4 Rechnen mit Zahlen

Lernziel in diesem Kapitel
Rechnen in $\mathbb{N}$ (ggT und kgV)
Rechnen in $\mathbb{Z}$
Rechnen in $\mathbb{Q}$ (Bruchrechnen)

4.1 Rechnen in $\mathbb{N}$

Wir addieren → **Addition** $8 + 3 = 11$ Summand Summand Summe	Wir multiplizieren → **Multiplikation** $8 \cdot 3 = 24$ Faktor Faktor Produkt
Wir **potenzieren** Basis^{Exponent} = Potenzwert $2^3 = 8$ Exponent, Basis, Potenz; Potenzwert	**Die Rechenreihenfolge:** „**Klammer** vor **Potenz** vor **Punkt** vor **Strich**“ (KlaPoPuStri-Regel) Beispiel: $(2 + 4) \cdot 7 + 5 \cdot 2^3 = 6 \cdot 7 + 5 \cdot 8 = 42 + 40 = 82$

Die Menge der natürlichen Zahlen ist gegenüber den obigen Rechenarten abgeschlossen.
Addiert man 2 natürliche Zahlen, so ergibt die **Summe** wieder eine natürliche Zahl.
$100 \in \mathbb{N}$; $23 \in \mathbb{N} \rightarrow 100 + 23 = 123 \in \mathbb{N}$
Multipliziert man 2 natürliche Zahlen, so ergibt das **Produkt** wieder eine natürliche Zahl.
$100 \in \mathbb{N}$; $23 \in \mathbb{N} \rightarrow 100 \cdot 23 = 2\,300$; $2\,300 \in \mathbb{N}$
Potenziert man natürliche Zahlen mit Exponenten aus $\mathbb{N}$, ergibt die Potenz wieder eine natürliche Zahl. $23 \in \mathbb{N}$; $2 \in \mathbb{N} \rightarrow 23^2 = 529 \in \mathbb{N}$

Eigenschaften der Rechenarten
Addition und Multiplikation sind **kommutativ**, die Summanden bzw. die Faktoren können vertauscht werden: $100 + 23 = 23 + 100$ bzw. $100 \cdot 23 = 23 \cdot 100$
Addition und Multiplikation sind **assoziativ**, man kann innerhalb der gleichen Rechenart beliebig Klammern setzen:
$2 + 3 + 4 = (2 + 3) + 4 = 2 + (3 + 4)$ bzw. $2 \cdot 3 \cdot 4 = (2 \cdot 3) \cdot 4 = 2 \cdot (3 \cdot 4)$
Es gilt das **Distributivgesetz**: $2 \cdot (3 + 4) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4$

4.1 a) Erkläre die Rechenreihenfolge für: $20 + 3 \cdot (5^2 + 2) + 4 \cdot 7$!
Berechne das Ergebnis!

b) Zeige die Gültigkeit des Distributivgesetzes, des Kommutativgesetzes der Multiplikation und des Kommutativgesetzes der Addition für $4 \cdot (2^2 + 10)$!

Lösung:
a) Die Potenz in der Klammer zuerst behandeln, dann in der Klammer addieren, anschließend beide Produkte bilden und schließlich die Teilergebnisse addieren.
$20 + 3 \cdot (5^2 + 2) + 4 \cdot 7 = 20 + 3 \cdot 27 + 4 \cdot 7 = 20 + 81 + 28 = 129$

b) Berechnung nach der Rechenreihenfolge: $4 \cdot 14 = 56$
Distributivgesetz: $4 \cdot 2^2 + 4 \cdot 10 = 56$
Kommutativgesetz der Multiplikation: $14 \cdot 4 = 4 \cdot 14 = 56$
Kommutativgesetz der Addition: $40 + 16 = 16 + 40 = 56$

© www.hpt.at, 2019

4.2 Erkläre die Rechenreihenfolge für die folgenden Rechnungen in $\mathbb{N}$!
Berechne das Ergebnis ohne Taschenrechner!

a) $5 \cdot (3 \cdot 4) + 2 \cdot (7 + 4) + 2^3$
b) $7 + (3 + 3^2) \cdot 2 + 6 \cdot 7 \cdot 2$
c) $(12 + 2^2 \cdot 3) + 24$
d) $25 \cdot 3 + 25 + 3$
e) $5 \cdot (3 + 5) \cdot 2$
f) $(6 + 4 + 8) \cdot (2 + 4 + 6)$
g) $(7 + 3 + 9) + (3 + 4) \cdot 12$
h) $4 + (2 \cdot 4 + (3 + 5) \cdot 2)$

4.3 Anna gibt die Angabe der Rechnung in den Taschenrechner ein.
Berta rechnet ohne Taschenrechner und erhält ein anderes Ergebnis.
Beurteile, welche Rechnung richtig gelöst wurde!
Wo liegt der Fehler?

a) $(5 + 12 + 3 \cdot 5) + 22 \cdot (3 + 8)$

Anna

1	5+12+3*5+2^2*3+8
	→ **52**

Berta erhält 76.

b) $3 \cdot (6 + (2 + 1)^2) + 15$

Anna

2	3*(6+3^2)+15
	→ **60**

Berta erhält 36.

c) $(2 + 3^2 + 1)^2 + 3 \cdot 2 \cdot (2^2 + 4)$

Anna

3	(2+9+1)^2+6*(4+4)
	→ **192**

Berta erhält 172.

4.4 Ordne der Lücke jeweils eine der Zahlen aus A bis G richtig zu!
Hinweis: Schätze die richtige Lösung durch Runden und überprüfe dann, ob sie stimmt.

145 + _____ = 753	
_____ + 142 · 2 = 648	
300 · _____ = 4 200	
223 · 2 + 458 = _____	
(120 + 3 · _____) · 2 = 276	
(3 + 7) · (4 + _____) = 250	
$(33 + 4^2) \cdot 2 + (24 + 5^2)$ = _____	

A	364
B	147
C	608
D	14
E	21
F	904
G	6

© www.hpt.at, 2019

4.2 Primfaktorenzerlegung, ggT und kgV

Alle natürlichen Zahlen kann man in **Faktoren von Primzahlen** zerlegen, zB $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$.

Die Primfaktorenzerlegung macht man am einfachsten nach folgendem Schema:

36	2
18	2
9	3
3	3
1	

Man beginnt mit der kleinsten Primzahl 2 und dividiert.
Ist in der neuen Zahl 2 nicht mehr enthalten, dann dividiert man mit der nächsthöheren Primzahl 3 usw.
Am Ende muss sich die Zahl 1 ergeben.
$36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$ oder kurz $2^2 \cdot 3^2$.

Für die Zerlegung sind die folgenden **Teilbarkeitsregeln** hilfreich:

Eine Zahl ist durch **2** teilbar, wenn sie gerade ist.

Eine Zahl ist durch **3** bzw. durch **9** teilbar, wenn ihre Ziffernsumme durch 3 bzw. durch 9 teilbar ist.

Eine Zahl kann durch **4** geteilt werden, wenn ihr zweistelliges Ende durch 4 teilbar ist oder die Endziffern 00 hat.

Eine Zahl kann durch **5** geteilt werden, wenn die Einerstelle 5 oder 0 ist.

Eine Zahl kann durch **25** geteilt werden, wenn ihr zweistelliges Ende durch 25 teilbar ist oder die Endziffern 00 hat.

Der größte gemeinsame Teiler (ggT) von zwei Zahlen
ist die größte Zahl, durch die beide Zahlen teilbar sind. Man erhält den ggT, indem man das Produkt der gemeinsamen Primfaktoren bildet. Gibt es keine gemeinsamen Primfaktoren, dann sind die beiden Zahlen **teilerfremd**.
ZB: $\text{ggT}(90, 54) = \text{ggT}(2 \cdot 3^2 \cdot 5;\ 2 \cdot 3^3)$, gemeinsam ist $2 \cdot 3^2 = 18$

Das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) von zwei Zahlen
ist die kleinste Zahl, die durch beide Zahlen teilbar ist. Man erhält das kgV, indem man alle vorkommenden Primzahlen in ihrer höchsten Potenz miteinander multipliziert.
ZB: $\text{kgV}(90, 54) = \text{kgV}(2 \cdot 3^2 \cdot 5;\ 2 \cdot 3^3) = 2 \cdot 3^3 \cdot 5 = 270$

4.5 a) Zerlege die Zahl 168 in Primfaktoren!

b) Bilde das kgV und den ggT von den Zahlen 308 und 294!

c) Eine Metallplatte ist 92 cm lang und 68 cm breit. Sie wird mit quadratischen Folien beklebt, die die Platte genau bedecken sollen.
Berechne die maximale Seitenlänge der Folien, mit der die Platte beklebt werden kann!

d) Vom Busterminal fährt alle 15 Minuten die Linie A ab und alle 12 Minuten startet die Linie D. Morgens um 6 Uhr fahren alle Busse vom Terminal weg.
Ermittle, wann A und D das nächste Mal wieder gemeinsam starten!

Lösung:

a)

168	2
84	2
42	2
21	3
7	7
1	

b) Primfaktorenzerlegung: $308 = 2^2 \cdot 7 \cdot 11$; $294 = 2 \cdot 3 \cdot 7^2$
$\text{ggT}(308, 294) = 2 \cdot 7 = 14$; $\text{kgV}(308, 294) = 2^2 \cdot 7^2 \cdot 3 \cdot 11 = 6\,468$

c) $\text{ggT}(92, 68) = 4$
Quadrate mit maximal 4 cm passen genau auf die Metallplatte.

d) $\text{kgV}(12, 15) = 60$
Jede volle Stunde starten sie gemeinsam vom Terminal.

 © www.hpt.at, 2019

4.6 Kreuze an, ob die Aussage richtig oder falsch ist!
Begründe deine Auswahl durch Berechnung!

	richtig	falsch
137 ist eine Primzahl.		
93 ist keine Primzahl.		
1 644 ist durch 3 und durch 9 teilbar.		
14 046 ist durch 6 und durch 12 teilbar.		
19 745 ist durch 5 und durch 15 teilbar.		
Die Summe von 3 aufeinander folgenden natürlichen Zahlen ist durch 3 teilbar.		
Die Summe von 4 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist durch 2 teilbar.		
Eine 3-stellige Zahl, deren Ziffern Primzahlen sind, ist durch alle diese Primzahlen teilbar.		

4.7 Berechne:
a) ggT(246, 912, 789) **b)** ggT(753, 560, 222)
c) ggT(26, 338, 2 197) **d)** ggT(492, 501, 191)

4.8 In einer Lagerhalle befinden sich übrig gebliebene Holzschienen, die in gleich lange Teilstücke geschnitten werden sollen.
Die Länge und die Anzahl der vorhandenen Schienen ist in der Tabelle wiedergegeben:

Länge in Zentimeter (cm)	111	148	185	222	259
Anzahl	4	10	13	16	5

Berechne die günstigste Länge für das Zuschneiden der Bretter!
Berechne, wie viele gleich lange Teilschienen man durch das Schneiden gewinnen kann!

4.9 Berechne:
a) kgV(10, 12) **b)** kgV(26, 46) **c)** kgV(8, 16)
d) kgV(308, 1 470) **e)** kgV(24, 90,120) **f)** kgV(6, 15, 21)

4.10 In einer Musikkapelle proben die Blasmusiker alle 2 Tage, die Querflötistinnen alle 6 Tage und die Musiker mit Schlaginstrumenten alle 5 Tage.
Berechne, wann sich alle zu einer gemeinsamen Probe treffen können!

4.11 Die Produktion eines bestimmten Guts durchläuft 3 Maschinen. Maschine M_1 muss alle 6 Tage gewartet werden, Maschine M_2 alle 16 Tage und Maschine M_3 alle 40 Tage. Berechne, in welchem zeitlichen Abstand alle drei Maschinen gleichzeitig gewartet werden können!

4.12 Es wird behauptet, dass für <u>zwei</u> Zahlen (a und $b \in \mathbb{N} \neq 0$) die folgende praktische Beziehung gilt: $\mathrm{ggT}(a, b) \cdot \mathrm{kgV}(a, b) = a \cdot b$
Überprüfe diese Regel mithilfe der beiden Zahlen a = 24 und b = 180!

4.3 Rechnen in $\mathbb{Z}$

Wir subtrahieren → **Subtraktion**

Die **Subtraktion** kann in $\mathbb{Z}$ auch dann ausgeführt werden, wenn der Minuend kleiner als der Subtrahend ist. Das Ergebnis ist eine negative Zahl.

$$\underbrace{8}_{\text{Minuend}} - \underbrace{3}_{\text{Subtrahend}} = \underbrace{5}_{\text{Differenz}}$$

In der Menge $\mathbb{Z}$ können die Addition, die Multiplikation und die Subtraktion uneingeschränkt ausgeführt werden. Allerdings sind dabei die folgenden Regeln zu beachten:

Vorzeichenregeln:
Zwei gleiche Vorzeichen vor einer Zahl werden durch ein Pluszeichen, zwei verschiedene durch ein Minuszeichen ersetzt:

$a + (+b) = a + b$ $\qquad$ $a + (-b) = a - b$
$a - (-b) = a + b$ $\qquad$ $a - (+b) = a - b$

Bei der Multiplikation (bzw. Division) zweier Zahlen mit gleichen Vorzeichen erhält man eine positive Zahl, bei zwei verschiedenen Vorzeichen eine negative Zahl.
Daher gilt für negative Zahlen, dass das Potenzieren mit geraden Hochzahlen immer eine positive Zahl ergibt, das Potenzieren mit ungeraden Zahlen dagegen eine negative Zahl.

$(+a) \cdot (+b) = +(a \cdot b)$ $\qquad$ $(+a) \cdot (-b) = -(a \cdot b)$ $\qquad$ $(+a)^2 = +a^2$ $\qquad$ $(+a)^3 = +a^3$
$(-a) \cdot (-b) = +(a \cdot b)$ $\qquad$ $(-a) \cdot (+b) = -(a \cdot b)$ $\qquad$ $(-a)^2 = +a^2$ $\qquad$ $(-a)^3 = -a^3$

Klammerauflösungsregeln:
Steht vor der Klammer ein **Plus**, so kann die Klammer weggelassen werden.
Steht vor der Klammer ein **Minus**, so kehrt man beim Weglassen der Klammer die Vorzeichen um, die in der Klammer waren.

$a + (-b + c - d) = a - b + c - d$ $\qquad$ $a - (-b + c - d) = a + b - c + d$

4.13 Rechne unter Beachtung der Rechenreihenfolge, der Vorzeichenregel und der Klammerauflösungsregel!
Dokumentiere die Rechenschritte!

a) $3 - 15 - 4 \cdot (2^2 - 7) - \sqrt{16}$ $\qquad$ **b)** $(3 \cdot 4^2 - (4 + \sqrt[3]{8})) \cdot (3^3 - 3 \cdot 4)$

Lösung:

a) $3 - 15 - 4 \cdot (2^2 - 7) - \sqrt{16} = \ldots$ Klammer und die Wurzel berechnen
$= 3 - 15 - 4 \cdot (-3) - 4 = \ldots$ Multiplikation mit Vorzeichenregel berechnen
$= 3 - 15 + 12 - 4 \ldots$ Addition mit Vorzeichenregel
$= -4$

b) $(3 \cdot 4^2 - (4 + \sqrt[3]{8})) \cdot (3^3 - 3 \cdot 4) = \ldots$ in beiden inneren Klammern die Potenzen und die Wurzeln berechnen:
$= (3 \cdot 16 - (4 + 2)) \cdot (27 - 3 \cdot 4) = \ldots$ die innere Klammer berechnen:
$= (3 \cdot 16 - 6) \cdot (27 - 3 \cdot 4) = \ldots$ die Klammern berechnen
$= 42 \cdot 15 = \ldots$ die Multiplikation ausführen
$= 630$

© www.hpt.at, 2019

4.14 Kreuze an, welche Aussage für $a - b$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$ richtig ist!
Begründe, warum die anderen falsch sind!

$a - b = b - a$, wenn $b = 0$	☐
$a - b < 0$, wenn $a > b$	☐
$a - b < 0$, wenn $a < 0$ und $b < 0$	☐
$a - b > 0$, wenn $a > 0$ und $b < 0$	☐
$a - b > 0$, wenn $a > 0$ und $b > 0$	☐

4.15 Argumentiere, welche der beiden vorgeschlagenen Rechenwege für die folgende Rechnung richtig ist: $400 - 2 \cdot (250 + 50) - 16 \cdot 20$

A:

Ich subtrahiere 2 von 400, multipliziere mit 250, addiere 50 und subtrahiere das Produkt von 16 mal 20.

B:

Ich rechne die Klammer aus, multipliziere sie mit 2 und addiere das Produkt von 20 mal 16. Das Ergebnis subtrahiere ich von 400.

Berechne die Zahl nach beiden Anweisungen!

4.16 Wende die Vorzeichenregeln und gegebenenfalls die Regel für das Auflösen von Klammern an! Beachte die Klammersetzung! Berechne das Ergebnis!
Überprüfe das Ergebnis mithilfe des Taschenrechners!

a) $[(+15) + (+6)] - [(+6) - (-9)]$
b) $[|-26| - (-3)] + [(+5) + (-7)]$
c) $[(-31) - (-25)] \cdot (-2) - [|-8| + (+3)]$
d) $[(-8) \cdot (-1) - (-6)] - [|-4| - (-2)]$
e) $[(-18) + (+3) - |-7|] - [(+5) \cdot (-5) - (-9)]$
f) $-(+2) \cdot [(+4) - (-5)] + [(-18) + (+8)]$

4.17 Setze jeweils ein Klammernpaar so, dass das angegebene Ergebnis stimmt!
a) $50 - 8 \cdot 2 + 9 = 93$
b) $3 \cdot 12 - 9 \cdot 3 - 4 \cdot 7 = 37$
c) $35 - 20 - 4 + 10 + 6 - 4 \cdot 3 = 7$
d) $5 \cdot 3^2 - 14 + 6 - 4^3 = 89$

4.18 Berechne und überprüfe das Ergebnis mithilfe des Taschenrechners!
a) $[(-1)^2 - (-2)^3] - [(-4)^2 - (-5)]$
b) $[(-2)^2 - (-2)^2] + [(-5)^2 - (-5)^3]$
c) $[(-2)^2 - (+5)^2 \cdot (-2)] \cdot [(-3) \cdot (-4) - (-5)^2]$
d) $[(-4)^2 + (-5)^2 \cdot (-2)^3] \cdot (-3)^2 \cdot (-4)$
e) $[(-10)^2 + (+7) \cdot (-2)^3] \cdot [(-2) \cdot (+5) - (-2)^4]$
f) $(-6)^2 \cdot (-2) \cdot [(+3)^2 \cdot (-2) - (-4)^2 \cdot (-1)^3]$

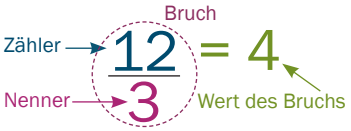
4.19 Berechne und überprüfe das Ergebnis mithilfe des Taschenrechners!
$\{[(+3) \cdot (-2)^3 - (-2)^2 \cdot (+3)] \cdot [(-5)^2 + (+3) \cdot (-2)^3]\} \cdot (-2)^3$

4.20 Im Winter wurde eine Temperatur von −19 °C gemessen.
Zum beheizten Zimmer besteht ein Temperaturunterschied von 42 °C.
Berechne, wie hoch die Zimmertemperatur war!

4.21 Der Kontostand von Karl beträgt 364 €.
Er erwartet Einzahlungen von 500 € und 89 € auf das Konto.
Die Auszahlungen betragen 36 €, 165 €, 204 €, 143 € und 66 €.
Berechne den neuen Kontostand!

© www.hpt.at, 2019

4.4 Der Wert eines Bruchs



Ein Bruch bezeichnet den Teil eines Ganzen.
Der Zähler „zählt“ die einzelnen Teile; der Nenner gibt an, wie oft geteilt wurde, ist daher niemals 0.

$\frac{12}{3}$ ... Das Ganze wird durch 3 geteilt, es gibt 12 Teile.

Unterscheide zwischen einem **echten Bruch** (**der Zähler ist kleiner als der Nenner**) und einem **unechten Bruch** (**der Zähler ist größer als der Nenner**).

$\frac{3}{4}$ ist ein echter Bruch, $\frac{4}{3}$ ist ein unechter Bruch.

Die Ordnung der Bruchzahlen

Der Wert des Bruchs $\frac{a}{b}$ ist größer als der Wert des Bruchs $\frac{c}{d}$, wenn $a \cdot d$ **größer** als $b \cdot c$ ist.

Der Wert des Bruchs $\frac{a}{b}$ ist kleiner als der Wert des Bruchs $\frac{c}{d}$, wenn $a \cdot d$ **kleiner** als $b \cdot c$ ist.

$\frac{3}{5} < \frac{4}{7}$ denn $3 \cdot 7 > 5 \cdot 4$; $\frac{2}{5} < \frac{4}{7}$ denn $2 \cdot 7 < 5 \cdot 4$

Kürzen eines Bruchs

Man kürzt einen Bruch, indem man den Zähler und den Nenner durch einen gemeinsamen Teiler (gT) bzw. den ggT von beiden dividiert.
Der Wert des Bruchs ändert sich dadurch nicht.

gT = 7 → $\frac{105:7}{140:7} = \frac{15}{20}$; gT = 5 → $\frac{105:5}{140:5} = \frac{21}{28}$; **ggT** = 35 → $\frac{105:35}{140:35} = \frac{3}{4}$

Erweitern eines Bruchs

Man erweitert einen Bruch, indem man Zähler und Nenner mit einer von 0 verschiedenen natürlichen Zahl multipliziert.
Der Wert des Bruchs ändert sich dadurch nicht.

$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 7} = \frac{21}{28}$

Gleichnamige Brüche

Brüche mit gleichem Nenner heißen gleichnamig.

$\frac{3}{18}$ ist gleichnamig zu $\frac{7}{18}$

Kehrwert eines Bruchs

Der Kehrwert eines Bruchs wird gebildet, indem man den Zähler und den Nenner vertauscht.

Der Kehrwert von $\frac{3}{4}$ ist $\frac{4}{3}$.

4.22 a) Ordne die folgenden Brüche der Größe nach.
$\frac{3}{2}, \frac{7}{8}, \frac{11}{4}, \frac{2}{3}$
Wie ist die Ordnung der Bruchkehrwerte?

b) Erweitere den Bruch auf den gegebenen Nenner: $\frac{5}{12} = \frac{\square}{96}$

c) Kürze den Bruch $\frac{88}{132}$ so weit wie möglich.

Lösung:

a) $\frac{2}{3} < \frac{7}{8} < \frac{3}{2} < \frac{11}{4}$

$\frac{3}{2} > \frac{8}{7} > \frac{2}{3} > \frac{4}{11}$

... Ordnung umgekehrt!

b) $\frac{5}{12} = \frac{5 \cdot 8}{96} = \frac{40}{96}$

c) ggT(88, 132) =
= 44 → $\frac{88}{132} = \frac{2}{3}$

© www.hpt.at, 2019

4.23 Ordne die Brüche aufsteigend der Größe nach!

a) $\frac{3}{4}, \frac{5}{7}, \frac{7}{8}$ b) $\frac{5}{12}, \frac{8}{15}, \frac{9}{20}$ c) $\frac{5}{6}, \frac{12}{13}, \frac{7}{15}$ d) $\frac{7}{9}, \frac{9}{12}, \frac{13}{6}$

4.24 Ergänze die fehlenden Zahlen in den Brüchen!
Erkläre, welche Rechenoperation durchgeführt wird!

a) $\frac{\square}{30} = \frac{110}{150}$ b) $\frac{55}{121} = \frac{\square}{11}$ c) $\frac{3}{\square} = \frac{48}{160}$ d) $\frac{270}{345} = \frac{18}{\square}$

4.25 Bringe die folgenden Brüche und anschließend deren Kehrwerte auf den kleinsten gemeinsamen Nenner (kgV)!
Gib jeweils die Zahl an, mit welcher der Bruch erweitert wird!

a) $\frac{4}{6}, \frac{5}{4}, \frac{2}{3}$ b) $\frac{2}{5}, \frac{5}{12}, \frac{7}{8}$ c) $\frac{3}{20}, \frac{6}{45}, \frac{4}{15}$ d) $\frac{6}{21}, \frac{2}{7}, \frac{3}{8}$

e) $\frac{5}{12}, \frac{11}{3}, \frac{2}{7}$ f) $\frac{25}{9}, 5, \frac{3}{8}$ g) $\frac{31}{2}, \frac{16}{7}, 2$ h) $\frac{16}{21}, \frac{2}{7}, \frac{13}{8}$

4.26 Kürze die folgenden Brüche mit dem ggT von Zähler und Nenner!

a) $\frac{121}{187}$ b) $\frac{264}{198}$ c) $\frac{3\,206}{1\,561}$ d) $\frac{304}{6\,351}$

e) $\frac{165}{55}$ f) $\frac{360}{45}$ g) $\frac{216}{132}$ h) $\frac{3\,051}{3\,429}$

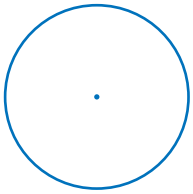
4.27 Finde den Bruch, der größenmäßig zwischen den gegebenen Brüchen steht!
Hinweis: Zum Auffinden des richtigen Bruchs, bringe die Brüche auf gleichen Nenner (kgV) und erweitere beide Brüche mit 2.

Muster: $\frac{1}{6} < \frac{\square}{\square} < \frac{2}{9}$; $\frac{3}{18} < \frac{\square}{\square} < \frac{4}{18}$; $\frac{6}{36} < \frac{7}{36} < \frac{8}{36}$

a) $\frac{2}{3} < \frac{\square}{\square} < \frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{4} < \frac{\square}{\square} < \frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{9} < \frac{\square}{\square} < \frac{4}{27}$

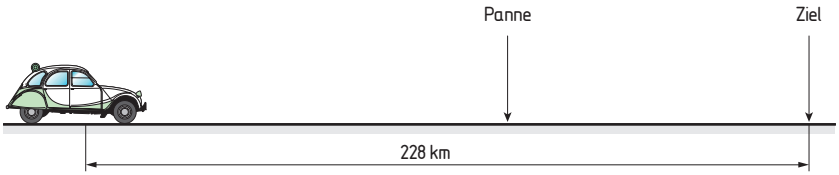
d) $\frac{1}{4} < \frac{\square}{\square} < \frac{5}{16}$ e) $\frac{1}{3} < \frac{\square}{\square} < \frac{1}{2}$ f) $\frac{1}{6} < \frac{\square}{\square} < \frac{2}{9}$

4.28 In einer Klasse wählen ein Viertel der Schülerinnen und Schüler Russisch, zwei Fünftel Französisch und ein Drittel Spanisch als 2. lebende Fremdsprache. Die restlichen wählen Italienisch.
Markiere die entsprechende Anteile im nebenliegenden Kreis!
Erkläre, wie du die richtige Größe der Sektoren findest!



4.29 3 Kilogramm Blaubeeren sollen auf 18 Schalen gerecht aufgeteilt werden.
Gib an, wie viel Gramm in einer Schale sind!

4.30 Paul muss mit dem Auto eine 228 km lange Strecke zurücklegen, um sein Ziel zu erreichen.
Er hat nach $\frac{7}{12}$ der Strecke eine Panne.
Berechne, wie viel Kilometer er noch zu fahren gehabt hätte!



© www.hpt.at, 2019

4.5 Addition und Subtraktion von Brüchen

Addition und Subtraktion von Brüchen

Man kann nur gleichnamige Brüche addieren oder subtrahieren!
Das bedeutet, dass man durch Erweitern oder Kürzen alle beteiligten Brüche auf einen **gemeinsamen Nenner** bringen muss. Dann können die Zähler addiert oder subtrahiert werden. Der gemeinsame Nenner wird beibehalten.
Der kleinste gemeinsame Nenner ist das **kgV** aller vorkommenden Nenner.

$\frac{3}{8} + \frac{2}{15} - \frac{5}{42}$

Wir suchen das kgV aller Nenner mithilfe der Primfaktorenzerlegung:

$8 = 2^3$; $15 = 3 \cdot 5$; $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \rightarrow \text{kgV}(8, 15, 42) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 840$

Die Brüche werden nun einzeln auf diesen gemeinsamen Nenner erweitert.

Die Faktoren, mit denen erweitert werden muss, findet man, indem man den gemeinsamen Nenner durch die jeweiligen Nenner dividiert:

$840 : 8 = 105$; $840 : 15 = 56$; $840 : 42 = 20$

$$\frac{3 \cdot 105}{8 \cdot 105} + \frac{2 \cdot 56}{15 \cdot 56} - \frac{5 \cdot 20}{42 \cdot 20} = \frac{315 + 112 - 100}{840} = \frac{327}{840}$$

Am Schluss kann man eventuell den Bruch noch kürzen.
Zähler und Nenner sind durch 3 teilbar, daher erhalten wir als Ergebnis $\frac{109}{280}$.

Der gemischte Bruch

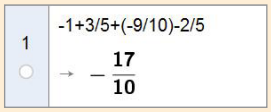
Darunter versteht man die **verkürzte Schreibweise der Addition** einer ganzen Zahl mit einem echten Bruch.

Empfehlung: Gemischte Brüche sollte man in Rechnungen möglichst vermeiden und sie schon vor dem Rechnen in unechte Brüche umwandeln.

$$5\frac{2}{3} = 5 + \frac{2}{3} = \frac{5 \cdot 3 + 2}{3} = \frac{17}{3}$$

3.26 a) Berechne: $-\left[\left(-\frac{3}{5}\right) + \left(-1\frac{2}{9}\right)\right] - \left(-\frac{11}{3}\right)$
Überprüfe anschließend das Ergebnis mithilfe des Taschenrechners!

b) Berechne: $-1\frac{3}{5} + \left[\left(-\frac{9}{10}\right) - \frac{2}{5}\right]$
Martin hat diese Angabe in den Rechner eingegeben.
Vergleiche das Ergebnis mit deinem Ergebnis!
Erkläre, wo ein Fehler aufgetreten ist!



Lösung:

a) Der gemeinsame Nenner ist 45. Die notwendigen Erweiterungen erfolgen mit 9, 5, 15.
Zu beachten ist der gemischte Bruch $1\frac{2}{9} = \frac{11}{9}$.
$-\left[\left(-\frac{3}{5}\right) + \left(-1\frac{2}{9}\right)\right] - \left(-\frac{11}{3}\right) = \frac{3 \cdot 9}{45} + \frac{11 \cdot 5}{45} + \frac{11 \cdot 15}{45} = \frac{247}{45}$

b) $-\frac{8}{5} - \frac{9}{10} - \frac{2}{5} = \frac{-8 \cdot 2 - 9 - 2 \cdot 2}{10} = -\frac{29}{10}$
Der Fehler liegt bei der Rechnereingabe des gemischten Bruchs $-1\frac{3}{5} = -1 - \frac{3}{5}$.

 © www.hpt.at, 2019

4.32 Addiere und subtrahiere die Brüche! Kürze das Ergebnis so weit wie möglich!

a) $\frac{2}{8} + \frac{1}{2}$ b) $\frac{3}{4} - \frac{2}{3}$ c) $\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{5}\right) - \frac{4}{9}$ d) $\frac{8}{9} - \left(\frac{5}{6} - \frac{4}{5}\right)$

e) $\frac{3}{8} - \frac{5}{2}$ f) $\frac{4}{3} + 1\frac{1}{3}$ g) $-\left(\frac{3}{4} + \frac{5}{3}\right) + \frac{-4}{9}$ h) $\frac{10}{19} - \left(\frac{15}{16} + \frac{14}{15}\right)$

4.33 Addiere und subtrahiere die Brüche! Kürze das Ergebnis so weit wie möglich!
Überprüfe dein Ergebnis durch eine sorgfältige Eingabe in den Taschenrechner!

a) $-3\frac{1}{3} - \left(-\frac{11}{12} - 1\frac{1}{4}\right)$ b) $-\frac{1}{22} + \left(-\frac{3}{33} - 1\frac{4}{11}\right)$

c) $-\left(3\frac{4}{15} - 4\frac{5}{6}\right) + \left(-16\frac{1}{5} + 24\frac{3}{10}\right)$ d) $-7\frac{1}{2} - \frac{1}{24} + \left(4\frac{3}{8} - \left(-3\frac{1}{6}\right)\right)$

e) $4\frac{1}{2} + 3\frac{1}{3} - \frac{3}{4} - \frac{7}{8}$ f) $1\frac{1}{2} + 6\frac{1}{4} + 1\frac{2}{3}$

4.34 Addiere und subtrahiere die Brüche! Kürze das Ergebnis so weit wie möglich!
Überprüfe dein Ergebnis durch eine sorgfältige Eingabe in den Taschenrechner!

a) $-\left(\frac{7}{8} - \frac{3}{4}\right) + \left[\left(-\frac{7}{8}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)\right]$ b) $-\left[-\left(\frac{5}{6} + \frac{11}{12}\right) + \left(2\frac{1}{4} - 1\frac{5}{6}\right)\right] - \left(3\frac{2}{3} - 1\frac{1}{2}\right)$

c) $4\frac{1}{8} - \left[1 - \left(2\frac{1}{2} - \frac{7}{12} - \frac{1}{4}\right)\right]$ d) $-\left(-4\frac{1}{6} + 3\frac{1}{4}\right) + \left[2\frac{3}{8} + \frac{15}{48} - \left(\frac{11}{6} + 2\frac{5}{6}\right)\right]$

e) $\left(\frac{4}{5} + 3\frac{1}{3} + \frac{4}{5}\right) - \left(4\frac{1}{4} + 5 + 1\frac{2}{3}\right)$ f) $\left(6\frac{1}{9} + 6\frac{2}{3}\right) - \left(-3\frac{3}{8} + \frac{4}{5}\right)$

4.35 Vervollständige das magische Quadrat, in dem die Summen aller Brüche in der Diagonale gleich der Summe der Spalten und gleich der Summe der Zeilen ist!

a)

		$3\frac{2}{3}$
4	$4\frac{2}{3}$	
$5\frac{2}{3}$		

b)

$2\frac{9}{10}$		$4\frac{3}{5}$
	$3\frac{11}{20}$	
$3\frac{1}{2}$		

c)

$\frac{7}{6}$		$1\frac{1}{2}$
	$2\frac{5}{12}$	
		$1\frac{2}{3}$

d)

$1\frac{2}{3}$		2
	$2\frac{1}{3}$	
		$3\frac{2}{3}$

4.6 Multiplikation und Division von Brüchen

Multiplikation von Brüchen

Brüche werden multipliziert, indem man jeweils die Zähler und die Nenner multipliziert. Die Brüche müssen nicht auf gleichen Nenner gebracht werden! $\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{15}$

Division von Brüchen

Man führt die Division auf eine Multiplikation mit dem **Kehrwert** zurück,
zB: $3 : \frac{1}{2}$ bedeutet die Frage, wie oft ein halber Teil in 3 Ganzen enthalten ist.
Es sind doppelt so viele halbe Teile enthalten, also $3 \cdot 2 = 6$. 2 ist der Kehrwert von $\frac{1}{2}$.

Brüche werden dividiert, indem man den Dividenden mit dem Kehrwert des Divisors multipliziert. (Merkregel: „1. Bruch mal Kehrwert des 2. Bruchs“) $\frac{7}{3} : \frac{5}{9} = \frac{7}{3} \cdot \frac{5}{9} = \frac{63}{15} = \frac{21}{5}$

Doppelbrüche

Der Bruchstrich kann als Divisionszeichen verstanden werden. Daher kann jeder Doppelbruch als Division von 2 Brüchen interpretiert werden. $\frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{8}} = \frac{2}{5} : \frac{3}{8} = \frac{2}{5} \cdot \frac{8}{3} = \frac{16}{15}$

Empfehlung: Auf die Schreibweise mit Doppelbrüchen sollte man möglichst verzichten und Doppelbrüche entweder als Division von 2 Brüchen auflösen oder die nebenstehende Regel anwenden:

außen innen $\frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{8}} = \frac{2}{5} : \frac{3}{8} = \frac{\text{Produkt der Außenglieder}}{\text{Produkt der Innenglieder}}$

4.36 a) Berechne und dokumentiere den Rechenweg: $\frac{\frac{4}{3} : 3}{12 : \frac{16}{3}}$

b) Beim Tapezieren hat Simon bereits $\frac{3}{5}$ des Raumes mit $6\frac{1}{2}$ Rollen Tapete ausgekleidet.
Berechne, wie viele Rollen Tapete er voraussichtlich noch braucht!

c) Berechne: $\left[\frac{7}{24} + \frac{1}{3} - \frac{5}{6} \cdot \left(-\frac{3}{8} + \frac{9}{12}\right)\right] : \frac{10}{48}$.
Versetze die Klammern beliebig, berechne die entstandene Angabe neu!
Überprüfe mit dem Taschenrechner!

Lösung:

a) Doppelbruch auflösen: $\left(\frac{4}{3} : 3\right) : \left(12 : \frac{16}{3}\right)$
Divisionen in den Klammern berechnen: $\left(\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{3}\right) : \left(\frac{12}{1} \cdot \frac{3}{16}\right) = \frac{4}{9} : \frac{36}{16} = \frac{4 \cdot 16}{9 \cdot 36}$
Kürzen durch 4 und multiplizieren: $\frac{16}{81}$

b) Rechenansatz: Es werden noch $\frac{2}{5}$ des Raumes tapeziert. Daher: $\frac{13}{2} : \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{13}{2} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{2}{5}$.
Kürzen durch 2 und durch 5 $\rightarrow \frac{13}{2} = 4\frac{1}{3}$
Simon benötigt noch 4 Rollen und ein Drittel einer fünften Rolle.

c) $\left[\frac{7}{24} + \frac{1}{3} - \frac{5}{6} \cdot \left(-\frac{3}{8} + \frac{9}{12}\right)\right] : \frac{10}{48} = \left[\frac{15}{24} - \frac{5}{6} \cdot \frac{9}{24}\right] \cdot \frac{24}{5} = \left[\frac{30}{48} - \frac{15}{48}\right] \cdot \frac{24}{5} = \frac{15}{48} \cdot \frac{24}{5} = \frac{3}{2}$
Klammern anders setzen (Es gibt viele Möglichkeiten!):
$\left[\frac{7}{24} + \left(\frac{1}{3} - \frac{5}{6}\right) \cdot \left(-\frac{3}{8}\right) + \frac{9}{12}\right] : \frac{10}{48} = \frac{59}{10}$ oder: $\left(\frac{7}{24} + \frac{1}{3} - \frac{5}{6}\right) \cdot \left[\left(-\frac{3}{8}\right) + \frac{9}{12}\right) : \frac{10}{48}\right] = -\frac{3}{8}$ usw.
Arbeitet zu zweit und überlegt euch weitere Klammerversetzungen.

© www.hpt.at, 2019

4.37 Berechne schrittweise die folgenden Multiplikationen und Divisionen von Brüchen! Überprüfe das Ergebnis mithilfe des Taschenrechners!

a) $2 \cdot \frac{3}{8}$ b) $4 \cdot \frac{3}{72}$ c) $\frac{3}{84} \cdot 14$ d) $\frac{5}{14} \cdot \frac{49}{20} \cdot \frac{8}{30}$ e) $4 : 1\frac{1}{3}$

f) $1\frac{3}{5} : \frac{2}{3}$ g) $\frac{20}{11} : \frac{35}{22}$ h) $\frac{13}{21} : \frac{26}{48}$ i) $\frac{35}{3} : \frac{7}{6}$ j) $\frac{3}{20} : \frac{12}{10} \cdot \frac{16}{7}$

4.38 Berechne schrittweise die angegebenen Grundrechnungsarten mit Brüchen! Versetze die Klammern beliebig und berechne die dadurch entstandene Angabe neu!
Überprüfe die Ergebnisse mithilfe des Taschenrechners!

a) $\left(\frac{6}{24} + \frac{5}{20}\right) : \frac{27}{30} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{2} + 3$

b) $-6 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 4\frac{1}{2} : (-2) + 2{,}4$

c) $\left[2\frac{3}{4} - \frac{1}{4} : \left(\frac{7}{12} - \frac{5}{8}\right)\right] \cdot 1\frac{3}{5} + \frac{2}{5}$

d) $\left(\frac{3}{7} \cdot \frac{22}{6}\right) \cdot \left(\frac{13}{14} - \frac{7}{8}\right) - \left(\frac{3}{4} \cdot 4 + \frac{1}{3} \cdot 9\right) : \frac{1}{4}$

e) $\left(\frac{23}{5} + \frac{73}{20}\right) + \left(\frac{13}{4} - \frac{27}{6}\right) : \frac{35}{12} - 4$

f) $\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{5}\right) \cdot \left(-\frac{4}{9}\right) - \frac{8}{9} - \left(\frac{5}{6} - \frac{4}{5}\right) \cdot 3$

4.39 Berechne schrittweise die angegebenen Grundrechnungsarten mit Brüchen! Überprüfe das Ergebnis mithilfe des Taschenrechners!

a) $\dfrac{\frac{4}{3} \cdot \left(\frac{4}{3} - \frac{4}{3}\right)^2}{\frac{1}{24}}$ b) $2 - \dfrac{\frac{7}{6} \cdot \frac{1}{4} - \left(-\frac{2}{3}\right)^2}{\frac{1}{4} - 1}$ c) $\dfrac{\frac{7}{2} \cdot \frac{4}{21} + \left(-\frac{5}{3}\right) \cdot \frac{4}{27}}{\frac{3}{4} - \frac{1}{7}}$

4.40 Für ein Zimmer benötigt man zum Ausmalen 15 Liter Farbe. Die Wände werden in unterschiedlichen Farbtönen gehalten:

$\frac{1}{5}$ hellgelb, $\frac{5}{12}$ hellblau, $\frac{2}{15}$ rot, der Rest weiß.

Dokumentiere deine Vorgangsweise für die Berechnung des Bedarfs an der weißen Farbe! Berechne den jeweiligen Bedarf an den einzelnen Farben!

4.41 Im Versandhandel werden 4 kg Honig um 32 € angeboten.
Der Supermarkt bietet 400 g um 3 €.
Im Hofladen beim Bauern kosten 500 g 2,80 €.
Berechne den jeweiligen Preis für 100 g!

4.42 In einer Kellerei wurden 430 Flaschen zu je 7 Zehntel Liter gefüllt.
Berechne, wie viele 2-Liter-Flaschen („Doppler“) man stattdessen hätte befüllen können!

4.43 Eine Sportveranstaltung bietet Wettkämpfe mit

3 Einheiten zu je $\frac{11}{12}$ Stunden.

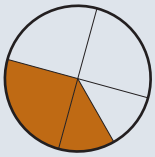
Unterbrochen werden die Wettkämpfe durch 2 Pausen zu je $\frac{3}{4}$ Stunden.
Die Veranstaltung beginnt um 13 Uhr.
Berechne mithilfe eines Rechenansatzes, um wie viel Uhr die Veranstaltung endet!

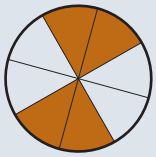
Wissens-*Check*

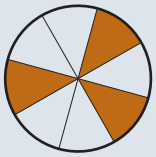
Bearbeite die Aufgaben! Begründe jeweils deine Auswahl!

1 Kreuze an, welche der Grafiken den Bruch $\frac{3}{8}$ richtig darstellen! (Mehrfachauswahl)

A ☐

B ☐ 

C ☐ 

D ☐ 

Stelle die markierten Flächen in den nicht passenden Grafiken durch einen Bruch dar! Kürze, falls dies möglich ist!

2 Ergänze die fehlenden Zahlen A bis D in den Brüchen!

$\frac{A}{5} = \frac{240}{300}$ $\quad \frac{60}{132} = \frac{B}{11}$ $\quad \frac{3}{C} = \frac{96}{160}$ $\quad \frac{135}{330} = \frac{9}{D}$

A	B	C	D

3 Ordne den beiden gekürzten Brüchen jeweils den richtigen Bruch aus A bis D zu! Schreibe den Buchstaben jeweils in das vorgesehene leere Feld!

$\frac{3}{4}$	
$\frac{1}{8}$	

A	$\frac{30}{75}$
B	$\frac{24}{192}$
C	$\frac{45}{60}$
D	$\frac{24}{36}$

4 Ordne den Brüchen jeweils den richtig gekürzten Bruch aus A bis F zu! Schreibe den Buchstaben jeweils in das vorgesehene leere Feld!

$\frac{68}{289}$	
$\frac{375}{435}$	
$\frac{1134}{84}$	
$\frac{2688}{896}$	

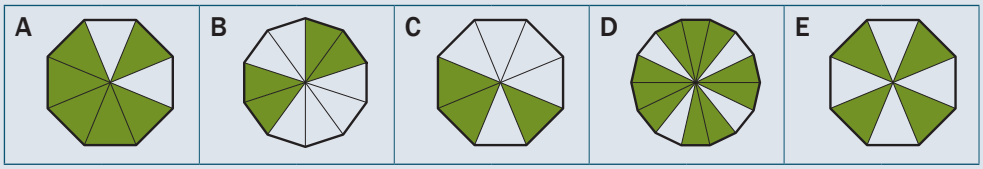
A	$\frac{4}{15}$
B	$\frac{1}{4}$
C	$\frac{25}{29}$
D	$\frac{4}{17}$
E	3
F	$\frac{27}{2}$

5 Setze das fehlende Rechenzeichen ein, damit die Rechnung stimmt:

$$\frac{1}{2} \square \left(6 : \frac{3}{4}\right) = 4$$

© www.hpt.at, 2019

6 Ordne den Brüchen die jeweils passende Grafik aus A bis E zu!
Schreibe den Buchstaben jeweils in das vorgesehene leere Feld!



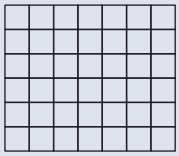
$\frac{2}{5}$		$\frac{5}{7}$		$\frac{3}{4}$		$\frac{3}{8}$		$\frac{1}{2}$	

7 Kreuze an, welcher unechte Bruch dem Quotienten der beiden gemischten Brüche entspricht!

$$5\frac{2}{5} : 2\frac{1}{2}$$

$\frac{108}{75}$	☐	$\frac{54}{25}$	☐	$\frac{27}{10}$	☐
$\frac{27}{12}$	☐	$\frac{5}{2}$	☐	$\frac{54}{12}$	☐

8 Bestimme die Gesamtanzahl der abgebildeten Felder!
Markiere $\frac{5}{6}$ von $\frac{4}{7}$!



9 Berechne: $\frac{14}{3} + \frac{5}{2}$.
Kreuze das richtige Ergebnis an!

$5\frac{3}{5}$	☐	$7\frac{1}{2}$	☐	$8\frac{3}{5}$	☐
$7\frac{1}{6}$	☐	$9\frac{3}{5}$	☐	$9\frac{1}{6}$	☐

10 Mithilfe des Taschenrechners soll die folgende Aufgabe gelöst werden:

$$14\frac{1}{2} : 7\frac{1}{2} - \frac{3}{4} \cdot 1\frac{2}{5}$$

Kreuze die richtige Rechnereingabe an!

1 14*1/2/71/2-3/4*1*2/5 → $-\frac{89}{355}$	☐	1 14+1/2/7+1/2-3/4*1+2/5 → $\frac{1991}{140}$	☐
1 (14+1/2)/(7+1/2)-3/4*(1+2/5) → $\frac{53}{60}$	☐	1 29/2/15/2-3/4*7/5 → $-\frac{17}{30}$	☐

© www.hpt.at, 2019