MATHE-MATIK

MIT PRAKTISCHEN ANWENDUNGEN

SIDLO
PUHM
STEINMAIR
CAMILO
DRS
POLLACK-DRS

2/3

hpt

Mathematik mit praktischen Anwendungen, Band 2/3

Wie arbeite ich mit diesem Buch?

In der Kopfzeile erkennst du, in welchem Kapitel du dich befindest.

Kleine Roboter begleiten dich durch das Buch.

Dieser Roboter weist auf Aufgaben hin, die **im Unterricht gemeinsam** bearbeitet werden können.

Dieser Roboter weist auf eine Präsentation oder ein Video hin. Scanne dafür den nebenstehenden QR-Code und wähle den gewünschten Link aus.

Ich gebe dir Tipps und Hinweise.

Ich rufe Formeln in Erinnerung.

Ich stelle Aufgaben zum Nachdenken.

Ich fordere dich zu einer Recherche auf.

Ich weise auf eine Gruppen- oder Partnerarbeit hin.

Ich werfe einen Blick in die Vergangenheit.

Jedes Kapitel und Unterkapitel setzt sich aus **Theorieteilen** zusammen, auf die ein Block mit den dazu **passenden Aufgaben** folgt.

Es gilt: $10^{-n} = \frac{1}{10^n}$ Wichtige Sätze, Definitionen und Formeln sind in grünen Kästchen festgehalten.

ZB **Mit diesem Symbol gekennzeichnete und in grüner Schrift gedruckte Beispielaufgaben beinhalten zusätzliche Erklärungen und Rechenhilfen.**

Zur besseren Übersicht sind die Aufgaben durch färbige Aufgabennummern gekennzeichnet.

1.163 Graue Aufgabennummern kennzeichnen Aufgaben, deren Lösungen im Lehrbuch vollständig angegeben sind und bei Bedarf mit Hinweisen und Erklärungen ergänzt werden. Diese Musteraufgaben sind auf gelbem Hintergrund gedruckt.

4.002 Orange Aufgabennummern kennzeichnen einfache Grundaufgaben.

5.019 Magentafarbene Aufgabennummern kennzeichnen Aufgaben mit mittlerem Schwierigkeitsgrad.

2.216 Grüne Aufgabennummern kennzeichnen anspruchsvollere bzw. zeitaufwändigere Aufgaben.

Die **Lösungen der Aufgaben** findest du im zusätzlich beiliegenden Lösungsheft.

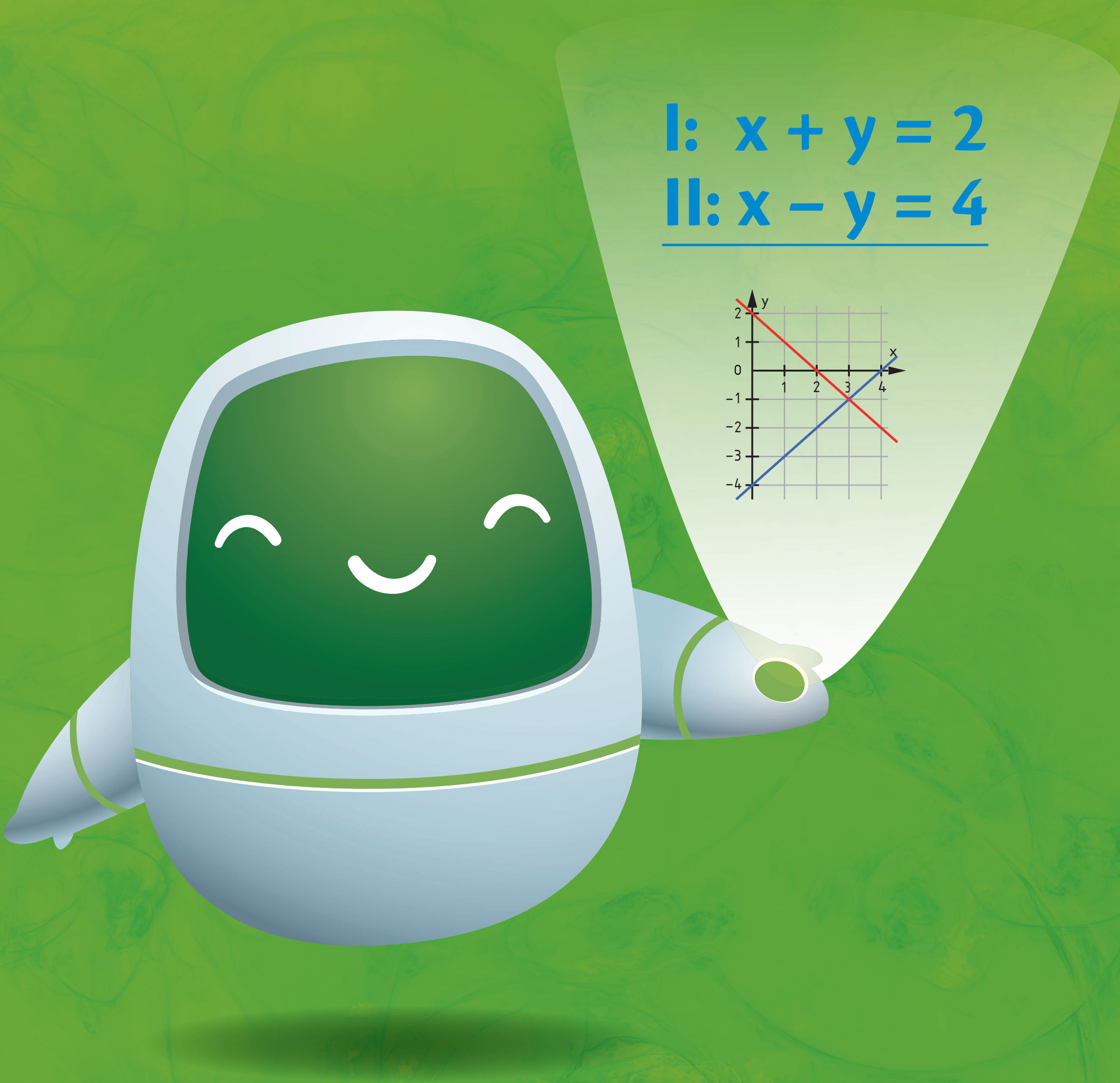
Am Ende jedes Kapitels gibt es **weitere Aufgaben** und **gegebenenfalls Aufgaben aus den Fachgebieten** aus dem gesamten Kapitel und eine **Zusammenfassung**.
Mit dem **Wissens-Check** (inklusive Lösungen) kannst du dein erlerntes Wissen über die Lehrinhalte eines Kapitels anhand verschiedener Aufgaben überprüfen.

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis

Lineare Gleichungssysteme



In diesem Kapitel …

- Gleichungssysteme
- Mögliche Lösungen bei Gleichungssystemen
- Lösungsverfahren
- Aufstellen von Gleichungssystemen

2

2 Lineare Gleichungssysteme

Eine unbekannte Zahl oder Größe kann oft mithilfe einer Gleichung ermittelt werden. In der Praxis treten jedoch häufig Problemstellungen auf, die von mehreren Größen beeinflusst werden. Um diese zu ermitteln, benötigt man mehrere Gleichungen, die zusammen ein Gleichungssystem bilden.
Wir beschränken uns im Folgenden auf lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen.

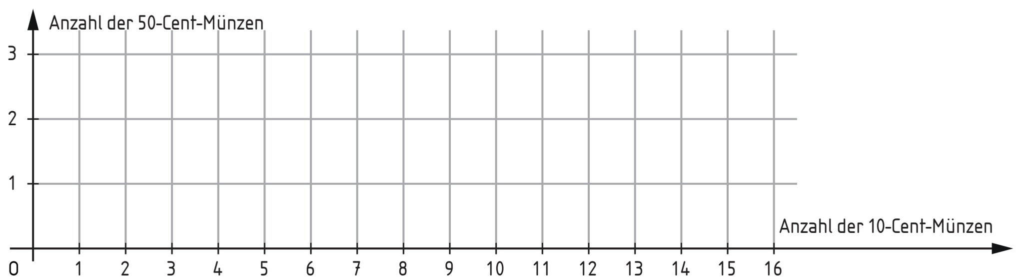
2.1 Einleitung

Eine Gleichung mit zwei Variablen

Thomas möchte in der Pause beim Getränkeautomaten ein Erfrischungsgetränk kaufen. Der Automat nimmt nur Münzen an und gibt kein Wechselgeld zurück.
Eine Flasche kostet 1,50 €. Der Schüler hat 10-Cent-Münzen und 50-Cent-Münzen zur Verfügung.
Gib alle Möglichkeiten an, 1,50 € einzuwerfen.

	1. Möglichkeit	2. Möglichkeit	3. Möglichkeit	4. Möglichkeit
 10-Cent-Münzen:	____	____	____	____
 50-Cent-Münzen:	____	____	____	____

Trage die Wertepaare als Punkte in das Koordinatensystem ein.



Zeichne nun die Gerade ein, auf der alle diese Punkte liegen und gib die Gleichung dieser Geraden an.

y = ____________

Du kannst die möglichen Kombinationen auch mit der folgenden Gleichung ermitteln.

$10x + 50y = 150$ x … Anzahl der 10-Cent-Münzen; y … Anzahl der 50-Cent-Münzen

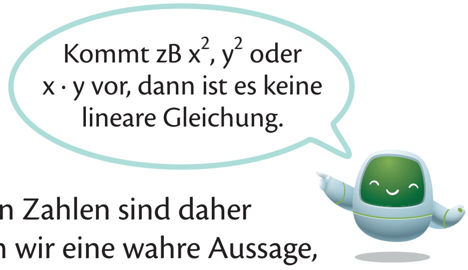
Forme die Gleichung nach y um und vereinfache so weit wie möglich. Was fällt dir auf?

$10x + 50y = 150$ | ____

50y = __________ | ____

y = __________ ⇒ x = __________

Eine Gleichung mit zwei Variablen x und y kann in der Form $a \cdot x + b \cdot y = c$ angeschrieben werden. Man nennt sie eine **lineare Gleichung mit zwei Variablen**.
ZB: $2x + 3y = 5$

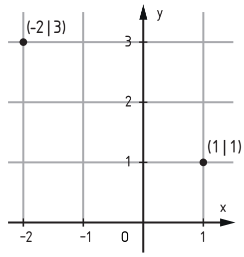


Für x = 1 und y = 1 erhalten wir eine wahre Aussage. Diese beiden Zahlen sind daher eine Lösung dieser Gleichung. Auch für x = –2 und y = 3 erhalten wir eine wahre Aussage, also eine Lösung dieser Gleichung.

Die Lösungen können auch als Zahlenpaare angeschrieben werden:
(1|1), (–2|3)

Die Zahlenpaare können als Koordinaten von Punkten aufgefasst und in einem Koordinatensystem eingetragen werden.

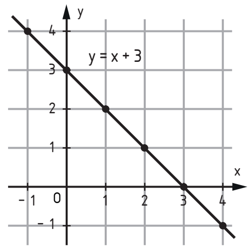
Diese Punkte liegen auf der Geraden, die durch die Gleichung $2x + 3y$ gegeben ist.



Dürfen die Variablen x und y reelle Zahlen sein, gibt es unendlich viele Lösungen, alle Punkte auf der Geraden sind Lösungen. Dürfen x und y nur ganze Zahlen sein, verwende ein ganzzahliges Raster. Die Lösungen liegen dann auf den Rasterschnittpunkten.

ZB **Gegeben ist die Gleichung $x + y = 3$.**
Auf die Form $y = k \cdot x + d$ umgeformt ergibt sich:
$y = -x + 3$.

Ganzzahlige Lösungen sind zum Beispiel:
(–1|4), (0|3), (1|2), (2|1), (3|0), (4|–1)



2.001 Gib fünf ganzzahlige Zahlenpaare an, die Lösungen der Gleichung sind.
a) $x - y = 5$ **b)** $2x + 3y = 15$ **c)** $4x - 2y = -2$ **d)** $x + 2y = 8$

2.002 Lisa hat 15,00 € zum Einkaufen von Wasser und Eis bekommen. Eine Flasche Wasser kostet 2,00 € und eine kleine Portion Eis kostet 3,00 €.
1) Es soll kein Geld übrigbleiben. Stelle eine Gleichung auf, mit der die mögliche Anzahl x der Wasserflaschen und die Anzahl y der Eisportionen berechnet werden kann.

_____ · x + _____ · y = _____

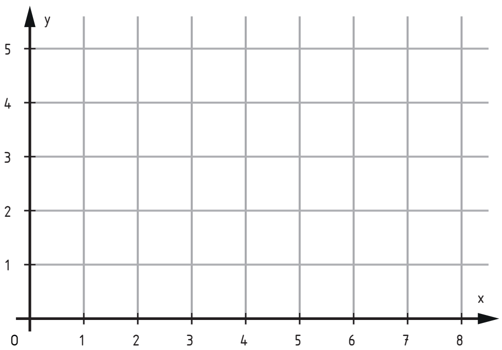
2) Gib die Gleichung in die Form $y = k \cdot x + d$ an.

y = ______________________________

Zeichne die Gerade ein.

3) Markiere die Lösungspunkte und gib deren Koordinaten an.

____



2.003 **1)** Gib die Gleichung in der Form $y = k \cdot x + d$ an und zeichne die Gerade.
2) Markiere die Lösungspunkte, wenn x und y natürliche Zahlen sind.
a) $x + y = 4$ **b)** $-x + 2y = 8$ **c)** $2x - y = 6$ **d)** $-2x + y = 5$

Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen

In einem Schlafwagen mit 10 Abteilen gibt es Doppel- und Dreierabteile. Insgesamt können 26 Personen untergebracht werden. Setze die fehlenden Zahlen ein.

Abteile: Anzahl Doppelabteile + Anzahl Dreierabteile = ______

Personen: ______ · Anzahl Doppelabteile + ______ · Anzahl Dreierabteile = 26

Werden für zwei Variablen zwei Bedingungen formuliert, so erhält man **zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten**. Gemeinsam bilden sie ein **Gleichungssystem**. Die Gleichungen werden oft mit I und II gekennzeichnet.

Gibt es für ein lineares Gleichungssystem mit zwei Variablen ein Zahlenpaar, das beide Gleichungen erfüllt, so nennt man dieses Zahlenpaar Lösung des Gleichungssystems.

ZB **I: $x + y = 2$ Lösungen für I: $(1|1)$, $(2|0)$, $(3|-1)$, $(4|-2)$, ...**
II: $x - y = 4$ Lösungen für II: $(1|-3)$, $(2|-2)$, $(3|-1)$, $(4|0)$, ...
Die Lösung für das Gleichungssystem lautet: $(3|-1)$, also $x = 3$ und $y = -1$

Allgemeine Form eines linearen Gleichungssystems mit zwei Variablen

I: $a_1 \cdot x + b_1 \cdot y = c_1$ a_1, a_2, b_1, b_2 ... Koeffizienten
II: $a_2 \cdot x + b_2 \cdot y = c_2$ c_1, c_2 ... Konstanten $(a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R})$

In der Aufgabe am Beginn der Seite haben wir ein Gleichungssystem in Worten formuliert. Bezeichne die Anzahl der Doppelabteile mit x und die Anzahl der Dreierabteile mit y und setze die fehlenden Zahlen ein.

I: _____ + _____ = _____ Lösungen für I: (_____|4), (_____|5), (_____|6), (_____|7)

II: _____ · _____ + _____ · _____ = _____ Lösungen für II: (_____|4), (_____|5), (_____|6), (_____|7)

Die Lösung für das Gleichungssystem lautet: (_____|_____), also x = _____ und y = _____

Der Schlafwagen hat ______ Doppelabteile und ______ Dreierabteile.

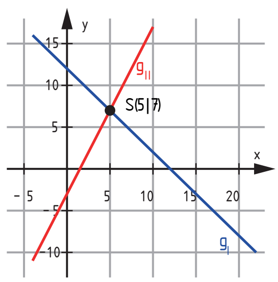
Lösungsfälle

Beim **Lösen von linearen Gleichungssystemen** können **drei Fälle** auftreten:

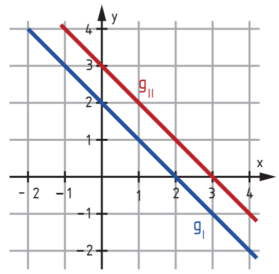
1. Fall: I: $x + y = 12 \Rightarrow g_I$: $y = -x + 12$
II: $2x - y = 3 \Rightarrow g_{II}$: $y = 2x - 3$

Die Lösungen der Gleichung I liegen auf der Geraden g_I, die der Gleichung II auf g_{II}. Der **Schnittpunkt** S(5|7) gibt die Lösung des Gleichungssystems an.

Das Gleichungssystem hat **eine eindeutige Lösung**, L = {(5|7)}.



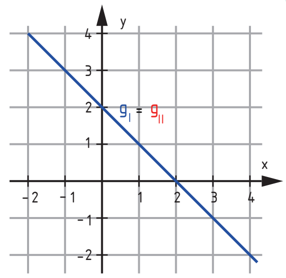
2. Fall: I: $1x + 1y = 2 \Rightarrow g_I$: $y = -x + 2$
II: $2x + 2y = 6 \Rightarrow g_{II}$: $y = -x + 3$



Die Geraden haben die gleiche **Steigung** $\mathbf{k = -1}$, aber verschiedene **y-Achsenabschnitte**. Die Geraden sind daher **parallel**. Es gibt somit keinen **Schnittpunkt**.

Das Gleichungssystem hat **keine Lösung**, L = { }.

3. Fall: I: $x + y = 2 \Rightarrow g_I$: $y = -x + 2$
II: $2x + 2y = 4 \Rightarrow g_{II}$: $y = -x + 2$



Gleichung II ist ein Vielfaches von Gleichung I.
Die Geraden fallen zusammen, sie haben daher unendlich viele Punkte gemeinsam.
Sie sind ident, $g_I = g_{II}$
Jeder Punkt der Geraden ist also eine Lösung.

Das Gleichungssystem hat **unendlich viele Lösungen**, $L = \{(x|y) | y = -x + 2\}$.

Lösung eines linearen Gleichungssystems sind jene Zahlenpaare, die beide Gleichungen erfüllen.
Es kann **keine** Lösung, genau **eine** Lösung oder **unendlich viele** Lösungen geben.

Als Grundmenge für die beiden Variablen wählen wir im Folgenden jeweils $\mathbb{R}$, falls nicht anders angegeben.

2.004 Zeichne die Lösungen der Gleichung I und die der Gleichung II in ein Koordinatensystem. Wie liegen die Geraden zueinander? Was kannst du über die Anzahl der Lösungen sagen?

1) I: $x + y = 6$
II: $x - y = 4$

2) I: $x + y = 6$
II: $x + y = 4$

3) I: $x + y = 6$
II: $2x + 2y = 12$

2.005 Ordne den gegebenen Gleichungssystemen jeweils die Anzahl der Lösungen zu.

1	I: $4x - 4y = 4$ II: $x - y = 2$	☐	A	keine Lösung
2	I: $2x - 2y = 4$ II: $x - y = 2$	☐	B	genau eine Lösung
3	I: $4x + y = 4$ II: $x - y = 1$	☐	C	unendlich viele Lösungen

2.006 Setze die Koeffizienten so ein, dass das Gleichungssystem keine Lösung hat.

a) I: $x + 2y = 3$
II: ____x + ____y = 8

b) I: $x - 2y = -4$
II: ____x + ____y = 10

c) I: $3x - 6y = 9$
II: ____x + ____y = −3

2.2 Grafisches Lösungsverfahren

Ein lineares Gleichungssystem mit zwei Variablen kann grafisch gelöst werden.

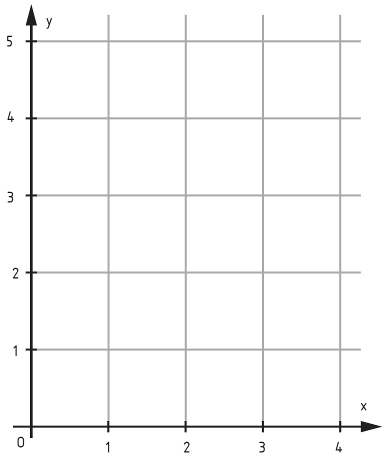
Stelle die Lösungen der zwei Gleichungen im gegebenen Koordinatensystem dar. Ermittle den Schnittpunkt S.

I: $y = 4 - 2x$
II: $y = x + 1$

S(____|____)

Die Koordinaten des Schnittpunkts sind die Lösung des Gleichungssystems.

Lösung des Gleichungssystems: x = ____, y = ____



2.007 Zeichne die Lösungen der gegebenen Gleichungen in ein Koordinatensystem und ermittle den Schnittpunkt. Gib die Lösung des Gleichungssystems an.

a) I: $y = x + 2$
II: $y = -x + 7$

b) I: $y = -x + 6$
II: $y = x$

c) I: $y = -2x + 8$
II: $y = 2x + 2$

d) I: $y = -3x + 9$
II: $y = -2x + 7$

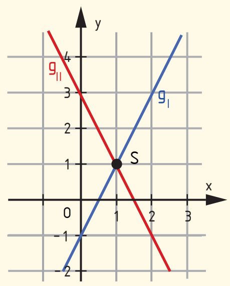
2.008 Löse das gegebene Gleichungssystem grafisch. Führe die Probe durch.

I: $-2x + y = -1$
II: $2x + y = 3$

Lösung:

I: $-2x + y = -1 \quad | + 2x \;\Rightarrow\; g_I\colon y = 2x - 1$
II: $2x + y = 3 \quad | - 2x \;\Rightarrow\; g_{II}\colon y = -2x + 3$

Schnittpunkt S(1|1)
Die Lösung lautet:
$x = 1, y = 1$



Probe: I: $-2 \cdot 1 + 1 = -1$ LS = RS
II: $2 \cdot 1 + 1 = 3$ LS = RS ✓

Aufgaben 2.009 – 2.010: Löse das gegebene Gleichungssystem grafisch. Führe die Probe durch.

2.009
a) I: $x + 2y = 7$
II: $x - y = 4$

b) I: $x + 2y = 5$
II: $3x + 4y = 8$

c) I: $x - 2y = 1$
II: $3x + 4y = 8$

d) I: $x - y = -4$
II: $2x + y = 4$

2.010
a) I: $y + 3x = 6$
II: $y - 3x = 0$

b) I: $2x = 4$
II: $x + 3y = 8$

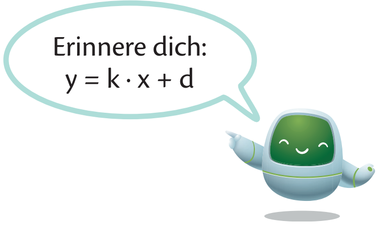
c) I: $x - y = 1$
II: $4y = 8$

d) I: $x = 2y - 4$
II: $x = -y + 8$

ZB Von zwei Geraden sind jeweils k und d gegeben. Stelle das Gleichungssystem auf, mit dem der Schnittpunkt der beiden Geraden ermittelt werden kann.

g_I: $k = \frac{1}{2}$, $d = 3$; g_{II}: $k = -1$, $d = 9$

$$\begin{array}{llll} \text{I:} & y = \frac{1}{2}\cdot x + 3 & \Big|-\left(\frac{1}{2}\cdot x\right) & \Rightarrow \text{I:}\ -\frac{1}{2}\cdot x + y = 3 \\ \text{II:} & y = -x + 9 & \big| + x & \Rightarrow \text{II:}\ \quad x + y = 9 \end{array}$$



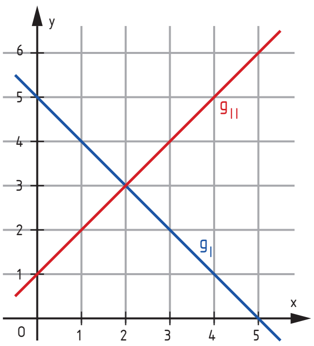
2.011 In der Grafik ist ein Gleichungssystem dargestellt.

1) Lies den Schnittpunkt der beiden Geraden ab.

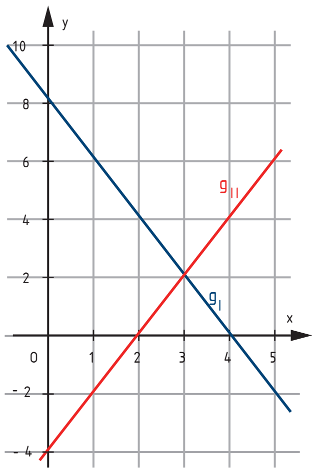
2) Ermittle k und d jeder Geraden und stelle mithilfe der Geradengleichungen das zugehörige Gleichungssystem auf.

3) Mache eine Probe durch Einsetzen der Lösung aus ***1)*** ins Gleichungssystem.

a)



b)

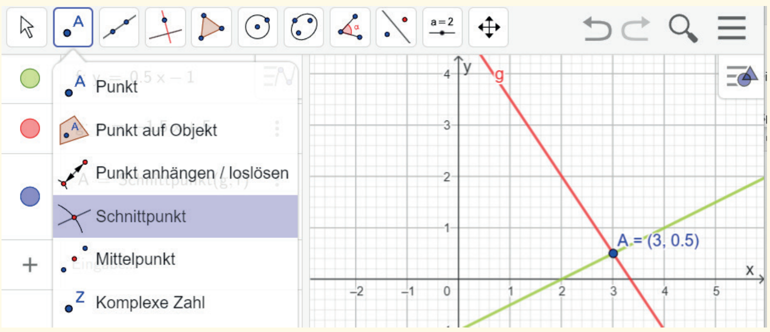


2.012 Löse das gegebene Gleichungssystem mit Hilfe von Technologie.

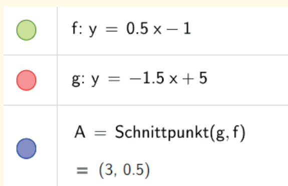
I: $y = 0{,}5x - 1$

II: $y = -1{,}5x + 5$

Lösung zB mit GeoGebra:



- Gleichungen eingeben



- Mit dem Werkzeug „Schnittpunkt" den Punkt A ermitteln.

Schnittpunkt A(3|0,5)

Die Lösung lautet: x = 3, y = 0,5

2.013 Löse das gegebene Gleichungssystem mit Hilfe von Technologie.

a) I: $y = -x + 1$
II: $y = 2x + 7$

b) I: $y = \frac{1}{4}\cdot x - 1$
II: $y = x + 2$

c) I: $y = \frac{3}{2}\cdot x - 1$
II: $y = -\frac{1}{4}\cdot x - 1$

d) I: $y = \frac{3x}{2} - \frac{3}{2}$
II: $y = -x + 6$

2.3 Rechnerische Lösungsverfahren

Das grafische Lösungsverfahren ist wegen der Zeichenungenauigkeit nur bedingt einsetzbar. Daher benötigt man rechnerische (numerische) Lösungsverfahren. Dabei wird durch geeignetes Kombinieren der beiden Gleichungen eine Gleichung mit einer Variablen erstellt und diese gelöst.

Gleichsetzungsverfahren

Steht in beiden Gleichungen dieselbe Variable allein auf einer Seite, so kann man die beiden anderen Seiten gleichsetzen. Bei Bedarf müssen die Gleichungen vorher umgeformt werden.

ZB Folgendes Gleichungssystem soll gelöst werden: $\text{I: } y = x + 1$
$\text{II: } y = 4 - 2x$

In beiden Gleichungen steht y allein auf der linken Seite. Wir können daher die beiden rechten Seiten gleichsetzen:

$$\left.\begin{aligned}\text{I: }& y = x + 1\\ \text{II: }& y = 4 - 2x\end{aligned}\right\}\ y = y \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} x + 1 &= 4 - 2x && \mid +2x \quad \mid -1\\ 3x &= 3 && \mid :3\\ x &= 1 \end{aligned}$$

Die Lösung für x wird in eine der beiden Gleichungen eingesetzt und y wird ermittelt.
In II einsetzen: $y = 4 - 2 \cdot 1 = 2$
Die Lösung des Gleichungssystems lautet: $x = 1,\ y = 2$

2.014 Löse das gegebene Gleichungssystem mithilfe des Gleichsetzungsverfahrens.

a) $\text{I: } y = 5x - 17$
$\text{II: } y = -4x + 19$

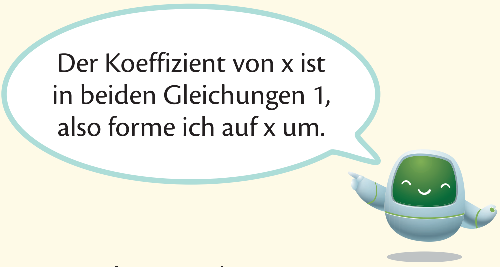
b) $\text{I: } y = -3x + 14$
$\text{II: } y = 2x - 1$

c) $\text{I: } y = -2x + 11$
$\text{II: } y = -3x + 7$

d) $\text{I: } y = -\frac{1}{2} \cdot x + 7$
$\text{II: } y = x + 1$

2.015 Löse das gegebene Gleichungssystem.

$\text{I: } x + 2y = 8$
$\text{II: } x - y = 2$



Lösung:

$\text{I: } x + 2y = 8 \quad \mid -2y$
$\text{II: } x - y = 2 \quad \mid +y$

$$\left.\begin{aligned}\text{I: }& x = 8 - 2y\\ \text{II: }& x = 2 + y\end{aligned}\right\}\ x = x \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} 8 - 2y &= 2 + y && \mid +2y \quad \mid -2\\ 6 &= 3y && \mid :3\\ y &= 2 \end{aligned}$$

y in II einsetzen: $x = 2 + 2 = 4$ Lösung: $x = 4,\ y = 2$

Aufgaben 2.016 – 2.017: Löse das Gleichungssystem mithilfe des Gleichsetzungsverfahrens. Führe die Probe durch.

2.016

a) $\text{I: } x + 4y = 14$
$\text{II: } x - y = 4$

b) $\text{I: } 5x + y = 6$
$\text{II: } -x + y = 6$

c) $\text{I: } x - 2y = -1$
$\text{II: } x + 4y = 17$

d) $\text{I: } x + y = 4$
$\text{II: } 2x + y = 16$

2.017

a) $\text{I: } 3a + b = 14$
$\text{II: } 6a - 3b = 3$

b) $\text{I: } 4s + 2t = 22$
$\text{II: } 3s + 3t = 21$

c) $\text{I: } 3f - 6g = 0$
$\text{II: } 2f + 4g = 24$

d) $\text{I: } 4c + 8d = 44$
$\text{II: } 2c - 2d = -2$

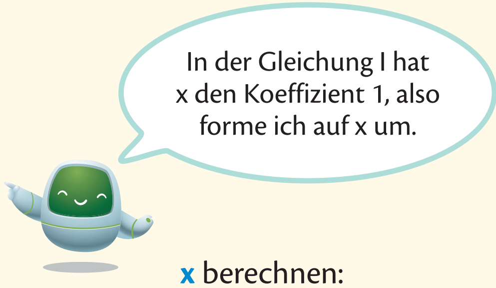
Einsetzungsverfahren

Eine Gleichung wird nach einer Variablen umgeformt. Der ermittelte Term wird in die zweite Gleichung an Stelle dieser Variablen eingesetzt.

2.018 Löse das gegebene Gleichungssystem mithilfe des Einsetzungsverfahren. Führe die Probe durch.

I: $x + 7y = 6$
II: $2x - 4y = 30$

Lösung:
I: $x + 7y = 6 \Rightarrow \mathbf{x = 6 - 7y}$
II: $2\mathbf{x} - 4y = 30$



(6 – 7y) für **x** in II einsetzen:
$2 \cdot (6 - 7y) - 4y = 30$
$12 - 14y - 4y = 30$
$-18y = 18$
$y = -1$

x berechnen:
$x = 6 - 7 \cdot (-1) = 13$

Probe: I: $13 + 7 \cdot (-1) = 6$ LS = RS
II: $2 \cdot 13 - 4 \cdot (-1) = 30$ LS = RS ✓ Lösung: $x = 13$, $y = -1$

2.019 Das gegebene Gleichungssystem wird mithilfe des Einsetzungsverfahrens gelöst. Ergänze die Lücken.

a) I: $2x - 2y = 6$
II: $x + 2y = -3$

aus II: $x =$ ____________
in I: $2 \cdot ($____________$) - 2y = 6$
____________ $- 2y = 6$
____ $y =$ ____
$y =$ ____
in II: $x =$ ____________ $=$ ____
Lösung: $x =$ ____ , $y =$ ____

b) I: $2x + y = 3$
II: $3x + 2y = 2$

aus I: $y =$ ____________
in II: $3x + 2 \cdot ($____________$) = 2$
$3x +$ ____________ $= 2$
____ $x =$ ____
$x =$ ____
in I: $y =$ ____________ $=$ ____
Lösung: $x =$ ____ , $y =$ ____

Aufgaben 2.020 – 2.021: Löse das gegebene Gleichungssystem mithilfe des Einsetzungsverfahrens. Führe die Probe durch.

2.020
a) I: $x + 5y = -6$; II: $3x - 2y = 16$
b) I: $5x + 2y = 3$; II: $x - 3y = 21$
c) I: $-3x + y = 1$; II: $5x - 4y = 10$
d) I: $7x - 2y = 20$; II: $2x + y = 1$

2.021
a) I: $-x + 2y = 8$; II: $3x + 4y = -4$
b) I: $4x + 5y = 2$; II: $-x - 2y = -2$
c) I: $5x - 3y = 7$; II: $2x - y = 4$
d) I: $-3x - y = 9$; II: $5x + 8y = 23$

Additions- oder Subtraktionsverfahren (Eliminationsmethode)

Die Gleichungen werden mit einer Zahl $\neq 0$ so multipliziert, dass die Koeffizienten einer Variablen **Gegenzahlen** sind. Anschließend werden die Gleichungen **addiert**.

Man kann auch so multiplizieren, dass die Koeffizienten einer Variablen **gleich** sind und anschließend die Gleichungen **subtrahieren**. Die entsprechende Variable fällt dadurch weg.

Zum Beispiel:

$$\begin{array}{l} \text{I: } 2x + 3y = 7 \\ \underline{\text{II: } 4x - 3y = 5} \\ \quad 6x - \ 0 = 12 \end{array} \ \oplus \qquad\qquad \begin{array}{l} \text{I: } \ \ 2x + 3y = \ \ 7 \\ \underline{\text{II: } -4x + 3y = -5} \\ \quad 6x + \ 0 = 12 \end{array} \ \ominus$$

Löse die Gleichungssysteme immer mit der Gegenzahl und dem Additionsverfahren.

$$\begin{array}{l} \text{I: } 2x + 3y = 7 \\ \underline{\text{II: } 4x - 3y = 5} \ \oplus \\ \underline{\qquad} x + 0 = \underline{\qquad} \\ \qquad x = \underline{\qquad} \\ \text{in I: } 2 \cdot \underline{\qquad} + 3y = 7 \\ \qquad 3y = \underline{\qquad} \\ \qquad y = \underline{\qquad} \\ \text{Lösung: } x = \underline{\qquad},\ y = \underline{\qquad} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{I: } 2x + 3y = 9 \quad |\cdot \underline{\qquad} \\ \underline{\text{II: } 4x - 6y = 6} \\ \text{I: } \underline{\qquad} x + 6y = \underline{\qquad} \\ \underline{\text{II: } \quad 4x - 6y = 6} \ \oplus \\ \underline{\qquad} x + 0 = \underline{\qquad} \\ \qquad x = \underline{\qquad} \\ \text{in I: } 2 \cdot \underline{\qquad} + 3y = 9 \\ \qquad 3y = \underline{\qquad} \\ \qquad y = \underline{\qquad} \\ \text{Lösung: } x = \underline{\qquad},\ y = \underline{\qquad} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{I: } 2x - 3y = -3 \quad |\cdot \underline{\qquad} \\ \underline{\text{II: } 5x - 2y = \ \ 9} \quad |\cdot \underline{\qquad} \\ \text{I: } \underline{\qquad} x + 6y = \underline{\qquad} \\ \underline{\text{II: } \underline{\qquad} x - 6y = \underline{\qquad}} \ \oplus \\ \underline{\qquad} x + 0 = \underline{\qquad} \\ \qquad x = \underline{\qquad} \\ \text{in I: } 2 \cdot \underline{\qquad} - 3y = -3 \\ \qquad -3y = \underline{\qquad} \\ \qquad y = \underline{\qquad} \\ \text{Lösung: } x = \underline{\qquad},\ y = \underline{\qquad} \end{array}$$

2.022 Löse das gegebene Gleichungssystem ***1)*** mithilfe des Additionsverfahrens und ***2)*** mithilfe des Subtraktionsverfahrens.

$$\begin{array}{l} \text{I: } 4x - 3y = \ \ 2 \\ \underline{\text{II: } 3x + 2y = 27} \end{array}$$

Lösung:

1) Additionsverfahren:

$$\begin{array}{ll} \text{I: } 4x - 3y = \ \ 2 & |\cdot 2 \\ \underline{\text{II: } 3x + 2y = 27} & |\cdot 3 \\ \text{I: } 8x - 6y = 4 & \\ \underline{\text{II: } 9x + 6y = 81} \ \oplus & \\ 17x + \ 0 = 85 & |:17 \\ \qquad x = 5 & \\ \text{in II: } 3 \cdot 5 + 2y = 27 & |-15 \\ \qquad 2y = 12 & |:2 \\ \qquad y = 6 & \end{array}$$

2) Subtraktionsverfahren:

$$\begin{array}{ll} \text{I: } 4x - 3y = \ \ 2 & |\cdot 3 \\ \underline{\text{II: } 3x + 2y = 27} & |\cdot 4 \\ \text{I: } 12x - 9y = \quad 6 & \\ \underline{\text{II: } 12x + 8y = \ 108} \ \ominus & \\ 0 - 17y = -102 & |:(-17) \\ \qquad y = 6 & \\ \text{in II: } 3x + 2 \cdot 6 = 27 & |-12 \\ \qquad 3x = 15 & |:3 \\ \qquad x = 5 & \end{array}$$

Lösung: $x = 5,\ y = 6$

2.023 Kreuze an, bei welchen Rechenoperationen eine Variable wegfällt.

		A	B	C
a)	I: $-8x + 6y = -62$ II: $3x + 9y = 12$	$\mid \cdot 3$ $\mid \cdot 8$ $\oplus$	$\mid \cdot (-3)$ $\mid \cdot (-2)$ $\ominus$	$\mid \cdot 3$ $\mid \cdot 2$ $\oplus$
b)	I: $-9x - y = 11$ II: $x - 3y = -23$	$\mid$ $\mid \cdot 9$ $\oplus$	$\mid \cdot (-1)$ $\mid \cdot 3$ $\oplus$	$\mid \cdot 3$ $\mid$ $\ominus$

Aufgaben 2.024 – 2.025: Löse das gegebene Gleichungssystem mithilfe der Eliminationsmethode. Führe die Probe durch.

2.024
a) I: $x + 2y = -8$; II: $3x - 2y = 24$
b) I: $5x + 3y = 3$; II: $x - 3y = 15$
c) I: $-3x - y = -1$; II: $6x + 4y = 16$
d) I: $7x - 2y = 4$; II: $2x + y = -13$

2.025
a) I: $-5x + 2y = -17$; II: $3x + 3y = 6$
b) I: $4x + 5y = 18$; II: $3x + 8y = 5$
c) I: $7x - 2y = 11$; II: $5x - 3y = 0$
d) I: $-6x - 2y = 6$; II: $5x + 8y = 14$

Aufgaben 2.026 – 2.028: Löse das gegebene Gleichungssystem. Wähle das Verfahren selbst.

2.026
a) I: $-5x + 6y = 11$; II: $3x - 6y = -21$
b) I: $x + 2y = 17$; II: $3x - 5y = -81$
c) I: $-2x + y = 17$; II: $9x + y = -5$
d) I: $6x + 7y = 46$; II: $2x - y = 2$

2.027
a) I: $-6x + 5y = 7$; II: $4x + y = 4$
b) I: $4x + 6y = -11$; II: $-x + 8y = -2$
c) I: $7x - y = 12$; II: $4x - y = 3$
d) I: $-7x - 3y = 2$; II: $6x + 7y = 16$

2.028
a) I: $-x + 5y = 22$; II: $4x - 2y = 14$
b) I: $8x + 9y = -11$; II: $-x + 5y = -17$
c) I: $11x + 3y = -22$; II: $4x - 2y = -42$
d) I: $-9x - 5y = 3$; II: $-3x + y = 9$

Aufgaben 2.029 – 2.033: Bringe die Gleichungen jeweils auf die Form $a \cdot x + b \cdot y = c$ und löse anschließend die Gleichungssysteme mit einer Methode deiner Wahl.

2.029
a) I: $3x - 2y = 2 \cdot (y + 1)$; II: $2 \cdot (x - 2) + 10y = 5 \cdot (3 - y)$
b) I: $2 \cdot (x + 2) + 21y = 98$; II: $9 \cdot (2x - 1) - 5 \cdot (y + 5) = 36$

2.030
a) I: $5x - (2y + 36) = 12x + 4y - 14$; II: $8x + 12 = -6x - (7y - 33)$
b) I: $3x + 11y - 61 = 17x - (5y - 9)$; II: $4x - (2y + 2) = -6x + 2y$

2.031
a) I: $7 \cdot (2x - 5) + 4 \cdot (y + 7) = -69$; II: $8 \cdot (x + 2) - 2 \cdot (y - 9) = 20$
b) I: $5 \cdot (7x + 6) - 9 \cdot (2y - 7) = -102$; II: $9 \cdot (2x - 3) + 4 \cdot (5y + 7) = 47$

2.032
a) I: $4 \cdot (2x + 5) - 3 \cdot (y - 4) = 18 \cdot (y - 1)$; II: $7 \cdot (x - 2) + 3 \cdot (y + 5) = 3 \cdot (2x + y)$
b) I: $6 \cdot (x + 2) - 45y = 15 - 5 \cdot (x + 3y)$; II: $4 \cdot (3x - 10y + 7) = 3 \cdot (3x + 2y) - 9$

2.033
a) I: $3 \cdot (2x - 5) + 4 \cdot (y + 4) = 20x - 7 \cdot (3y + 1)$; II: $15x - 3 \cdot (5y - 3) + 2 = 8 \cdot (2x + 3) - 10y$
b) I: $25x - 5 \cdot (7y + 12) = 4 \cdot (2x - 7) + 14y$; II: $-(3x + 3) + 22y = 6 \cdot (8x + 3) - 2 \cdot (9y + 5)$

2.4 Anwendungen von Gleichungssystemen

Bei Textaufgaben wird zuerst für jede gesuchte Größe eine Variable gewählt. Dann wird der Text in ein Gleichungssystem übersetzt. Die Probe erfolgt anhand des Texts.

ZB **Susi wechselt 50 Euro in 1-€-Münzen und 2-€-Münzen. Insgesamt hat sie dann 33 Münzen. Wie viele 1-€-Münzen und wie viele 2-€-Münzen hat sie?**

x … Anzahl der 1-€-Münzen, y … Anzahl der 2-€-Münzen

Gleichungssystem aufstellen und lösen:

$$\begin{array}{ll} \text{I: } 1 \cdot x + 2 \cdot y = 50 & \text{… insgesamt 50 Euro} \\ \text{II: } \quad\; x + \quad y = 33 & \text{… insgesamt 33 Münzen} \\ \hline \qquad\qquad y = 17 & \text{in II: } x + 17 = 33 \Rightarrow x = 16 \end{array} \quad \ominus$$

Probe: 1-€-Münzen: 16, 2-€-Münzen: 17

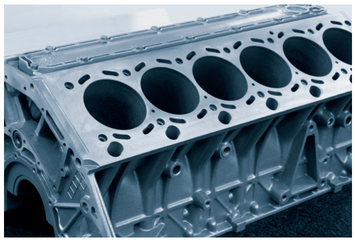
1 € · 16 + 2 € · 17 = 50 €

16 Münzen + 17 Münzen = 33 Münzen ✓

Sie hat 16 1-€-Münzen und 17 2-€-Münzen.

2.034 In einem Kino wird ein Film in der Standardversion und in der 3D-Version gezeigt. Ein Ticket für die Standardversion kostet 12,00 €. Ein Ticket für die 3D-Version kostet 14,50 €. An einem bestimmten Tag wurden 650 Tickets verkauft und 8 800,00 € eingenommen.
Wie viele Tickets wurden pro Version verkauft?

2.035 Eine Automechanikerin erzählt ihrer Freundin, dass in ihrer Werkstätte derzeit 20 Fahrzeuge stehen. Die Fahrzeuge haben entweder 4-Zylinder- oder 12-Zylinder-Motoren. Insgesamt sind es 128 Zylinder.
Wie viele Autos mit 4-Zylinder- bzw. 12-Zylinder-Motoren stehen in ihrer Werkstätte?



2.036 Eine Lieferung von Elektrobauteilen kostet gesamt 33,50 € und besteht aus insgesamt 1 000 Widerständen und Leuchtdioden. Die Widerstände kosten 1,50 € pro 100 Stück. Die Leuchtdioden kosten 0,20 € pro Stück. Berechne jeweils die Anzahl der Bauteile.

2.037 Ein Gastwirt bestellt 90 Liter Traubensaft in zwei verschiedenen Flaschengrößen mit 0,75 L oder 1 L Inhalt. Insgesamt bekommt er 100 Flaschen geliefert.
Wie viele Flaschen von jeder Größe bekommt der Wirt?

2.038 Ein Bootsverleiher vermietet Elektroboote. Er verlangt eine Grundgebühr und eine zusätzliche Gebühr pro halbe Stunde Mietdauer. Peter mietet ein Boot für 4 Stunden und bezahlt 12,80 €. Paul mietet ein Boot für 2,5 Stunden und bezahlt 11,00 €.
Wie hoch ist die Grundgebühr und die Gebühr für eine halbe Stunde Mietdauer?

2.039 Eine Vertreterin mietet für einen Tag ein Auto, wobei sich die Miete aus einer Tagesgebühr inklusive 400 km und einem Kilometer-Tarif für jeden weiteren Kilometer zusammensetzt. Sie fährt 500 km und bezahlt 115,00 €. Eine Woche später mietet sie denselben Wagen noch einmal für einen Tag und bezahlt für 440 km 91,00 €.
Wie hoch ist die Tagesgebühr und wie hoch der Kilometer-Tarif?

Textaufgaben mit Zahlen

2.040 Die Differenz zweier Zahlen ist vier. Addiert man zum Doppelten der ersten Zahl das Dreifache der zweiten Zahl, so ist die Summe 93. Wie lauten die Zahlen?

2.041 Das Dreifache der Differenz zweier Zahlen ist 7,2. Viertelt man die Summe dieser Zahlen, erhält man 1,8. Zur Ermittlung der beiden Zahlen werden vier Lösungsansätze vorgeschlagen. Kreuze an, welche dieser Ansätze richtig sind.

A	B	C	D
I: $3x - 3y = 7{,}2$ II: $\frac{x}{4} + \frac{y}{4} = 1{,}8$	I: $x - y = 7{,}2 \cdot 3$ II: $x + y = \frac{1{,}8}{4}$	I: $\frac{x-y}{3} = 7{,}2$ II: $4 \cdot (x + y) = 1{,}8$	I: $3 \cdot (x - y) = 7{,}2$ II: $\frac{x+y}{4} = 1{,}8$

2.042 Beim Basketball-Olympia-Finale 2024 spielte USA gegen Frankreich. Es wurden insgesamt 185 Punkte erzielt. Die USA gewann gegen Frankreich mit 11 Punkten Vorsprung. Wie viele Punkte hatte jede Mannschaft?

2.043 Eine Mutter sagt zu ihrer Tochter: „Ich bin jetzt 21 Jahre älter als du. In drei Jahren werde ich doppelt so alt wie du sein." Wie alt ist die Mutter, wie alt ist die Tochter?

2.044 Zwei Kinder besitzen zusammen M Murmeln. Ein Kind hat um 2 Murmeln mehr als das andere. Stelle ein Gleichungssystem zur Berechnung der Anzahl der Murmeln pro Kind auf.

2.045 Der indische Mathematiker Bhaskara II. (1114 – 1185) schrieb in einem seiner Werke, der Vija Ganita, folgende Aufgabe nieder:

„Jemand sagt zu seinem Freund: ‚Gib mir 100 Rupien und ich bin doppelt so reich wie du!'. Dieser antwortet: ‚Wenn du mir 10 gibst, bin ich sechsmal so reich wie du!'. Sag mir, wie groß ihre Vermögen waren."

1) Bildet Kleingruppen und löst diese Aufgabe gemeinsam.

2) Sucht nach weiteren Aufgaben zu linearen Gleichungssystemen aus vergangenen Zeiten. Übersetzt die Texte in die „heutige Sprache" und arbeitet die Lösungen aus. Präsentiert eure Arbeit der ganzen Klasse in Form eines Referats.

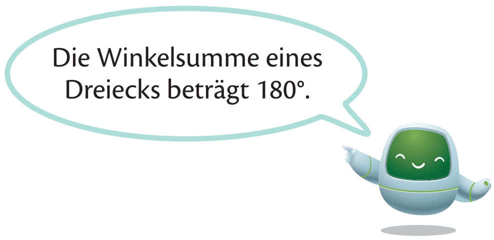
Geometrische Aufgaben

2.046 In einem gleichschenkligen Dreieck ist jeder Schenkel doppelt so lang wie die Basis. Der Umfang beträgt 35 cm. Berechne die Länge der Schenkel und die Länge der Basis.

2.047 Der Umfang eines Rechtecks beträgt 72 cm. Verlängert man ein Seitenpaar um 4 cm, so entsteht ein Quadrat. Gib die Längen der Rechteckseiten an.

2.048 Der Umfang eines Rechtecks beträgt 70 cm. Verlängert man die kürzeren Seiten um 3 cm und die längeren um 2 cm, so vergrößert sich der Flächeninhalt um 96 cm^2. Gib die Abmessungen des ursprünglichen Rechtecks an.

2.049 Der größere spitze Winkel in einem rechtwinkligen Dreieck ist das 1,5-fache des kleineren spitzen Winkels. Wie groß sind die beiden Winkel?



Mischungsaufgaben

2.050 Um eine 32%ige Salzlösung zu erhalten, werden 60 kg und 40 kg von zwei verschiedenen Salzlösungen gemischt. Für eine 20%ige Salzlösung werden 40 kg der ersten Salzlösung mit 30 kg Wasser gemischt.
Ermittle den Prozentgehalt der Salzlösungen.

Lösung:

	Masse in kg	Salzgehalt in %	Salzmasse in kg
Salzlösung 1	60	x	$\frac{x}{100} \cdot 60$
Salzlösung 2	40	y	$\frac{y}{100} \cdot 40$
Mischung 1	100	32	$\frac{32}{100} \cdot 100$

	Masse in kg	Salzgehalt in %	Salzmasse in kg
Salzlösung 1	40	x	$\frac{x}{100} \cdot 40$
Wasser	30	0	0
Mischung 2	70	20	$\frac{20}{100} \cdot 70$

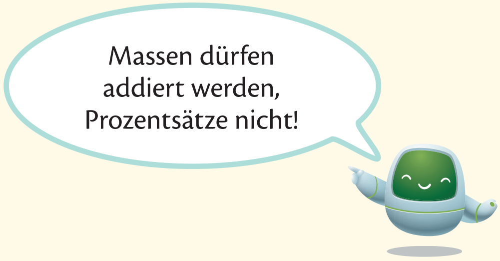
$$\text{I: } \frac{x}{100} \cdot 60 + \frac{y}{100} \cdot 40 = \frac{32}{100} \cdot 100 \quad | \cdot 100$$
$$\text{II: } \frac{x}{100} \cdot 40 + 0 = \frac{20}{100} \cdot 70 \quad | \cdot 100$$

- Die Mischung enthält die Summe der einzelnen Salzmassen.

$$\text{I: } 60x + 40y = 3\,200$$
$$\text{II: } 40x + \quad 0 = 1\,400 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1\,400}{40} = 35$$

$$\text{in I: } 60 \cdot 35 + 40y = 3\,200$$
$$2\,100 + 40y = 3\,200 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1\,100}{40} = 27{,}5$$

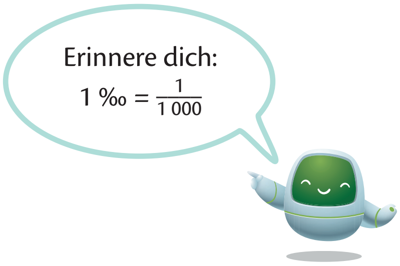
Die erste Salzlösung ist 35%ig, die zweite 27,5%ig.



2.051 Jemand mischt je 500 g von zwei verschiedenen Zuckerlösungen und erhält eine 70%ige Mischung. Danach werden 250 g der ersten Zuckerlösung und 750 g der zweiten Zuckerlösung gemischt und man erhält eine 65%ige Mischung.
Ermittle den Prozentgehalt der ursprünglichen Zuckerlösungen.

2.052 Messing entsteht aus einer Legierung aus Kupfer und Zink. Für eine Legierung werden 1 kg einer bestimmten Messingsorte mit 4 kg einer zweiten Sorte gemischt und man erhält eine Mischung mit 29,8 % Zinkgehalt. Nimmt man von jeder Sorte 2 kg, erhält man eine Mischung mit 20,5 % Zinkgehalt.
Welchen Zinkgehalt haben die Messingsorten?

2.053 Weißgold ist eine Legierung aus Gold, Palladium und weiteren Metallen.
Der Goldanteil wird in Promille angegeben. Weißgold 585 enthält 585 ‰ reines Gold. Eine Goldschmiedin mischt für ein Schmuckstück Weißgold 585 mit Weißgold 750 und erhält 15 g Weißgold mit 631,2 ‰ Goldgehalt.
Wie viel Gramm verwendet sie von jeder Sorte?



2.054 Ein Goldring aus Rotgold hat ein Volumen von 300 mm^3. Rotgold besteht aus Gold $\left(\rho = 19{,}3\,\frac{g}{cm^3}\right)$ und Kupfer $\left(\rho = 8{,}9\,\frac{g}{cm^3}\right)$.
1) Wie viel Gold und Kupfer wurden gemischt, wenn der Ring eine Masse von 4 g hat?
2) Gib den Goldgehalt des Rings in Promille an.

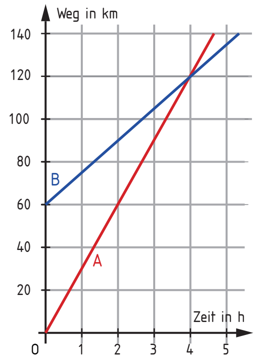
2.5 Weitere Aufgaben und Aufgaben aus den Fachgebieten

2.055 ***1)*** Gib die Gleichung in der Form $y = k \cdot x + d$ an und stelle die Gleichung grafisch dar.
2) Markiere die Lösungspunkte, wenn x und y natürliche Zahlen sind.

a) $x + 2y = 6$ ***b)*** $-2x + y = 7$ ***c)*** $5x - 2y = 4$ ***d)*** $-2x - 4y = -14$

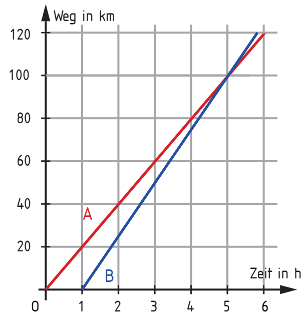
2.056 Uschi kauft zu Schulbeginn Blöcke und Hefte ein. Sie bezahlt 16,10 €.
Wie viele Blöcke und wie viele Hefte hat sie gekauft, wenn ein Block 2,10 € und ein Heft 1,40 € kostet? Gib alle Möglichkeiten an.

2.057 Im nebenstehenden Weg-Zeit-Diagramm sind die Fahrten zweier Autos A und B dargestellt. Arbeite mit der Grafik.



1) Ist Auto A oder Auto B schneller?
2) Mit welcher Geschwindigkeit sind die Autos jeweils unterwegs?
3) Wie viele km sind die Startorte voneinander entfernt?
4) Das Auto A startet um 10:00 Uhr.
Lies ab, um wie viel Uhr die Autos einander treffen.
5) Ermittle mithilfe eines Gleichungssystems, wann die Autos einander treffen.

2.058 Im nebenstehenden Weg-Zeit-Diagramm sind Fahrten zweier Züge dargestellt. Arbeite mit der Grafik.



1) Welcher Zug startet zuerst?
2) Um wie viel Stunden später startet der andere Zug?
3) Welcher Zug ist schneller?
4) Mit welcher Geschwindigkeit sind die Züge jeweils unterwegs?
5) Der Zug A startet um 9:00 Uhr.
Lies ab, um wie viel Uhr die Züge einander treffen.
6) Ermittle mithilfe eines Gleichungssystems, wann die Züge einander treffen.

Aufgaben 2.059 – 2.061: Löse das gegebene Gleichungssystem mit einer Methode deiner Wahl.

2.059
a) I: $12x + 2y = 12$; II: $6x - 2y = -3$
b) I: $2x + 2y = 18$; II: $x - 3y = -11$
c) I: $-3x + y = 32$; II: $2x + y = -3$
d) I: $4x + 5y = 24$; II: $2x - y = 26$

2.060
a) I: $y = 5x + 7$; II: $y = 3x - 9$
b) I: $4x + 6y = -5$; II: $3x + 6y = -3$
c) I: $3x - 2y = 4$; II: $2x = y$
d) I: $-6x - 5y = 9$; II: $5x + 2y = 12$

2.061
a) I: $-7x + 2y = -20$; II: $4x + 4y = 14$
b) I: $3x + 4y = -14$; II: $4x - 6y = -13$
c) I: $5x - 2y = -2$; II: $2x - 12y = 2$
d) I: $-7x - 8y = 12$; II: $-5x + 4y = 11$

2.062 Ordne den gegebenen Gleichungssystemen jeweils die Anzahl der Lösungen zu.

1	I: $x - y = 2$ II: $x - y = 2$	☐	A	keine Lösung
2	I: $x - y = 2$ II: $x - y = 4$	☐	B	genau eine Lösung
3	I: $x + y = 2$ II: $x - y = 4$	☐	C	unendlich viele Lösungen

2.063 Setze die Koeffizienten so ein, dass das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen hat.

a) I: $x + 2y = 4$
II: $\_\_\_x + \_\_\_y = 8$

b) I: $x - 2y = -5$
II: $\_\_\_x + \_\_\_y = 10$

c) I: $6x - 3y = 9$
II: $\_\_\_x + \_\_\_y = -3$

2.064 Setze so ein, dass das Gleichungssystem keine Lösung hat.

a) I: $\_\_\_x + 2y = 4$
II: $2x + \_\_\_y = \_\_\_$

b) I: $\_\_\_x - \_\_\_y = -5$
II: $-2x + 3y = \_\_\_$

c) I: $4x - \_\_\_y = \_\_\_$
II: $\_\_\_x + 2y = -3$

2.065 Auf eine Baustelle werden 57 Wagenladungen mit insgesamt 430 m^3 Beton geliefert. Die Zulieferfirmen verwenden zwei Arten von Betonmisch-LKWs, einen mit 6 m^3 und einen mit 10 m^3 Ladeinhalt. Wie oft wird die Baustelle mit jeder Art von Betonmisch-LKWs beliefert?

2.066 Ein gleichschenkliges Dreieck hat einen Umfang von 39 cm. Die Seitenlänge c ist um 25 % größer als die Seite a.
1) Wie lang sind die Seiten des Dreiecks?
2) Überprüfe anschließend, ob es sich um ein rechtwinkliges Dreieck handelt, wenn ein Schenkel um 3 cm verkürzt wird.

2.067 Ein Schüler hat fünfmal so viele Mitschüler wie Mitschülerinnen. Eine Schülerin aus der gleichen Klasse sagt: „Ich habe siebenmal so viele Mitschüler wie Mitschülerinnen."
Wie viele Schülerinnen und Schüler sind in dieser Klasse?

2.068 Eine Wand soll in einem hellen Grünton gestrichen werden. Dazu mischt man weiße und grüne Farbe im Volumenverhältnis 5 : 3. Die Wand hat eine Fläche von 30 m^2 und man benötigt 200 Milliliter Farbe pro Quadratmeter. Bettina hat ausreichend weiße Farbe zuhause. Sie kauft drei Liter grüne Farbe. Reicht das aus?

Aufgaben 2.069 – 2.071: Bringe die Gleichungen jeweils auf die Form $a \cdot x + b \cdot y = c$ und löse anschließend das Gleichungssystem mit einer Methode deiner Wahl.

2.069 **a)** I: $5x - (3 - y) = 2x - (2 - 3y)$
II: $4x - (2y + 4) = 2y - (3x - 1)$

b) I: $5x - (7 - 3x - 3y) = 3x - (6 - 2x - 5y)$
II: $2x - (5y + 6 - x) = 5 - (2x + 2y + 10)$

2.070 **a)** I: $4 \cdot (4x - 3) + 3 \cdot (4y - 5) = 73$
II: $4 \cdot (x + 5) - 5 \cdot (4y - 8) = 16$

b) I: $2 \cdot (x - 5) + 3 \cdot (y - 2) = 9 - 2 \cdot (y - 2)$
II: $4 \cdot (x + 3) - 2 \cdot (y - 3) = 31 - 3 \cdot (x + 3)$

2.071 I: $4 \cdot (x - 2) - 5 \cdot (y + 3) = 2 \cdot (x - 3) - 2 \cdot (y + 5)$
II: $7 \cdot (x + 3) - 2 \cdot (2y + 5) = 2 \cdot (x + 7) + 3 \cdot (y + 5)$

2.072 Für die Neuanschaffung einer Maschine wird ein Kredit in der Höhe von 200 000,00 € aufgenommen. Der Betrag wird auf zwei Banken aufgeteilt, wobei Bank A Kreditzinsen von 6 % und Bank B von 8 % verlangt. Die gesamten Jahreszinsen betragen 13 600,00 € bei jährlicher Abrechnung und ohne Berücksichtigung bereits zurückgezahlter Beträge. Wie viel Geld wurde bei Bank A bzw. bei Bank B ausgeliehen?

2.073 Chiara und Mara erhalten bei einer Mathematikhausübung unterschiedliche Ergebnisse. Überprüfe beide Berechnungen und korrigiere gegebenenfalls Fehler.
Chiara hat folgendermaßen gerechnet:

$$\begin{array}{ll} \text{I: } 4x + 3y = 5 & |\cdot(-3) \\ \underline{\text{II: } 3x - 2y = 8} & |\cdot 4 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{I: } -12x - 9y = 5 \\ \underline{\text{II: } \quad 12x - 8y = 8} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} \text{I + II: } -17y = 13 \\ y = -\frac{13}{17} \end{array}$$

$$y \text{ in II: } 3x - 2\cdot\left(-\frac{13}{17}\right) = 8 \quad |\cdot 17 \quad \Rightarrow \quad 51x + 26 = 136 \quad \Rightarrow \quad 51x = 110 \Rightarrow x = \frac{110}{51}$$

Mara hat folgendermaßen gerechnet:

$$\begin{array}{ll} \text{I: } 4x + 3y = 5 & |\cdot 2 \\ \underline{\text{II: } 3x - 2y = 8} & |\cdot 3 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{I: } 8x + 6y = 10 \\ \underline{\text{II: } 9x - 6y = 24} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} \text{I + II: } 17x = 34 \\ x = 2 \end{array}$$

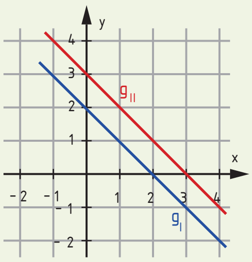
$$x \text{ in I: } 4\cdot 2 + 3y = 5 \Rightarrow 3y = -3 \Rightarrow y = -1$$

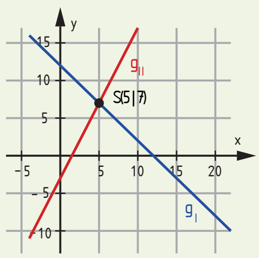
ZUSAMMENFASSUNG

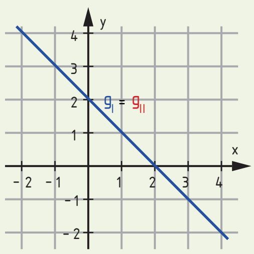
Allgemeine Form eines linearen Gleichungssystems mit zwei Variablen

$$\begin{array}{ll} \text{I: } a_1 \cdot x + b_1 \cdot y = c_1 & a_1, a_2, b_1, b_2 \ldots \text{ Koeffizienten} \\ \underline{\text{II: } a_2 \cdot x + b_2 \cdot y = c_2} & c_1, c_2 \ldots \text{ Konstanten} \qquad (a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}) \end{array}$$

Lösung eines linearen Gleichungssystems sind jene Zahlenpaare, die beide Gleichungen erfüllen.
Es kann **keine** Lösung, genau **eine** Lösung oder **unendlich viele** Lösungen geben.



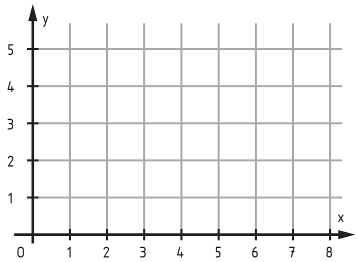
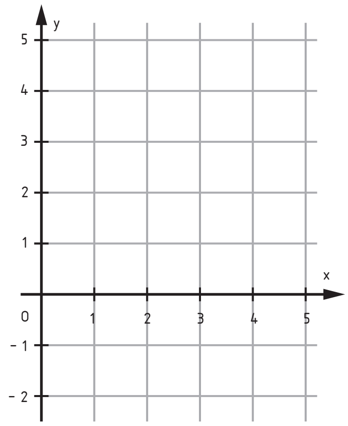




Lösungsverfahren

- Grafisches Lösungsverfahren: Die Lösung entspricht dem Schnittpunkt der entsprechenden Geraden.
- Gleichsetzungsverfahren: Beide Gleichungen werden nach derselben Variablen umgeformt und anschließend die so ermittelten Terme gleichgesetzt.
- Einsetzungsverfahren: Eine Gleichung wird nach einer Variablen umgeformt und der so ermittelte Term wird in die andere Gleichung eingesetzt.
- Eliminationsverfahren: Die Gleichungen werden so multipliziert, dass die Koeffizienten einer Variablen Gegenzahlen oder gleich sind. Anschließend werden die Gleichungen addiert bzw. subtrahiert.

Wissens-Check

		gelöst
1	Stelle die Lösungen von $x + 2y = 8$ grafisch dar. 	
2	Wie viele Lösungen hat dieses Gleichungssystem? A) I: $3x + 4y = 2$ II: $6x + 8y = 4$ B) I: $3x + 4y = 2$ II: $6x + 8y = 5$	
3	Löse das Gleichungssystem grafisch. I: $y = 2x - 2$ II: $y = -1{,}5x + 5$ S(____|____) x = ____, y = ____ 	
4	Welches Lösungsverfahren ist am besten geeignet? A) I: $y = 3x - 1$ II: $2x - y = 4$ B) I: $3a + 2b = 5$ II: $a - 2b = 3$ C) I: $y = 0{,}5x + 2$ II: $y = 0{,}75x - 8$	
5	In einem Zug gibt es Sitzgruppen für 2 Personen und für 4 Personen. Insgesamt gibt es 64 Sitzplätze. Die Anzahl der 4er-Sitzgruppen ist um 8 geringer als die Anzahl der 2er-Sitzgruppen. Stelle ein Gleichungssystem auf, um die Anzahl der 2er-Sitzgruppen und der 4er-Sitzgruppen zu ermitteln. I: ________ x … Anzahl der 2er-Sitzgruppen II: ________ y … Anzahl der 4er-Sitzgruppen	

Lösungen:
1) Die Gerade $y = -\frac{1}{2} \cdot x + 4$ einzeichnen. 2) A) unendlich viele Lösungen; B) keine Lösung 3) $x = 2$, $y = 2$
4) A) Einsetzverfahren, B) Additionsverfahren, C) Gleichsetzungsverfahren 5) I: $2x + 4y = 64$
II: $x - y = 8$

Mathematik mit praktischen Anwendungen $^2/_3$

Die Reihe Mathematik mit praktischen Anwendungen bietet viele schwierigkeitsgestufte Aufgaben und Übungen und ist zugleich Lehr- und Arbeitsbuch.
Die vielen praxisorientierten Übungen motivieren Schüler und Schülerinnen und erleichtern den Zugang zu Mathematik.

- Gut verständliche Theorie
- Durchgerechnete Musteraufgaben
- Kompetenzorientierte Arbeitsaufträge
- Zahlreiche Übungen und Beispiele
- Kompakte Zusammenfassung der wesentlichen Kapitelinhalte
- Wissens-Checks mit Lösungen zur Selbstkontrolle
- Lösungen liegen bei

www.hpt.at

Mathematik mit praktischen Anwendungen Bd. $^2/_3$

SBNR Buch + E-Book: 225432
SBNR E-Book Solo: 225434
SBNR Ruch mit E-BOOK+: 225433
SBNR E-BOOK+ Solo: 225435
ISBN: 978-3-230-05620-7
Wien, 1. Auflage

Alle Drucke der 1. Auflage können im Unterricht nebeneinander verwendet werden.

9 783230 056207