}$ ☐ $\mathbb{R}$ ☐ $\mathbb{Z}$ **b)** −1 ☐ $\mathbb{N}$ ☐ $\mathbb{P}$ ☐ $\mathbb{Q}$ ☐ $\mathbb{R}$ ☐ $\mathbb{Z}$ **c)** 2,4 ☐ $\mathbb{N}$ ☐ $\mathbb{R}$ ☐ $\mathbb{Q}$ ☐ $\mathbb{I}$ ☐ $\mathbb{Z}$	
5	Ein Mensch atmet durchschnittlich 15-mal pro Minute ein und aus. Berechnen Sie, wie viele Atemzüge der 15 Jahre alte Andreas seit seiner Geburt insgesamt gemacht hat. Rechnen Sie mit 365 Tagen/Jahr. Andreas hat seit seiner Geburt ☐ Millionen Atemzüge gemacht.	

LESEPROBE

gelöst

6 Himbeersirup soll im Verhältnis 1 : 7 mit Wasser gemischt werden, um trinkfertigen Saft zu erhalten.
Kreuzen Sie die beiden auf dieses Mischverhältnis zutreffenden Aussagen an. *[2 aus 5]*

Für ein Glas, das 400 ml fasst, müssen für 50 ml Sirup 350 ml Wasser hinzufügt werden.	☐
Es müssen 7-mal so viel Sirup wie Wasser für trinkfertigen Saft verwendet werden.	☐
Zu $\frac{1}{7}$ l Sirup müssen $\frac{6}{7}$ l Wasser hinzugefügt werden, um trinkfertigen Saft zuerhalten.	☐
Der trinkfertige Saft besteht zu $\frac{1}{7}$ aus Sirup.	☐
Mit 1,5 l Sirup können insgesamt 12 Liter Saft hergestellt werden.	☐

7 Ein Kapital von 25 000 € wächst zwei Jahre lang um jeweils 8 %. Anschließend sinkt es um 10 %.
Kreuzen Sie die beiden richtigen Aussage an. *[2 aus 5]*

Das Kapital ist insgesamt um rund 8 % gestiegen.	☐
Das Kapital ist insgesamt um rund 5 % gestiegen.	☐
Das Kapital ist insgesamt um 2 % gefallen.	☐
Das Kapital ist insgesamt um 1 244 € gestiegen.	☐
Das Kapital ist insgesamt um 1 599 € gestiegen.	☐

8 Ordnen Sie den zwei Eigenschaften von Zahlen jeweils die Zahl mit dieser Eigenschaft aus A bis D zu.

1	negative irrationale Zahl	☐
2	positive ganze Zahl	☐

A	$3-\sqrt{17}$
B	$\frac{1}{10}$
C	$(-\sqrt{5})^2$
D	$-\sqrt{(-9)^2}$

9 Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine mathematisch korrekte Aussage entsteht.

Der Menge ❶, entspricht die Intervalldarstellung ❷.

❶	
$\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 2\}$	☐
$\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 2\}$	☐
$\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x > 2\}$	☐

❷	
$[-1; 2]$	☐
$]-1; 2]$	☐
$]-1; 2[$	☐

10 In einer Zeitung ist zu lesen: „Jede vierte Person leidet an Bluthochdruck."

a) Geben Sie den Anteil an Erkrankten in Prozentdarstellung an.

b) Berechnen Sie, wie viele Menschen dieser Statistik nach in Österreich unter Bluthochdruck leiden, wenn man von einer Einwohnerzahl von 9,2 Millionen Menschen ausgeht.

VERSION

gelöst

11 In einem Altersheim gibt es 940 Personen, davon sind 60 % Männer. Von den Männern sind 25 % älter als 80 Jahre.
Berechnen Sie die Anzahl der Männer über 80 Jahre in diesem Altersheim.

12 Der durchschnittliche Salzgehalt von Meerwasser beträgt etwa 35 ‰. Eine Meerwasserprobe hat eine Masse von 2 400 g.
Berechnen Sie, wie viel Gramm Salz in dieser Meerwasserprobe enthalten sind.

13 Kreuzen Sie die zutreffende Aussage über Zahlen und Zahlenmengen an. *[1 aus 5]*

Es gibt eine kleinste rationale Zahl.	☐
Es gibt eine größte reelle Zahl.	☐
Das Produkt zweier negativer Zahlen ist eine positive Zahl.	☐
Wurzeln aus natürlichen Zahlen sind immer irrationale Zahlen.	☐
Man kann jede reelle Zahl auch als Bruch darstellen.	☐

14 Ein Citybus fährt immer nach 50 Minuten wieder vom Bahnhofsplatz St. Pölten weg. Ein zweiter Autobus bedient eine Kurzstrecke und fährt alle 105 Minuten weg. Ein dritter Autobus fährt alle 25 Minuten weg. Alle drei Busse fahren um 04:30 zum ersten Mal.
Berechnen Sie, um welche Uhrzeit und nach wie vielen Minuten sich die Busse das nächste Mal am Bahnhofsplatz treffen.

Antwort: Die Busse treffen nach ☐ Minuten wieder gleichzeitig am Bahnhof ein, also um ☐ Uhr.

15 Ein Gebrauchtwagenhändler untersucht die Verkaufszahlen seiner Automarken. Dabei werden sowohl prozentuelle als auch promillemäßige Anteile betrachtet.
Im vergangenen Jahr wurden insgesamt 713 Autos verkauft.
Der Verkauf teilt sich wie folgt auf:

Marke	Anteil am Verkauf
Audi	35 %
Cupra	125 ‰
Skoda	25 %
andere Marken	restliche Verkäufe

a) Berechnen Sie die Anzahl der verkauften Autos der Marke „Cupra“.

b) Kreuzen Sie die richtigen Berechnungen für den Anteil in Prozent für die restlichen Verkäufe an. *[2 aus 5]*

$1 - \frac{35}{100} - \frac{125}{1\,000} - 0{,}25$	☐
$1 - 0{,}35 - 0{,}0125 - 0{,}25$	☐
$100 - \frac{35}{100} - \frac{125}{1\,000} - \frac{25}{100}$	☐
$100 - 0{,}35 - 0{,}125 - 0{,}25$	☐
$100 - 35 - \frac{125}{10} - 25$	☐

Lösungen:
1) Antwort 3 und 5 2) 15 % 3) a) $-\infty < x \leq 1$, b) $]-\infty; 1]$ 4) a) Antwort 1, b) Antwort 5, c) Antwort 3 5) 118,26
6) Antwort 1 und 5 7) Antwort 2 und 4 8) 14, 2C 9) ❶ → Antwort 2, ❷ → Antwort 3 10) a) 25 %, b) 2,3 Millionen
11) 141 Männer 12) 84 g 13) Antwort 3 14) 1 050 Minuten, 22:00 Uhr 15) a) 89 Cupra, b) Antwort 1 und 5

LEERPROBE