Änderungsmaße (AN 1)

AN 1.1 Absolute und relative (prozentuelle) Änderungsmaße unterscheiden und angemessen verwenden können

Einerseits geht es bei dieser Grundkompetenz um das Ermitteln von Änderungsmaßen (als Zahlenwerte), andererseits ist die Interpretation gegebener Terme (mit und ohne Zahlenwerte) gefragt.

Differenzenquotient und Differenzialquotient spielen bei dieser Grundkompetenz eine untergeordnete Rolle.

Genaueres zu diesen Änderungsmaßen unter **AN 1.2** und **AN 1.3.**

<u>**Änderungsmaße**</u> (für f in $[a; b]$):

absolute Änderung:	$f(b) - f(a)$
relative Änderung:	$\frac{f(b) - f(a)}{f(a)}$
Änderungsfaktor:	$\frac{f(b)}{f(a)}$
Differenzenquotient/mittlere Änderungsrate:	$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$
Differentialquotient/lokale bzw. momentane Änderungsrate:	$\lim\limits_{b \to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(a)$

Hinweis: **prozentuelle Änderung** = relative Änderung mal 100

Beispiel:

$f(3) = 20$, $f(7) = 23$

absolute Änderung	relative Änderung	Änderungsfaktor
$f(7) - f(3) = 23 - 20 = 3$ Änderung um 3 (Einheiten) Einheit wie $f(x)$!	$\frac{f(7) - f(3)}{f(3)} = \frac{23 - 20}{20} = \frac{3}{20} = 0{,}15$ $\to$ prozentuelle Änderung: $0{,}15 \cdot 100 = 15\ \%$ Änderung <u>um</u> 15 %	$\frac{f(7)}{f(3)} = \frac{23}{20} = 1{,}15$ Änderung <u>auf</u> 115 %

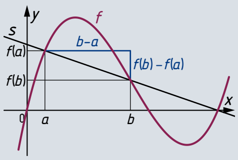
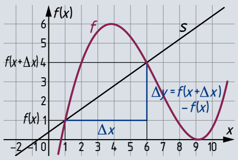
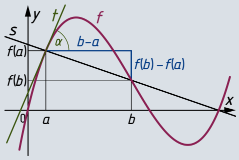
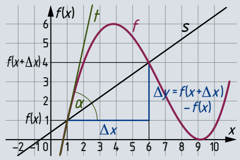
ZB

Die Kraftstoffpreise haben seit 1980 stark zugenommen. Mit $D(t)$ wird der durchschnittliche Preis für 1 Liter Diesel im Jahr t bezeichnet.

Interpretiere $\frac{D(2022) - D(1980)}{D(1980)} = 2{,}05$ im gegebenen Sachzusammenhang!

Lösung:
Der Durchschnittspreis für 1 Liter Diesel hat von 1980 bis 2022 um 205 % zugenommen.

AN 1.2 Den Zusammenhang *Differenzenquotient (mittlere Änderungsrate) – Differenzialquotient („momentane" bzw. lokale Änderungsrate)* auf der Grundlage eines intuitiven Grenzwertbegriffs kennen und diese Konzepte (verbal sowie in formaler Schreibweise) auch kontextbezogen anwenden können

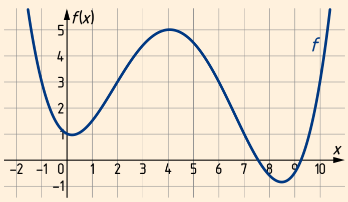
Differenzenquotient/ mittlere Änderungsrate	Differenzialquotient/ lokale bzw. momentane Änderungsrate
<u>unterschiedliche Schreibweisen:</u> im Intervall $[x; x + \Delta x]$: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ im Intervall $[a; b]$: $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$	<u>unterschiedliche Schreibweisen:</u> im Intervall $[x; x + \Delta x]$: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = f'(x)$ im Intervall $[a; b]$: $\lim\limits_{b \to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(a)$
mittlere Änderungsrate einer Funktion bezüglich eines **Intervalls**	*lokale* Änderungsrate einer Funktion bezüglich einer bestimmten **Stelle** x bzw. *momentane* Änderungsrate einer (zeitabhängigen) Funktion bezüglich eines bestimmten **Zeitpunkts** t
Steigung k der **Sekante** von f in $[a; b]$ $k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ bzw. $k = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$	**Tangentensteigung** bzw. Tangens des **Neigungswinkels** α der Tangente an den Graphen einer Funktion f an der Stelle x $k = \tan(\alpha) = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} =$ $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ bzw. $k = \tan(\alpha) = f'(a) = \lim\limits_{b \to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$
 	 
<u>lineare Funktion:</u> Differenzenquotient = Differenzialquotient = Steigung der Geraden	

Wichtiges für die **Anwendungen im <u>Kontext</u>** siehe **AN 1.3**!

Gegeben ist der Graph einer Polynomfunktion f 4. Grads und folgende Eigenschaften für $a \in \mathbb{R}$:

- Die mittlere Änderungsrate im Intervall $[a; 10]$ ist 0.
- $f'(a) < 0$
- $a > 0$

Bestimme a!



Lösung:
$a = 6$
(Die Sekante von f in $[6; 10]$ hat die Steigung 0. Die Tangente bei $x = 6$ ist fallend. $6 > 0$)

AN 1.3 Den Differenzen- und Differenzialquotienten in verschiedenen Kontexten deuten und entsprechende Sachverhalte durch den Differenzen- bzw. Differenzialquotienten beschreiben können

<u>Allgemein:</u>

Differenzenquotient/ mittlere Änderungsrate	Differenzialquotient/ lokale bzw. momentane Änderungsrate
bezogen auf ein bestimmtes Intervall	bezogen auf eine(n) bestimmte(n) Stelle/ Zeitpunkt
Wichtige Formulierungen für die Interpretation	
im Durchschnitt; durchschnittlich	lokale Änderungsrate (Stelle!) / momentane Änderungsrate (Zeitpunkt!)
Einheit	
Einheit von $f(x)$/Einheit von x (zB km/h, m/s, GE/ME)	

Häufig vorkommender Sachzusammenhang:

<u>**Weg-Zeit-Funktion**</u> (Funktion s im Intervall $[t; t + \Delta t]$) und deren **Ableitungen**

$s(t)$ … Weg (in Abhängigkeit von t)
$v(t)$ … Geschwindigkeit (in Abhängigkeit von t)
$a(t)$ … Beschleunigung (in Abhängigkeit von t)

Es gilt: $v(t) = s'(t)$
$a(t) = v'(t) = s''(t)$

Differenzenquotient/ mittlere Änderungsrate	Differenzialquotient/ lokale bzw. momentane Änderungsrate
bezogen auf die Funktion $s(t)$:	
mittlere Geschwindigkeit im **Intervall** $[t; t + \Delta t]$: $\overline{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$	**Momentangeschwindigkeit** zum **Zeitpunkt** t: $v(t) = s'(t)$
bezogen auf die Funktion $v(t)$:	
mittlere Beschleunigung im **Intervall** $[t; t + \Delta t]$: $\overline{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}$	**Momentanbeschleunigung** zum **Zeitpunkt** t: $a(t) = v'(t)$

Auch andere Zusammenhänge lassen sich als Änderungsgeschwindigkeit bzw. Momentangeschwindigkeit (des Wachstums, der Abnahme, des Zerfalls) deuten, zB Temperatur, Population, Wasserstand, radioaktive Substanz etc.
$\rightarrow$ alle Funktionen in Abhängigkeit von der Zeit

ZB

Die Funktion $T(t)$ beschreibt modellhaft den Temperaturverlauf eines abkühlenden Körpers ($T(t)$ in °C, t in h). Der Abkühlungsprozess startet zum Zeitpunkt $t = 0$.

Interpretiere im gegebenen Sachzusammenhang die Gleichung $T'(3) = -7$!

Lösung:
Die momentane Änderungsrate der Temperatur beträgt 3 Stunden nach dem Start des Abkühlungsprozesses −7 °C/h.