2 Wahrscheinlichkeitsverteilungen

In diesem Kapitel geht es darum, das bisher erlernte Wissen über Wahrscheinlichkeit zu systematisieren, indem es in das in der Mathematik zentrale Konzept der Funktionen eingeordnet wird. Begrifflich kommen hier die sogenannten **Wahrscheinlichkeitsverteilungen** ins Spiel. Deren wichtigsten Modelle sind Inhalt dieses Kapitels. Einerseits ist das die **Binomialverteilung**. Historisch zeichneten dafür vorwiegend Jakob I. Bernoulli (1655 – 1705), Abraham de Moivre (1667 – 1754) und Pierre Simon de Laplace (1749 – 1827) verantwortlich. Auf der anderen Seite wird die **Normalverteilung** mit ihrer weltberühmten, nach Carl Friedrich Gauß (1777 – 1855) benannten **Glockenkurve** ausführlich behandelt.

Jakob I. Bernoulli (1655 – 1705)

2.1 Diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen

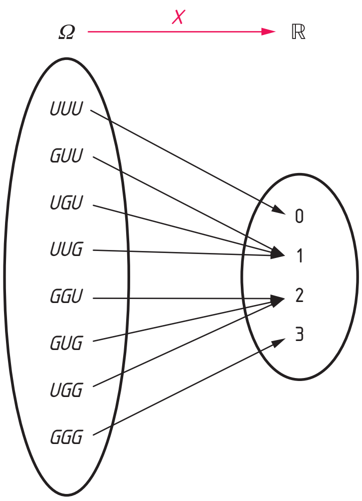
2.1.1 Zufallsvariablen und Wahrscheinlichkeitsverteilungen

A 2.1 Drei Würfel werden geworfen. Wir interessieren uns ausschließlich dafür, ob die Augenzahl gerade (G) oder ungerade (U) ist.

a) Modelliere dieses Zufallsexperiment als Funktion, die alle möglichen Ergebnisse auf die Anzahl der geraden Augenzahlen abbildet.

b) Erstelle eine weitere Funktion, die die Anzahl der geraden Augenzahlen den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten zuordnet.

a) Um den Ausgang des Zufallsexperiments mathematisch zu beschreiben, wird eine Funktion X, die sogenannte **Zufallsvariable**, eingeführt.
Ihre Definitionsmenge ist der Ergebnisraum Ω.
In diesem Beispiel enthält Ω alle möglichen Abfolgen von geraden und ungeraden Augenzahlen, also:
$\Omega = \{UUU, GUU, UGU, UUG, GGU, GUG, UGG, GGG\}$.
Diese Elementarereignisse, deren Eintreten unter gewissen Rahmenbedingungen vom Zufall bestimmt wird, werden nun abgebildet auf die Anzahl der geraden Augenzahlen, also in diesem Fall auf die Werte $x_1 = 0$ gerade Augenzahlen, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$ und $x_4 = 3$ gerade Augenzahlen (siehe Diagramm).



Eine **Zufallsvariable *X*** ist eine Funktion, die jedem Ergebnis eines Zufallsexperiments eindeutig eine reelle Zahl x_i ($i = 1, 2, \ldots$) zuordnet.
Eine Zufallsvariable heißt **diskret**, wenn sie nur endlich (oder abzählbar unendlich) viele Werte annehmen kann.

b) Jedem x_i wird nun die entsprechende Wahrscheinlichkeit $P(X = x_i)$ zugeordnet. Wegen der Gleichverteilung in Ω lässt sich direkt ablesen:

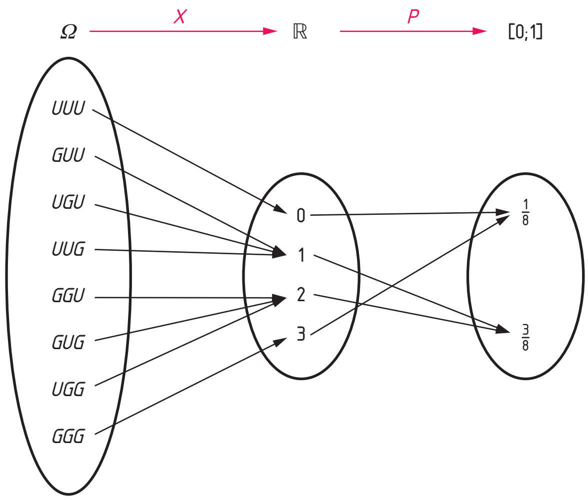
$P(X = 0) = \frac{1}{8}$

$P(X = 1) = \frac{3}{8}$

$P(X = 2) = \frac{3}{8}$

$P(X = 3) = \frac{1}{8}$

Im Diagramm rechts sind nochmals die Zufallsvariable X und zusätzliche P als Mengendiagramm mit Zuordnungspfeilen dargestellt. Man kann diese Darstellung auch mit einer Wertetabelle verkürzen:



$X = x_i$	0	1	2	3	Σ
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	**1**

Es liegt eine Funktion vor, die wir **Wahrscheinlichkeitsfunktion** f nennen.

Die **Wahrscheinlichkeitsfunktion *f*** ist für eine diskrete Zufallsvariable X für $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} P(X = x_i) & \text{für } x = x_i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

f ordnet also jeder Zahl x die Wahrscheinlichkeit seines Eintretens zu. Ist x kein Wert der diskreten Zufallsvariable X („unmögliches Ereignis"), dann ist die Wahrscheinlichkeit 0.

So gilt also im Würfelbeispiel $f(0) = f(3) = \frac{1}{8}$ bzw. $f(1) = f(2) = \frac{3}{8}$ und es ist zusätzlich klar, dass für jede andere Zahl die Wahrscheinlichkeit null ist, zB $f(4) = 0$ oder $f(1{,}5) = 0$.

2.2 X ist die Anzahl der geraden Augenzahlen beim 3-maligen Würfeln.
Stelle die Wahrscheinlichkeitsfunktion f und eine Funktion F der kumulativen (angehäuften, aufsummierten) Wahrscheinlichkeit von X graphisch dar.

B

TE

Bei der **kumulativen Wahrscheinlichkeit von *X*** werden alle Wahrscheinlichkeiten bis zum entsprechenden Wert addiert. So bedeutet zum Beispiel die kumulative Wahrscheinlichkeit für $X = 2$, dass $P(X \leqslant 2)$ berechnet wird, also die Wahrscheinlichkeit, dass 0-, 1- oder 2-mal gerade Augenzahlen aufscheinen. In einer Tabelle kann man das übersichtlich darstellen:

$X = x_i$	0	1	2	3
$P(X \leqslant x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{4}{8}$	$\frac{4}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$	$\frac{7}{8} + \frac{1}{8} = 1$

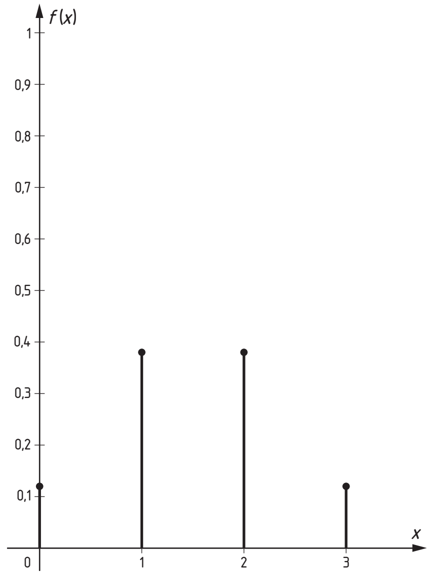
Wahrscheinlichkeitsverteilungen

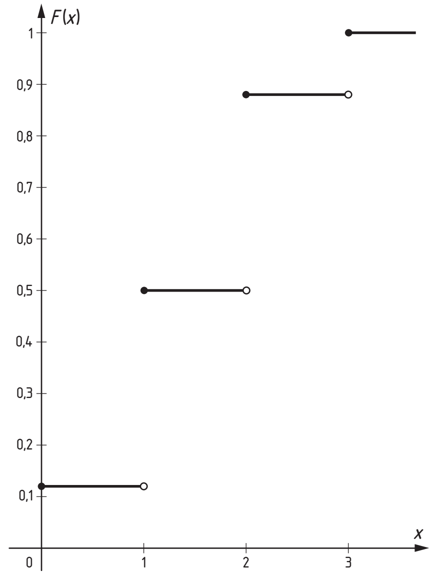
Die **Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion *F*** ist für eine diskrete Zufallsvariable X für $x \in \mathbb{R}$:

$$F(x) = P(X \leqslant x) \quad \text{oder als Summe für } x_i \leqslant x\text{:} \quad F(x) = \sum_i f(x_i)$$

F ordnet also jeder Zahl x die Wahrscheinlichkeit zu, dass die Zufallsvariable X höchstens diesen Wert x annimmt.

Die Wahrscheinlichkeitsfunktion f (linkes Diagramm) wird hier korrekterweise als **Stabdiagramm** dargestellt. (Aus anschaulichen Gründen werden gelegentlich auch Säulendiagramme verwendet.)
Die Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion F (rechtes Diagramm) wird als **Treppenfunktion** dargestellt. Verteilungsfunktionen sind im diskreten Fall nicht von so großer Bedeutung.





AC

2.3 Die Zufallsvariable X beschreibt die Augensumme beim Werfen zweier Würfel.

a) Erstelle eine Wertetabelle der Wahrscheinlichkeitsfunktion f und der entsprechenden Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion F für alle Werte von X.

b) Beschreibe die Bedeutung von $f(4)$ und $F(4)$ im Sachzusammenhang.

Lösung:

a)

$X = x_i$	2	3	4	5	6	7
$f(x_i) = P(X = x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$
$F(x_i) = P(X \leqslant x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{15}{36}$	$\frac{21}{36}$

$X = x_i$	8	9	10	11	12	Σ
$f(x_i) = P(X = x_i)$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	**1**
$F(x_i) = P(X \leqslant x_i)$	$\frac{26}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{33}{36}$	$\frac{35}{36}$	1	–

b) $f(4)$ ist die Wahrscheinlichkeit, die Augensumme 4 zu würfeln. Dies tritt in 3 von 36 Fällen ein: {(1, 3), (2, 2), (3, 1)}.
$F(4)$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Augensumme höchstens 4 beträgt. Dies tritt in 6 von 36 Fällen ein: {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1)}.

2.4 Zeichne ein Stabdiagramm der Wahrscheinlichkeitsfunktion der Aufgabe 2.3. Beschreibe das Diagramm hinsichtlich Symmetrie und Form. **BC**

2.5 4er-Packungen Eier werden untersucht. Die Tabelle veranschaulicht die Wahrscheinlichkeit für X, wenn X die Anzahl der verdorbenen Eier in einer Packung beschreibt. **BD**

$X = x_i$	0	1	2	3	4
$P(X = x_i)$		19,1 %	4,8 %	0,3 %	0,1 %
$P(X \leqslant x_i)$					

a) Erkläre, wie $P(X = 0)$ berechnet werden kann.
b) Berechne die Wahrscheinlichkeit für höchstens 2 verdorbene Eier.
c) Berechne die fehlenden Werte $P(X \leqslant x_i)$.

2.6 Pendler, die täglich mit dem Auto zur Arbeit fahren, werden in einer Großstadt unter die Lupe genommen. X ist die Anzahl der Insassen pro Pendler-PKW. Dabei werden Autos mit 5 oder mehr Personen in eine Kategorie zusammengefasst. **BD**

$X = x_i$	1	2	3	4	$\geqslant 5$
$P(X = x_i)$					
$P(X \leqslant x_i)$	0,655	0,814	0,964	0,993	1

a) Erläutere, wie die Wahrscheinlichkeit für mindestens 3 Insassen in einem Pendler-PKW aus den gegebenen Zahlen berechnet werden kann.
b) Berechne die fehlenden Werte $P(X = x_i)$.

2.7 Erfahrungsgemäß treffen 3 Basketballspieler bei Freiwürfen mit einer Wahrscheinlichkeit von 86 %, 71 % und 59 % in den Korb. X ist die Anzahl der erzielten Körbe, wenn jeder der Spieler einen Freiwurf probiert und die Würfe als unabhängig voneinander betrachtet werden. **ABCD**

a) Erstelle eine Tabelle der Wahrscheinlichkeitsfunktion für alle Werte von X.
Erkläre, wie man die Gegenwahrscheinlichkeit geschickt ausnützen kann, wenn man weiß, dass $P(X = 1)$ und $P(X = 2)$ am aufwändigsten zu berechnen sind.
b) Berechne $P(X \leqslant 1)$.
Beschreibe das Gegenereignis zu $X \leqslant 1$ im Sachzusammenhang.

2.8 Bei einer Wette wird eine Münze 3-mal geworfen. Der Spieler erhält 10 €, wenn immer „Zahl" erscheint, und 4 €, wenn 2-mal „Zahl" geworfen wird. Der Wetteinsatz beträgt 3 € pro Versuch. X beschreibt den Reingewinn (Gewinn minus Einsatz) aus der Sicht des Spielers. **AD**
a) Erstelle eine Tabelle der Wahrscheinlichkeitsfunktion für alle Werte von X.
b) Argumentiere, warum dieses Spiel zumindest langfristig für den Spieler nicht gewinnbringend sein kann.

2.1.2 Erwartungswert und Standardabweichung

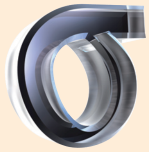
Maßzahlen der beschreibenden Statistik können direkt auf die Wahrscheinlichkeitsverteilungen übertragen werden. Aus diesem Grund werden sie oft verwechselt. Trotz der gleichartigen Rechenwege müssen aber die zugrundeliegenden Konzepte klar unterschieden werden. Während die Statistik bereits vorliegende Daten beschreibt, versucht man mit Wahrscheinlichkeitsverteilungen Aussagen über Zufallsexperimente zu treffen, deren Ergebnisse noch nicht feststehen. Der Zusammenhang zwischen den beiden Konzepten (relative Häufigkeit bzw. Wahrscheinlichkeit) wird im Wesentlichen durch das Gesetz der großen Zahlen beschrieben.

B **2.9** X ist die Anzahl der geraden Augenzahlen beim 3-maligen Würfeln:

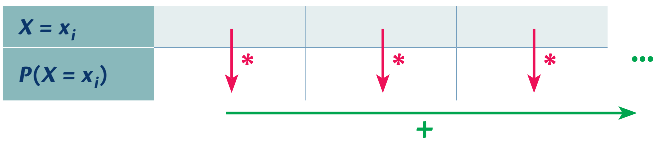
$X = x_i$	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

a) Ermittle, welche Anzahl an geraden Augenzahlen nach (unendlich) vielen Durchführungen des Zufallsexperiments im Schnitt zu erwarten sind.
Diese Anzahl ist der „Erwartungswert" μ (sprich: „mü").

b) Bestimme die mittlere Abweichung vom Erwartungswert, die man wiederum nach (unendlich) vielen Durchführungen des Zufallsexperiments im Schnitt erwarten kann.
Die mittlere Abweichung vom Erwartungswert heißt „Standardabweichung" σ (sprich: „sigma").



a) Der Erwartungswert berechnet sich wie das gewichtete arithmetische Mittel. Der Wert der Zufallsvariable wird jeweils mit der Wahrscheinlichkeit für dessen Eintreten multipliziert und von diesen Produkten die Summe gebildet: $0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = 1{,}5$.
Die Veranschaulichung des Rechenwegs:



Im Schnitt sind also bei 3 Würfen 1,5 „Würfel mit einer geraden Augenzahl" zu erwarten.
In anderen Worten: Wenn man nach jeweils 3 Würfen die Anzahl der geraden Augenzahlen notiert und nach sehr vielen (theoretisch unendlich vielen) Wurfserien davon das arithmetische Mittel berechnet, so ist zu erwarten, dass dieses bei 1,5 liegt.
An diesem Beispiel sieht man, dass der Erwartungswert selbst kein Wert der Zufallsvariable sein muss. Es können nicht 1,5 gerade Augenzahlen gewürfelt werden, als Aussage über einen mittleren Wert ist diese Zahl aber sinnvoll.

Der **Erwartungswert $E(X)$** oder $\boldsymbol{\mu}$ einer diskreten Zufallsvariable X lautet:

$$E(X) = \mu = x_1 \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = X_2) + \ldots = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X = x_i)$$

Dem Erwartungswert („zu erwartenden Mittelwert") in der Wahrscheinlichkeitsrechnung entspricht das arithmetische Mittel im Konzept der beschreibenden Statistik.

b) Die Standardabweichung der Zufallsvariable X vom Erwartungswert ist sogar dem Namen nach ident mit dem Gegenstück in der beschreibenden Statistik. Der Erwartungswert alleine gibt zu wenig Information über die Lage der Ergebnisse eines Zufallsexperiments. Erst die Streuung um den Erwartungswert zeigt, ob die Ergebnisse mit hoher Wahrscheinlichkeit nahe am Erwartungswert liegen. Die Berechnung erfolgt ähnlich wie in der beschreibenden Statistik über die mittlere quadratische Abweichung, die Varianz genannt wird.

Rechnung: $(0 - 1{,}5)^2 \cdot \frac{1}{8} + (1 - 1{,}5)^2 \cdot \frac{3}{8} + (2 - 1{,}5)^2 \cdot \frac{3}{8} + (3 - 1{,}5)^2 \cdot \frac{1}{8} = 0{,}75$

Oder kürzer: $0^2 \cdot \frac{1}{8} + 1^2 \cdot \frac{3}{8} + 2^2 \cdot \frac{3}{8} + 3^2 \cdot \frac{1}{8} - 1{,}5^2 = 0{,}75$

Für die Standardabweichung wird dann noch die Quadratwurzel gezogen: $\sqrt{0{,}75} \approx 0{,}87$. Im Schnitt ist also bei wiederum sehr vielen (theoretisch unendlich vielen) Wurfserien aus 3 Würfen eine mittlere Abweichung von 0,87 vom Erwartungswert 1,5 „Würfel mit einer geraden Augenzahl" zu erwarten. Oft ergeben sich so wie hier durch die Mittelung Kommazahlen im Ergebnis, ihnen kommt mehr statistische als praktische Bedeutung zu.

Die **Varianz *V*(*X*)** (oder $\boldsymbol{\sigma^2}$) einer diskreten Zufallsvariable X lautet:

$$V(X) = (x_1 - \mu)^2 \cdot P(X = x_1) + (x_2 - \mu)^2 \cdot P(X = x_2) + \ldots = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i)$$

Durch eine entsprechende Umformung ergibt sich eine einfachere Formel:

$$V(X) = x_1^2 \cdot P(X = x_1) + x_2^2 \cdot P(X = x_2) + \ldots - \mu^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot P(X = x_i)\right) - \mu^2$$

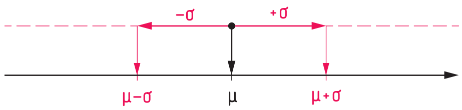
Die **Standardabweichung** $\boldsymbol{\sigma}$ einer diskreten Zufallsvariable X lautet:

$$\sigma = \sqrt{V(X)}$$

Der Standardabweichung („zu erwartenden mittleren Abweichung vom Erwartungswert") in der Wahrscheinlichkeitsrechnung entspricht die (empirische) Standardabweichung im Konzept der beschreibenden Statistik.

Anmerkung: In den Formeln für Erwartungswert und Varianz kann jeweils der Ausdruck $P(X = x_i)$ äquivalent durch $f(x_i)$ ersetzt werden.

Erwartungswert und Standardabweichung am Zahlenstrahl: Die Realisierungen der Zufallsvariable X liegen mehrheitlich im Bereich von $\mu - \sigma$ bis $\mu + \sigma$, können aber auch außerhalb liegen.



2.10 X ist der Preis in Euro verschiedener Zimmerkategorien einer Hotelkette. BC

$X = x_i$	89	149	199	299
$P(X = x_i)$	0,3	0,45	0,15	0,1

Berechne den Erwartungswert und die Standardabweichung.
Interpretiere die beiden Werte im Sachzusammenhang.

Lösung:

$u = 89 \cdot 0{,}3 + 149 \cdot 0{,}45 + 199 \cdot 0{,}15 + 299 \cdot 0{,}1 = 153{,}5$

$\sigma = \sqrt{89^2 \cdot 0{,}3 + 149^2 \cdot 0{,}45 + 199^2 \cdot 0{,}15 + 299^2 \cdot 0{,}1 - 153{,}5^2} = 60{,}70$

Die Hotelkette kann pro Zimmer einen Preis von 153,50 € erwarten, mit einer mittleren Abweichung von 60,70 € von diesem Wert ist zu rechnen.

BCD **2.11** X ist die Summe von zwei Zahlen, die zufällig (mit Zurücklegen) aus $\{1, 2, 3\}$ gewählt werden.

$X = x_i$	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

a) Erkläre, warum der Erwartungswert in der „Mitte" bei 4 liegen muss.
b) Berechne den Erwartungswert und die Standardabweichung.
Interpretiere die Standardabweichung im Sachzusammenhang.

AB **2.12** Bei der Tombola eines Maturaballs werden 900 Lose um 5 € pro Stück verkauft. Es werden 3 Hauptpreise im Wert von je 500 €, 10 Preise im Wert von 100 € und 100 Preise im Wert von 10 € verlost. X beschreibt den Gewinn pro Los aus Sicht des Spielers.

a) Erstelle eine Wahrscheinlichkeitstabelle für X.
b) Berechne Erwartungswert und Standardabweichung von X.
Interpretiere diese beiden Werte.
c) Berechne den gesamten Gewinn aus Sicht der Maturaballveranstalter.

AB **2.13** In einem modernen technischen Gerät befinden sich zwei empfindliche Teile, die unabhängig voneinander mit den Wahrscheinlichkeiten 5 % und 9 % defekt sind. Die Zufallsvariable X steht für die Anzahl der defekten Teile pro Gerät.
a) Erstelle eine Tabelle für die Wahrscheinlichkeiten aller Werte von X.
b) Berechne Erwartungswert und Standardabweichung von X.
c) Die Reparatur je eines defekten Teils kostet 12 €.
Ermittle, welche Reparaturkosten bei 5 000 verkauften Geräten zu erwarten sind.

ABD **2.14** Auf einem Rummelplatz kann an einem Stand für 5 € einmal auf eine Zielscheibe geschossen werden. Trifft man die Mitte, gewinnt man 70 €. X ist der Reingewinn des Spielers in Euro. Die Wahrscheinlichkeit, die Mitte zu treffen, ist p.

a) Erstelle eine Tabelle für die Wahrscheinlichkeit der beiden Werte von X.
b) Erkläre, bei welchem Erwartungswert dieses Spiel fair ist.
Berechne die dafür nötige Trefferwahrscheinlichkeit p.
c) Berechne den zu erwartenden Gesamtgewinn nach 16 Versuchen mit $p = 0{,}2$.

CD **2.15** Der Ansatz zur Berechnung der Standardabweichung einer Zufallsvariable X aus einer Tabelle heraus lautet: $\sigma = \sqrt{10^2 \cdot 0{,}45 + 20^2 \cdot 0{,}2 - 42{,}25}$
a) Lies aus der Rechnung $P(X = 20)$ und μ ab.
b) Neben 10 und 20 kann X noch einen Wert annehmen, der in der Rechnung fehlt.
Erkläre, welcher Wert das sein muss und wie hoch dessen Wahrscheinlichkeit ist.

D **2.16** Die Zufallsvariablen X_1 und X_2 beschreiben den Gewinn eines Spielers bei zwei Glücksspielen. Bekannt sind: $\mu_1 = -25$ €, $\sigma_1 = 60$ €; $\mu_2 = -25$ €, $\sigma_2 = 900$ €.
a) Argumentiere, ob die zwei Spiele für den Spieler rentabel sind.
b) Erkläre, welche Auswirkungen die größere Standardabweichung in Spiel 2 im Vergleich zu Spiel 1 auf die mögliche Gewinnhöhe hat.
c) Beurteile die Richtigkeit der Aussage: „$\sigma_1 = 60$ € bedeutet, dass der Gewinn um bis zu 60 € vom Erwartungswert nach oben und unten abweichen kann."

2.1.3 Binomialverteilung

Einige der bisher berechneten Wahrscheinlichkeitsbeispiele waren bereits binomialverteilt (lateinisch binominis = „zweinamig"). Was dies genau bedeutet, wie man solche Beispiele erkennen kann und wie man in diesem Fall effizient Berechnungen durchführt, erfahren wir in diesem Abschnitt.

2.17 Aus einem Stapel Karten (4 Farben mit jeweils gleich vielen Karten) werden mit Zurücklegen 4 Karten gezogen.
X ist die Anzahl der gezogenen Herz-Karten.
a) Erläutere die grundlegenden Charakteristika dieses Zufallsexperiments.
b) Berechne die Wahrscheinlichkeit aller möglichen Werte für X.
c) Ermittle Erwartungswert und Standardabweichung für X.

BD

a) Pro Ziehung gibt es nur die Ergebnisse „Herz" oder „Nicht-Herz".
Die Ziehung wird 4-mal unabhängig (weil mit Zurücklegen) wiederholt.
Die Wahrscheinlichkeit für „Herz" beträgt bei jedem Versuch konstant $\frac{1}{4}$ = 0,25, die für „Nicht-Herz" $\frac{3}{4}$ = 0,75.
Bei diesem Zufallsexperiment ist die Zufallsvariable X binomialverteilt.

Die folgenden Eigenschaften gelten allgemein formuliert immer bei Binomialverteilungen.

Binomialverteilung: Voraussetzungen, Eigenschaften
- Das einzelne Zufallsexperiment hat nur **zwei mögliche**, unvereinbare **Ergebnisse** („Bernoulli-Experiment"):
  Erfolg/Misserfolg oder auch Treffer/Niete, wahr/falsch, ja/nein usw.
  Die **Erfolgswahrscheinlichkeit** ist p, die **Misserfolgswahrscheinlichkeit** $1 - p$.
- Das Zufallsexperiment wird **n-mal unabhängig wiederholt** (Ziehen mit Zurücklegen).
- Bei jedem der n Versuche **bleibt die Erfolgswahrscheinlichkeit p gleich**.

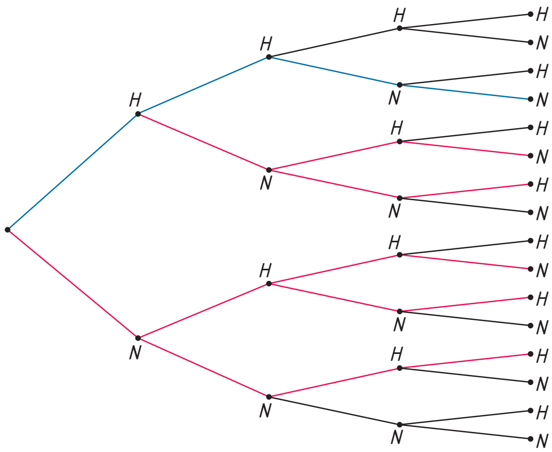
b) Die Wahrscheinlichkeiten, in 4 Versuchen (Ziehungen) k-mal Herz zu ziehen, können unterschiedlich berechnet werden:

$P(X = k)$	Rechnung auf Basis der bisher erlernten Methoden	Systematisierte Rechnung mithife einer Formel	Jeweiliges Ergebnis
$P(X = 0)$	$0{,}75^4$	$\binom{4}{0} \cdot 0{,}25^0 \cdot 0{,}75^4$	$\approx 0{,}3164$
$P(X = 1)$	$0{,}25 \cdot 0{,}75^3 \cdot 4$	$\binom{4}{1} \cdot 0{,}25^1 \cdot 0{,}75^3$	$\approx 0{,}4219$
$P(X = 2)$	$0{,}25^2 \cdot 0{,}75^2 \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!}$	$\binom{4}{2} \cdot 0{,}25^2 \cdot 0{,}75^2$	$\approx 0{,}2109$
$P(X = 3)$	$0{,}25^3 \cdot 0{,}75 \cdot 4$	$\binom{4}{3} \cdot 0{,}25^3 \cdot 0{,}75^1$	$\approx 0{,}0469$
$P(X = 4)$	$0{,}25^4$	$\binom{4}{4} \cdot 0{,}25^4 \cdot 0{,}75^0$	$\approx 0{,}0039$

Dass der Binomialkoeffizient $\binom{4}{k}$ in der Formel am Beginn steht, hat sich eingebürgert, er kann aber genauso gut am Ende angeführt werden. Keinesfalls darf er vergessen werden, denn er ordnet die Herz-Karten (H) und die Nicht-Herz-Karten (N) in allen möglichen Reihenfolgen an, wie das Baumdiagramm auf der nächsten Seite verdeutlicht.

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Im Beispiel $P(X = 2)$ wird ohne den Binomialkoeffizienten $\binom{4}{2} = 6$ nur ein Spezialfall, zB der blau markierte Pfad (zuerst zwei H, dann zwei N), berechnet. Man erkennt im Baumdiagramm anhand der zusätzlich rot markierten Pfade, dass es insgesamt 6 Möglichkeiten für das Ziehen von 2 Herzkarten gibt. Mit denselben Überlegungen kann man die übrigen10 Pfade den anderen Werten von X zuordnen: je 1 Pfad ganz oben bzw. ganz unten für 4 bzw. 0 Herz-Karten, je 4 Pfade für 1 bzw. 3 Herz-Karten.



Binomialverteilung

Die Zufallsvariable X, die die Anzahl k der Erfolge in n unabhängigen Wiederholungen eines Bernoulli-Experiments mit konstanter Erfolgswahrscheinlichkeit p beschreibt, ist **binomialverteilt** oder ***B*(*n*; *p*)-verteilt**, wenn gilt:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n - k} \quad \text{mit } k = 0, 1, 2, ..., n$$

Die Formel in Worten:

$$\binom{\text{Anzahl Versuche}}{\text{Anzahl Erfolge}} \cdot \text{Erfolgs-WS}^{\text{Anzahl Erfolge}} \cdot \text{Misserfolgs-WS}^{\text{Anzahl Misserfolge}}$$

Anmerkung zum Ziehen ohne Zurücklegen: In diesem Fall ändert sich (wie wir schon mehrmals berechnet haben) die Wahrscheinlichkeit von Ziehung zu Ziehung, es handelt sich also nicht um eine Binomialverteilung, sondern um eine sogenannte hypergeometrische Verteilung.

Bei einer sehr großen Menge an Elementen, aus der gezogen wird, fällt der Unterschied zwischen den beiden Verteilungen allerdings nicht mehr ins Gewicht. **Dann kann auch das Ziehen ohne Zurücklegen näherungsweise binomial gerechnet werden.** Eine statistische Faustregel besagt, dass dies sinnvoll ist, wenn die Anzahl n der gezogenen Elemente höchstens 5 % der insgesamt zur Wahl stehenden Elemente ausmacht.

c) Wir berechnen vorerst den Erwartungswert und die Standardabweichung wie gewohnt:

$$\mu = 0 \cdot 0{,}3164 + 1 \cdot 0{,}4219 + 2 \cdot 0{,}2109 + 3 \cdot 0{,}0469 + 4 \cdot 0{,}0039 = 1$$

$$\sigma = \sqrt{0^2 \cdot 0{,}3164 + 1^2 \cdot 0{,}4219 + 2^2 \cdot 0{,}2109 + 3^2 \cdot 0{,}0469 + 4^2 \cdot 0{,}0039 - 1^2} = \sqrt{0{,}75} \approx 0{,}87$$

Der Erwartungswert ist 1 Herz-Karte. Das leuchtet unmittelbar ein, da ja ein Viertel der Karten im Stapel die Farbe Herz aufweist. Also ist es naheliegend, dass auch mit einem Viertel Herz-Karten unter den gezogenen gerechnet werden kann, in diesem Fall also 1 von 4 Karten. Man darf also sehr viel schneller $\mu = 4 \cdot \frac{1}{4} = 1$ rechnen.

Auch bei der Standardabweichung kann die lange Rechnung gekürzt werden:

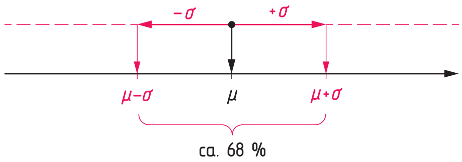
$$\sigma = \sqrt{4 \cdot \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{3}{4}} = \sqrt{0{,}75} \approx 0{,}87.$$

Binomialverteilung: Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung

X ist eine binomialverteilte bzw. $B(n; p)$-verteilte Zufallsvariable, dann gilt:

$$E(X) = \mu = n \cdot p$$
$$V(x) = n \cdot p \cdot (1 - p)$$
$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$$

Bei binomialverteilten Zufallsvariablen kann man (wie wir später noch sehen werden) genauer angeben, wie die Zufallsvariable streut:
Die Wahrscheinlichkeit für Werte innerhalb des Bereichs von $\mu - \sigma$ bis $\mu + \sigma$ beträgt ca. 68 %, unterhalb und oberhalb dieses Intervalls aufgrund der Symmetrie jeweils ca. 16 %.



2.18 X ist die Anzahl der Sechser beim mehrmaligen Würfeln.

ABD

a) Begründe, warum X binomialverteilt ist.
b) Berechne Erwartungswert und Standardabweichung von X bei 12 Würfen.
c) Ermittle die Wahrscheinlichkeit, bei 12 Würfen 2 oder 3 Sechser zu würfeln.
d) Stelle eine Formel auf, mit der die Wahrscheinlichkeit berechnet werden kann, bei n Versuchen keinen Sechser zu würfeln.
e) Berechne, wie viel Würfe mindestens benötigt werden, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99 % zumindest 1-mal einen Sechser zu würfeln.

Lösung:

a) Man würfelt entweder einen Sechser oder keinen, also nur zwei mögliche Ausgänge; die Würfe sind unabhängig voneinander; die Wahrscheinlichkeit für einen 6er bleibt immer gleich. X ist $B\left(n; \frac{1}{6}\right)$-verteilt.

b) $\mu = n \cdot p = 12 \cdot \frac{1}{6} = 2$ Sechser; $\sigma = \sqrt{12 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} \approx 1{,}29$ Sechser

c) $P(X = 2) + P(X = 3) = \binom{12}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{10} + \binom{12}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^9 \approx 49{,}3\,\%$

d) $\mathrm{P}(\mathrm{X} = 0) = \binom{n}{0} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^n = \left(\frac{5}{6}\right)^n$

e) Aus Gründen der Einfachheit setzen wir die Wahrscheinlichkeit vorerst genau 99 % und runden dafür das Ergebnis jedenfalls AUF:

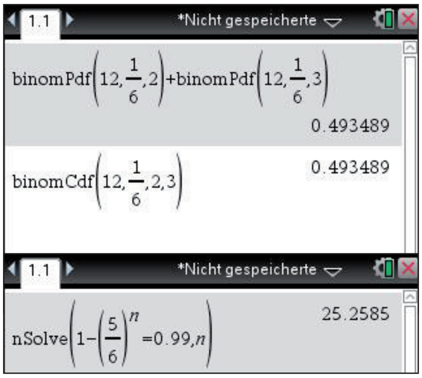
$P(X \geqslant 1) = 0{,}99 \;\Rightarrow\; 1 - P(X = 0) = 0{,}99 \;\Rightarrow\; P(X = 0) = 0{,}01$

$\left(\frac{5}{6}\right)^n = 0{,}01$ (Es kann auch direkt mit dieser Zeile angesetzt werden!)

$n \cdot \ln\left(\frac{5}{6}\right) = \ln(0{,}01) \;\Rightarrow\; n = 25{,}3$

Nach 26 Würfen liegt die Wahrscheinlichkeit erstmals über 99 %, dass zumindest 1 Sechser geworfen wird.

Technologieeinsatz bei der Binomialverteilung, TI-Nspire:
Aufgabe ***c)*** Berechnung der Wahrscheinlichkeit bei 12 Würfen 2 oder 3 Sechser zu würfeln.
Man verwendet 2 mögliche Befehle:
binomPdf(n, p, x_i), wenn man die Wahrscheinlichkeit für einen Einzelwert $P(X = x_i)$ erhalten will und
binomCdf(n, p, x_u, x_o) wenn ein kumulativer Wert zwischen unterer und oberer Grenze berechnet werden soll.



1: Calculator/menu/5: Wahrscheinlichkeit/ 5: Verteilungen/ binomPdf(12,1/6,2)+binomPdf(12,1/6,3)

oder:

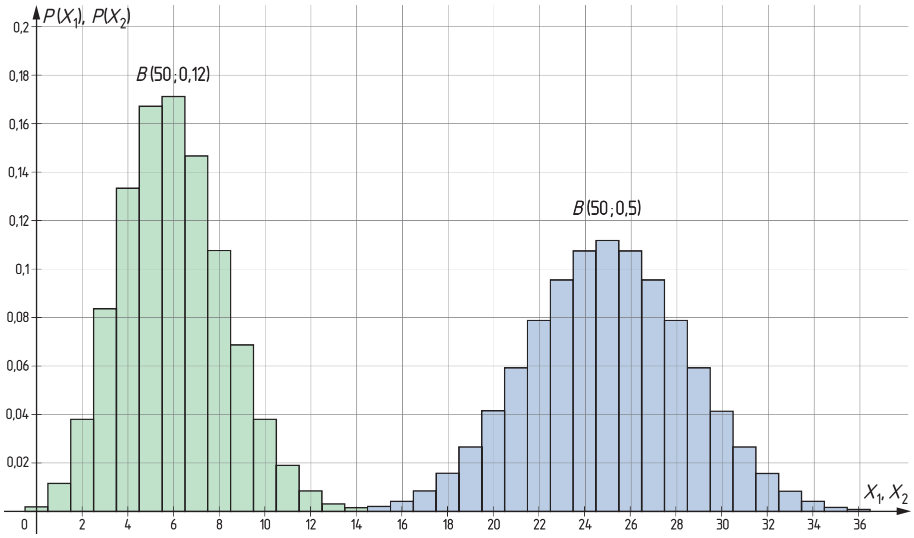
1: Calculator/menu/5: Wahrscheinlichkeit/ 5: Verteilungen/ binomCdf(12,1/6,2,3)

Aufgabe ***e)*** Lösen der Gleichung $P(X \geqslant 1) = 0{,}99$

1: Calculator/menu/3: Algebra/6: num. Lösen/ 1−(5/6)^n=0.99,n)

Technologieeinsatz zu diesem Thema für TI82-84, Excel und Geogebra-CAS siehe www.hpt.at (Schulbuch Plus für Schüler/innen)

CD **2.19** Die Zufallsvariable X_1 ist $B(50; 0{,}12)$-verteilt und X_2 ist $B(50; 0{,}5)$-verteilt. Beide sind in einem Koordinatensystem als Säulendiagramm dargestellt.



a) Erkläre, was man an den Säulen ablesen kann.

b) Lies die Werte von X_1 bzw. X_2 mit der höchsten Wahrscheinlichkeit ab. Prüfe, ob diese Werte dem Erwartungswert entsprechen.

c) Interpretiere die beiden Zufallsvariablen hinsichtlich einer Symmetrie.

d) Von allen binomialverteilten Zufallsvariablen weist diejenige mit $p = 0{,}5$ die größte Standardabweichung auf.
Erläutere anhand dieses Diagramms, woran man erkennt, dass X_1 die kleinere Standardabweichung als X_2 aufweist.

2.20 Ein Vertreter weiß aus Erfahrung, dass jedes seiner Verkaufsgespräche mit einer Wahrscheinlichkeit von 30 % zum Erfolg führt. **ABCD**
X ist die Anzahl der erfolgreichen Gespräche bei 10 Versuchen an einem Tag.

a) Erstelle eine vollständige Wahrscheinlichkeitstabelle für alle Werte von X.

b) $P(X \leqslant 2)$, $P(X \geqslant 4)$, $P(3 \leqslant X \leqslant 6)$, $P(X > 5)$, $P(X < 5)$
Beschreibe für diese Wahrscheinlichkeiten jeweils das gesuchte Ereignis und das Gegenereignis.
Berechne die Wahrscheinlichkeiten.

c) Erkläre, wann Gegenereignisse bei der Berechnung von Wahrscheinlichkeiten in der Binomialverteilung eingesetzt werden sollten.

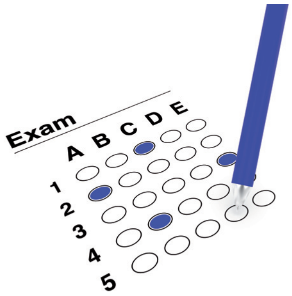
2.21 Folgende Rechenansätze sind für $n = 20$ Versuche und einer Erfolgswahrscheinlichkeit von $p = 0{,}8$ gegeben: **C**

(1) $0{,}2^{20}$ **(2)** $0{,}2 \cdot 0{,}8^{19} \cdot 20$ **(3)** $\binom{20}{15} \cdot 0{,}8^{15} \cdot 0{,}2^{5}$

(4) $20 \cdot 0{,}8$ **(5)** $\sum_{k=10}^{20} \binom{20}{k} \cdot 0{,}8^{k} \cdot 0{,}2^{20-k}$ **(6)** $\sum_{k=7}^{12} \binom{20}{k} \cdot 0{,}2^{k} \cdot 0{,}8^{20-k}$

Interpretiere die Ansätze im Zusammenhang mit der Binomialverteilung.

2.22 Bei der standardisierten Matura im Fach Angewandte Mathematik gibt es Aufgaben zum Ankreuzen, bei denen genau 1 von 5 Antworten richtig ist. Bei einer Matura kommen fünf derartige Aufgaben und du kreuzt alle auf gut Glück nach dem Zufallsprinzip an. X ist die Anzahl der richtigen Antworten. **ABD**



a) Erkläre, warum X binomialverteilt ist.

b) Berechne die Wahrscheinlichkeit, mehr als die Hälfte der Fragen richtig zu erraten.

c) Erläutere die Bedeutung des Binomialkoeffizienten in $\binom{5}{2} \cdot 0{,}2^{2} \cdot 0{,}8^{3}$.

d) Berechne die Wahrscheinlichkeit, die letzte Frage richtig zu erraten, wenn die ersten vier Fragen nicht erraten wurden.

e) Erstelle ein Stabdiagramm für die Anzahl der richtigen Antworten.
Erkläre, wie man darin die Wahrscheinlichkeit von **b)** ablesen kann.

2.23 Ein Online-Händler weiß, dass durchschnittlich jeder 7. Besucher der Webseite auch tatsächlich einen Einkauf tätigt. In einer Viertelstunde wird die Seite von 20 Personen besucht. X ist die Anzahl der Besucher, die einkaufen. **BC**

a) Interpretiere die folgende Wahrscheinlichkeit im Sachzusammenhang:
$1 - \left(\left(\frac{6}{7}\right)^{20} + \binom{20}{1} \cdot \frac{1}{7} \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^{19}\right)$

b) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 3 dieser Personen einkaufen.

c) Ermittle die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens 2 dieser Personen einkaufen.

d) Bestimme den Erwartungswert und die Standardabweichung von X.
Interpretiere diese beiden Werte im Sachzusammenhang.

AD **2.24** Die Zufriedenheit von Kunden mit einem neuen Computer beträgt p ($0 < p < 1$). In einer Woche wird das Gerät von 30 Personen erworben.

a) Erstelle eine Formel zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit für mindestens 28 zufriedene Kunden bzw. für höchstens 28 zufriedene Kunden.

b) Jemand rechnet: $P(X \geqslant 28) = 1 - P(X \leqslant 28)$.
Erkläre den Fehler in diesem Ansatz und stelle ihn richtig.

B TE **2.25** Die Linkshänder-Quote unter Tennisspielern beträgt in einer bestimmten Niveaustufe 15 %. Berechne für eine 6-köpfige Mannschaft die Wahrscheinlichkeit, dass …

a) … mindestens 1 Linkshänder darunter ist.

b) … 2 oder 3 Linkshänder darunter sind.

c) … mehr als 2 Linkshänder darunter sind.

d) … höchstens 4 Linkshänder darunter sind.

BD TE **2.26** Max verschläft jeden Schultag mit einer Wahrscheinlichkeit von 18 %, Moritz unabhängig davon mit 27 %.

a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass beide Schüler an einem Tag verschlafen.

b) Ermittle die Wahrscheinlichkeit, dass Max in einem Monat (22 Schultage) mindestens 3-mal verschläft.

c) Ermittle die Wahrscheinlichkeit, dass Moritz in einer Woche (5 Schultage) höchstens 1-mal verschläft.

d) Argumentiere, welche der Rechnungen in den Aufgaben **a)** bis **c)** nicht einer Binomialverteilung entspricht.

BD TE **2.27** Zwei Würfel werden 24-mal hintereinander geworfen. X ist die Anzahl der Paschwürfe (Würfe mit gleicher Augenzahl auf beiden Würfeln).

a) Bestimme die Wahrscheinlichkeit für einen Paschwurf in einem Einzelversuch.

b) Berechne Erwartungswert und Standardabweichung von X.

c) Ermittle die Wahrscheinlichkeit für weniger als 4 Paschwürfe.

d) Prüfe, ob bei 24 Würfen die Wahrscheinlichkeit schon 99 % übersteigt, dass zumindest 1 Paschwurf gelingt.
Berechne die Anzahl der Würfe, die notwendig sind, dass die Wahrscheinlichkeit erstmals über 99 % liegt, dass zumindest 1 Paschwurf gelingt.

BC TE **2.28** Eine Firma hat einen eigenen Angestelltenparkplatz für 50 Autos. Erfahrungsgemäß kommt jeder Angestellte mit einer Wahrscheinlichkeit von 40 % an einem Arbeitstag mit dem eigenen Auto zur Firma.

a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass bei 100 Beschäftigten an einem Tag maximal 50 mit dem eigenen Auto kommen.

b) Ermittle die Wahrscheinlichkeit, dass bei 100 Angestellten die Parkplätze nicht ausreichen.

c) Interpretiere im Sachzusammenhang: $\sum_{k=0}^{50} \binom{120}{k} \cdot \left(\frac{40}{100}\right)^k \cdot \left(\frac{60}{100}\right)^{120-k}$

2.29 Eine Firma mit 100 Angestellten stellt fest, dass jeder der Bediensteten die Toilette während der Arbeitszeit im Schnitt 1,5 Minuten pro Stunde besetzt. **BCD**

a) Berechne, mit welcher Wahrscheinlichkeit zu einem zufälligen Zeitpunkt während der Arbeitszeit 5 Toiletten ausreichen.

b) Argumentiere, wie sich die beiden Parameter *n* bzw. *p* dieser Binomialverteilung ändern müssen, damit die Wahrscheinlichkeit in **a)** steigt.

c) Interpretiere, was mit $\left(\frac{58{,}5}{60}\right)^{100}$ berechnet werden kann.

2.30 Ein Schulwart weiß, dass jeder der 500 Schüler/innen am Ende des Schuljahrs mit einer Wahrscheinlichkeit von 7 % den Verlust des Spindschlüssels eingestehen muss. **AB**

a) Erstelle eine Formel, mit der die Wahrscheinlichkeit für mindestens 30 bis höchstens 40 verlorene Schlüssel berechnet werden kann.

b) Jeder verlorene Schlüssel wird ersetzt, die Kosten dafür betragen jeweils 15 €.
Berechne, mit welchen Ersatzschlüsselkosten an dieser Schule im Schnitt gerechnet werden muss.
Ermittle die zu erwartende Standardabweichung von diesem Wert in Euro.

c) Ermittle die notwendige Anzahl der Schüler/innen, damit zu mindestens 99 % davon ausgegangen werden kann, dass ein oder mehrere Schlüssel verloren gehen.

2.31 Ein Glücksrad ist in 10 gleich große Sektoren unterteilt, einer davon führt zum Hauptgewinn. **CD**

a) Vergleiche die folgenden drei Rechenansätze hinsichtlich ihrer Bedeutung im Sachzusammenhang: $0{,}1^3$ bzw. $0{,}1^3 \cdot 0{,}9^5$ bzw. $0{,}1^3 \cdot 0{,}9^5 \cdot \binom{8}{3}$.

b) Erkläre, warum $0{,}1^3 \cdot 0{,}9^5 \cdot 6$ der richtige Ansatz zum Berechnen der Wahrscheinlichkeit von 3 Hauptgewinnen unmittelbar hintereinander bei 5 Fehlversuchen ist.

2.32 Flüge werden in der Regel überbucht. Die Wahrscheinlichkeit beträgt laut statistischen Erhebungen für jedes gebuchte Ticket rund 95 %, dass der entsprechende Passagier auch tatsächlich erscheint. Ein bestimmtes Flugzeug bietet 290 Plätze. **BD**

a) Ermittle, bei welcher Anzahl an verkauften Tickets der Erwartungswert für die tatsächlich mitfliegenden Passagiere 290 beträgt.
Argumentiere, warum diese Anzahl an verkauften Tickets viel zu groß ist.

b) Berechne die Überbuchungswahrscheinlichkeit bei 298 verkauften Tickets.

2.33 Beim Lotto „6 aus 45“ gibt es 8 145 060 mögliche Kombinationen für den Sechser. **B**
Ermittle, wie viele Tipps abgegeben werden müssen, damit die Wahrscheinlichkeit für einen richtig getippten Sechser zumindest 90 % beträgt.
Berechne das dafür eingesetzte Geld, wenn pro Tipp 1,20 € zu zahlen sind.

BD **2.34** Für das Sprachniveau B2 muss eine Lernende ungefähr 2 600 Vokabeln kennen. Sie erinnert sich während einer Prüfung an jede Vokabel mit einer Wahrscheinlichkeit von 80 %. X ist die Anzahl der behaltenen Vokabeln.

a) Berechne den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ von X.

b) Überprüfe, ob die Wahrscheinlichkeit bei ungefähr 68,3 % liegt, dass die Anzahl der behaltenen Vokabeln im Bereich von $\mu - \sigma$ bis $\mu + \sigma$ liegt.

ABD **2.35** In einem Spiellokal kann man probieren, in einer speziellen Dart-Spielform das sogenannte „Bullseye" (Mittelpunkt) der Scheibe zu treffen. Ein Spieler trainiert sich eine Erfolgsquote von 22 % an.

a) Argumentiere, unter welchen mathematischen Bedingungen eine Serie von Versuchen mit mehreren Dartpfeilen als binomialverteilt bezeichnet werden kann.

b) Berechne, wie viele Dartpfeile der Spieler benötigt, um mit mindestens 99,5 % Wahrscheinlichkeit zumindest 1-mal das Bullseye zu treffen.
Zeige rechnerisch, warum diese Forderung nicht auf 100 % erhöht werden kann.

c) Ermittle die Wahrscheinlichkeit für diesen Spieler, in 3 Würfen mehr als 50 % Bullseye-Treffer aufzuweisen.

d) Beurteile, ob es bei 9 Würfen realistisch ist, mindestens 8-mal zu treffen.

e) Eine 9er-Serie (3-mal 3 Dartpfeile) kostet 20 € Teilnahmegebühren, jeder einzelne Treffer ins Bullseye bringt 7 €.
Ermittle, mit welchem Gewinn oder Verlust der Spieler rechnen muss.
Stelle eine Gleichung auf, mit der berechnet werden kann, welchen Wert die Trefferwahrscheinlichkeit aufweisen muss, damit die Teilnahme an dieser Serie fair ist (entspricht einem Gewinn von 0 €).
Löse diese Gleichung.

AB **2.36** Mehrstufige Qualitätskontrolle: Für eine Lieferung in großer Stückzahl gilt, dass die Wahrscheinlichkeit für einen Defekt bei jedem Stück 5 % beträgt. Der Adressat der Lieferung weiß das nicht und prüft mit folgendem Verfahren: Zuerst werden 4 Stück kontrolliert. Sind alle einwandfrei, dann wird die Lieferung angenommen.
Ist 1 Stück defekt, dann bekommt der Lieferant eine zweite Chance. Es wird eine zweite Stichprobe im Umfang von 6 Stück geprüft. Sind jetzt alle einwandfrei, wird die Lieferung doch noch angenommen.
In allen anderen Fällen wird die Lieferung abgelehnt.
Für die 1. Stichprobe ist X $B(4; 0{,}05)$-verteilt bzw. für die 2. Probe Y $B(6; 0{,}05)$-verteilt. Beide Zufallsvariablen beschreiben die Anzahl der defekten Stück.

a) Erstelle für diese Qualitätskontrolle ein Baumdiagramm.
Berechne für alle Äste des Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeit von X bzw. Y.

b) Ermittle, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Lieferung angenommen wird.

2.2 Stetige Wahrscheinlichkeitsverteilungen

2.2.1 Stetige Zufallsvariablen

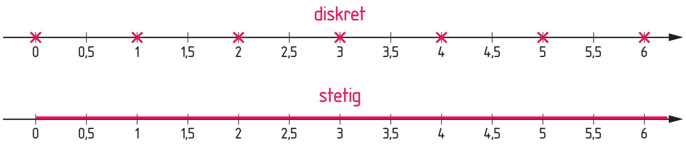
2.37 X ist das Gewicht von Babys bei der Geburt in Kilogramm (kg).
Y ist die Anzahl der Neugeborenen, die ein Gewicht über 3,3 kg aufweisen.
a) Vergleiche die beiden Variablen hinsichtlich der Werte, die sie annehmen können.
b) Erkläre, welchen Wert $P(X = 3{,}3)$ aufweisen muss.

CD

a) Y ist eine diskrete Zufallsvariable und kann Werte aus $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$ annehmen.
„Diskret" bedeutet, wie in Abschnitt 2.1 angeführt, dass die Zufallsvariable nur endlich (oder abzählbar unendlich) viele Werte annehmen kann.
X hingegen kann jeden beliebigen Wert annehmen, zumindest in einem sinnvollen Bereich, also auch Dezimalzahlen, theoretisch jede Zahl aus $\mathbb{R}$, zB 3,23593... kg.

Eine Zufallsvariable X heißt **stetig**, wenn sie jeden beliebigen Wert eines Intervalls, also unendlich viele Werte, annehmen kann.

Der grundsätzliche Unterschied zwischen diskreten und stetigen Werten lässt sich anhand dieses Beispiels am besten an einem Zahlenstrahl veranschaulichen.



b) Rein mathematisch kann kein Baby der Welt exakt 3,3 kg schwer sein, weil es dann tatsächlich 3,30000... (mit unendlichen vielen Nullen) kg wiegen müsste. Selbst der exakte Wert 3,3 kg wäre nur ein Wert von unendlich vielen möglichen Werten. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine stetige Zufallsvariable genau einen bestimmten Wert annimmt, ist also prinzipiell null.
In der Praxis wird stets die Wahrscheinlichkeit für ein bestimmtes Intervall angegeben. Wenn also jemand sagt, dass das Neugeborene 3,3 kg wiege, dann meint er je nach Genauigkeit der Aussage beispielsweise ein Gewicht zwischen 3,25 und 3,35 kg.

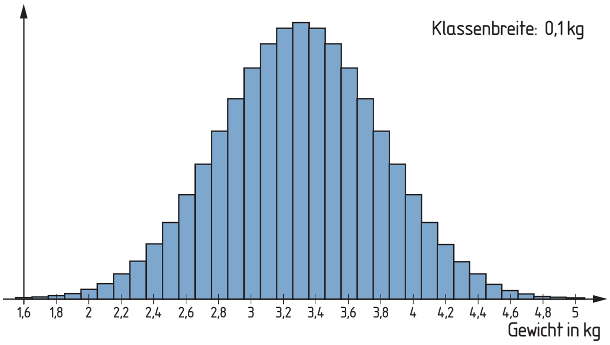
Das Gleichheitszeichen bei stetigen Zufallsvariablen
$P(X = x) = 0$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ („X kann einen Wert nicht unendlich genau annehmen.")
Daraus folgt: $P(X < x) = P(X \leqslant x)$ bzw. $P(X > x) = P(X \geqslant x)$

2.38 Die Wahrscheinlichkeiten für bestimmte Intervalle des Gewichts von Neugeborenen können beispielsweise als Histogramme mit konstanter Klassenbreite dargestellt werden. Auf der nächsten Seite sind drei verschiedene Diagramme abgebildet.
a) Beschreibe die Auswirkung der jeweiligen Klassenbreite auf die grafische Darstellung.
b) Erläutere, welche Summe die Flächen der Säulen jeweils ergeben.

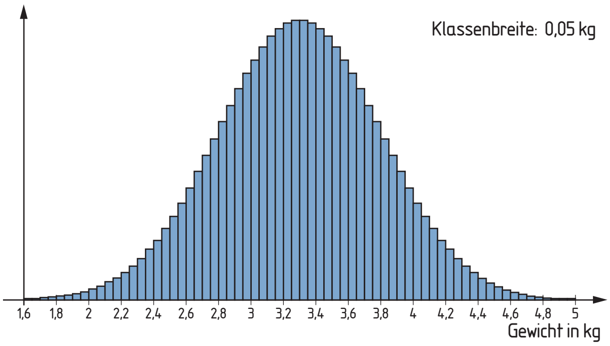
CD

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

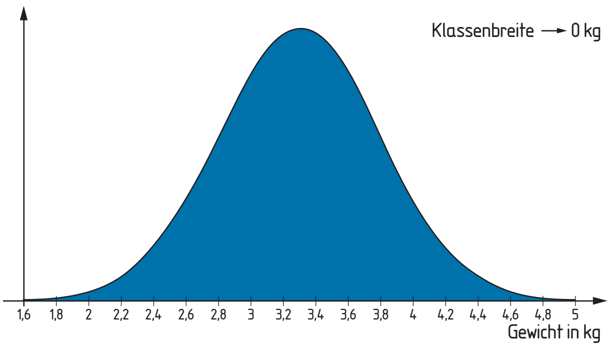
a) Im **ersten Diagramm** sieht man eine Klassenbreite von 0,1 kg. In einem Histogramm erhält man die Wahrscheinlichkeit nicht aus der Säulenhöhe, sondern aus Säulenbreite mal Säulenhöhe. Die größte Wahrscheinlichkeit liegt hier bei der Klassenmitte 3,3 kg (Intervall von 3,25 bis 3,35 kg).



Im **zweiten Diagramm** wird die Klassenbreite auf 0,05 kg verringert. Dies bewirkt, dass die Säulen schmäler werden. Die schmäleren Säulen haben zur Folge, dass die treppenartigen Sprünge von Säule zu Säule kleiner werden.



Wird nun im **dritten Diagramm** die Klassen- und damit Säulenbreite sehr, sehr klein (mathematisch konvergiert die Breite gegen null), dann ergeben die schon oben beschriebenen Effekte ein neuartiges Bild. Säulen sind nicht mehr zu erkennen (sie sind „unendlich schmal") und es entsteht eine durchgängige Fläche, oben begrenzt durch eine stetige Kurve.



b) Wird so wie hier eine Wahrscheinlichkeit dargestellt, dann müssen die Säulenflächen in Summe 1 (100 %) ergeben. Dasselbe gilt dann auch für die Fläche zwischen Kurve und x-Achse im dritten Diagramm. Damit kann die Wahrscheinlichkeit mithilfe der **Integralrechnung** bestimmt werden. Die entsprechende Wahrscheinlichkeitsfunktion wird bei stetigen Zufallsvariablen **Dichtefunktion** genannt.

Für die **(Wahrscheinlichkeits-)Dichtefunktion *f*** einer stetigen Zufallsvariable X gilt:

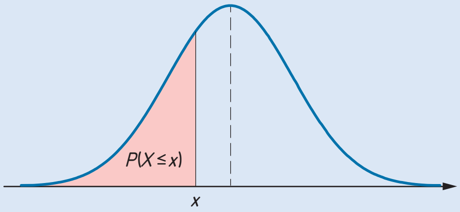
$$f(x) \geqslant 0 \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

Die Verteilungsfunktion für eine bestimmte Stelle ergibt sich im diskreten Fall durch das Aufsummieren der Wahrscheinlichkeiten bis zu dieser Stelle (Wahrscheinlichkeit für „höchstens x"). Bei stetigen Zufallsvariablen führt der gleiche Vorgang zum Grenzfall einer unendlichen Summe und damit wiederum zum Integrieren.

Für die **Verteilungsfunktion *F*** gilt dann:

$$F(x) = P(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

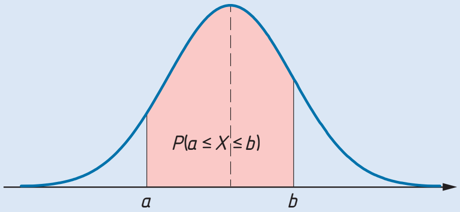
„Wahrscheinlichkeit, dass X höchstens x ist."



Interpretation der Wahrscheinlichkeit als Fläche:

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_{a}^{b} f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

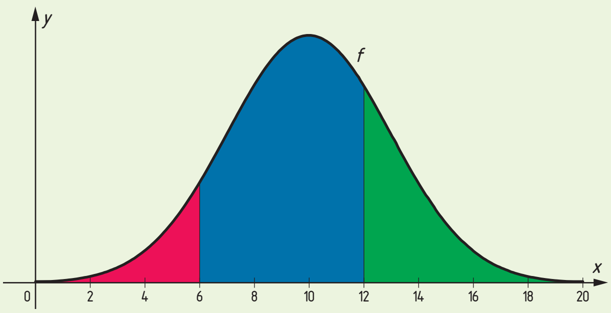
„Wahrscheinlichkeit, dass X zwischen a und b liegt."



Anmerkung: Analog zur diskreten Zufallsvariable erhält man mit dem Integral als unendliche Summe $E(X) = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx$ bzw. $V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \cdot f(x)\,dx$, $\sigma = \sqrt{V(X)}$.

2.39 Die Dichtefunktion f einer Zufallsvariable X ist dargestellt.
Interpretiere die rote, blaue und grüne Fläche jeweils als Wahrscheinlichkeiten.
Modelliere diese Wahrscheinlichkeiten als Integral.

AC



Lösung:

Rot: $P(X \leqslant 6) = \int_{-\infty}^{6} f(x)\,dx$

Blau: $P(6 \leqslant X \leqslant 12) = \int_{6}^{12} f(x)\,dx$

Grün: $P(X \geqslant 12) = \int_{12}^{\infty} f(x)\,dx$

2.40 Diskrete oder stetige Zufallsvariable?

D

a) Prüfe im Folgenden jeweils, ob es sich um eine diskrete oder um eine stetige Zufallsvariable handelt. Gib dazu typische Werte an.

Zufallsvariable	diskret	stetig
(1) Füllmenge von Packungen in Gramm		
(2) Anzahl der fehlerhaft gefüllten Packungen		
(3) Anzahl der richtigen Tipps beim Lotto		
(4) Körpergröße einer Person in Zentimeter		
(5) Kleidungsgrößen		
(6) Augenzahl beim Würfeln		
(7) Zeit zwischen zwei Würfen in Sekunden		

b) Die Zufallsvariable X beschreibt das Bruttoeinkommen von Europäer/innen. Begründe, warum X diskret ist, oft aber auch als stetig interpretiert wird.

AD **2.41** X ist die Körpergröße von Neugeborenen in Zentimeter (cm).

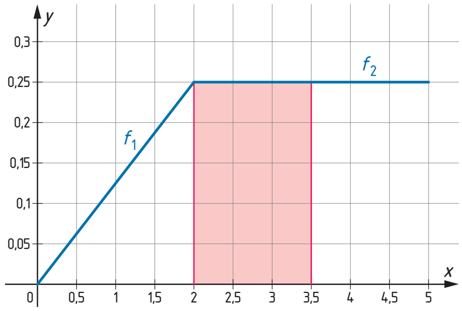
a) Erkläre, wie man die Wahrscheinlichkeit für eine Körpergröße von 51 cm ansetzt.

b) Erstelle einen Ansatz mit dem Integral der Dichtefunktion f für die Wahrscheinlichkeit $P(X \approx 51)$, einmal für eine Genauigkeit auf ganze Zentimeter, einmal auf Millimeter.

BD **2.42** Die Dichtefunktion f einer Zufallsvariable X setzt sich aus den abschnittsweise definierten Funktionen $f_1(0 \leqslant x \leqslant 2)$ und $f_2(2 \leqslant x \leqslant 5)$ zusammen und ist sonst 0.

a) Zeige, dass f die Voraussetzungen für eine Dichtefunktion erfüllt.

b) Berechne die Wahrscheinlichkeit, die der markierten Fläche entspricht.



2.2.2 Normalverteilung

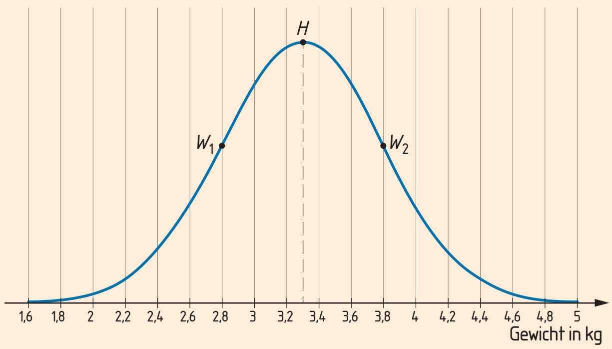
Das Bild, das sich am Beispiel des Gewichts von Neugeborenen gezeigt hat, entspricht einer **Normalverteilung**. Sie ist die bekannteste und wichtigste stetige Wahrscheinlichkeitsverteilung und wird auch **Gauß-Verteilung** genannt (nach dem deutschen Mathematiker Carl Friedrich Gauß, 1777 – 1855). Ihre Dichtefunktion weist eine charakteristische Glockenform auf, weshalb sie auch **Gauß'sche Glockenkurve** genannt wird.

Die Glockenform ist für unzählige Szenarien ein äußerst praktikables Modell. Der Grund dafür liegt im sogenannten zentralen Grenzwertsatz: Die Verteilung einer Summe von n identisch und unabhängig verteilten Zufallsvariablen strebt nämlich für $n \to \infty$ gegen eine Normalverteilung. Daher eignet sich eine Normalverteilung vor allem dann, wenn eine größere Zahl von zufälligen Einflüssen auf eine Messgröße einwirkt. Dies trifft für Messungen und Beobachtungen in den Natur- und Wirtschaftswissenschaften ebenso zu wie etwa für Messungen bei psychologischen Experimenten.

Die Zufallsvariable X ist **normalverteilt** mit dem Erwartungswert μ und der Standardabweichung σ oder **$N(\mu; \sigma)$-verteilt**[1], wenn die (Wahrscheinlichkeits-) Dichtefunktion f lautet:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad \text{... Gauß'sche Glockenkurve}$$

C **2.43** Das Gewicht X von Neugeborenen ist normalverteilt mit $\mu = 3{,}3$ kg und $\sigma = 0{,}5$ kg. Interpretiere die Dichtefunktion f hinsichtlich der wichtigsten Gesichtspunkte einer Kurvendiskussion.



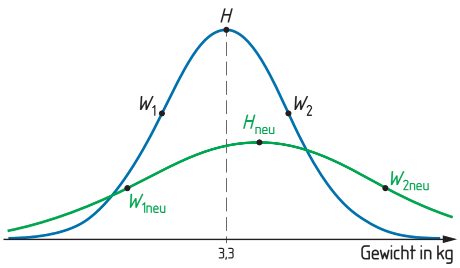
[1] Gelegentlich sieht man auch die Schreibweise mit der Varianz statt der Standardabweichung: $N(\mu; \sigma^2)$

Definitionsmenge: *f* ist theoretisch für jedes Körpergewicht definiert, praktisch ergeben sich natürliche Grenzen. (Sehr kleine oder gar negative und sehr große Zahlen sind sinnlos.)
Asymptotisches Verhalten, Nullstellen: *f* nähert sich links und rechts immer mehr der x-Achse, bleibt aber immer oberhalb und besitzt deswegen keine Nullstellen.
Extrempunkte: *f* besitzt einen Hochpunkt beim Erwartungswert 3,3 kg.
Symmetrie: *f* ist symmetrisch bezüglich der Senkrechten beim Erwartungswert 3,3 kg.
Wendepunkte: *f* weist zwei Wendepunkte auf an den Stellen 3,3 – 0,5 = 2,8 kg und 3,3 + 0,5 = 3,8 kg. Sie bilden die Grenzen der sogenannten **σ-Umgebung**.

Eigenschaften der Gauß'schen Glockenkurve *f*

- definiert für alle $x \in \mathbb{R}$, Funktionswerte immer positiv (dh. $F(x) > 0$), keine Nullstellen
- x-Achse ist Asymptote für $x \to \pm\infty$
- ein Hochpunkt an der Stelle $x = \mu$
- symmetrisch bezüglich der senkrechten Geraden $x = \mu$
- Wendepunkte an den Stellen $x_1 = \mu - \sigma$ und $x_2 = \mu + \sigma$
- Die Fläche unter der Kurve wird als Wahrscheinlichkeit interpretiert:
  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ und $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$

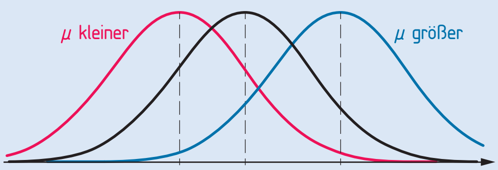
2.44 Die historische Entwicklung der letzten Jahre deutet darauf hin, dass das mittlere Geburtsgewicht leicht steigt und die mittlere Abweichung von diesem Mittelwert tendenziell größer wird. **D**
Erkläre, wie sich die Kurve der Normalverteilung mit μ = 3,3 kg und σ = 0,5 kg ändert, wenn beide Werte größer werden.



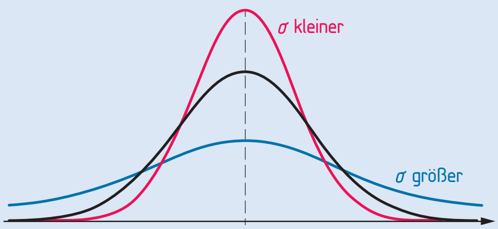
Durch einen größeren Erwartungswert über 3,3 kg verschiebt sich der Hochpunkt und damit die ganze Glocke auf der x-Achse nach rechts.
Steigt zusätzlich die Standardabweichung auf einen Wert über 0,5 kg, dann werden größere Abweichungen wahrscheinlicher, wodurch die Glocke etwas „breiter" wird (der horizontale Abstand zwischen den Wendepunkten vergrößert sich). Gleichzeitig sinkt die Wahrscheinlichkeit ein wenig für Ergebnisse nahe am Erwartungswert, wodurch die Glocke in der Mitte auch „flacher" wird (die y-Koordinaten des Hochpunkts und der Wendepunkte werden kleiner).

Einfluss der Parameter μ und σ auf die Gauß'sche Glockenkurve

μ größer → verschiebt Glocke nach rechts
μ kleiner → verschiebt Glocke nach links



σ größer → Glocke flacher und breiter (relativ zur Ausgangskurve höhere Wahrscheinlichkeiten für große Abweichungen)
σ kleiner → Glocke steiler und schmäler (geringere Wahrscheinlichkeiten für größere Abweichungen)

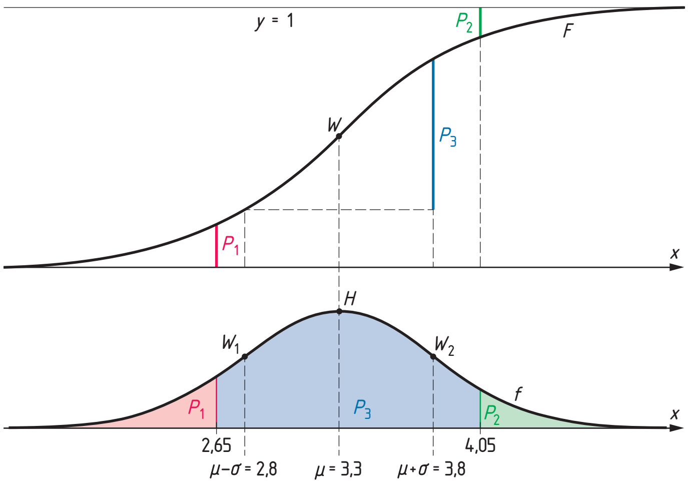


D **2.45** Das Geburtsgewicht von Babys ist normalverteilt mit $\mu = 3{,}3$ kg und $\sigma = 0{,}5$ kg.

a) Erkläre, wie man aus der Dichtefunktion f der Normalverteilung die Verteilungsfunktion F skizzieren kann.

b) Kennzeichne die folgenden Wahrscheinlichkeiten in der Darstellung von f bzw. F:
$P_1 = P(X \leqslant 2{,}65)$; $P_2 = P(X \geqslant 4{,}05)$; $P_3 = P(2{,}8 \leqslant X \leqslant 3{,}8)$

c) Kennzeichne in der Dichtefunktion f die σ-/2σ-/3σ-Umgebungen.



a) In der Verteilungsfunktion werden die Wahrscheinlichkeiten von links nach rechts aufsummiert. Deswegen steigt F im Intervall $-\infty < x < \infty$ streng monoton zwischen den Funktionswerten 0 und 1, da die Wahrscheinlichkeit von 100 % nicht überschritten werden kann.
Weil die Wahrscheinlichkeiten bis zum Hochpunkt der Dichtefunktion f laufend größer werden, danach kleiner, steigt die Verteilungsfunktion F zuerst progressiv, dann degressiv. An der Stelle des Hochpunkts der Dichtefunktion f befindet sich der Wendepunkt $W(3{,}3|0{,}5)$ der Verteilungsfunktion F. Seine y-Koordinate bedeutet, dass Werte zu 50 % unter- bzw. oberhalb von μ liegen.

b) Für die Dichtefunktion f und die Verteilungsfunktion F gilt jeweils:

$\boldsymbol{P_1}$ = Flächeninhalt unter f im links-offenen Intervall von $-\infty$ bis 2,65 kg
$\boldsymbol{P_1}$ = Funktionswert von F an der Stelle 2,65

$$\Rightarrow \boldsymbol{P_1} = P(X \leqslant 2{,}65) = \int_{-\infty}^{2{,}65} f(x)\,dx = F(2{,}65)$$

$\boldsymbol{P_2}$ = Flächeninhalt unter f im rechts-offenen Intervall von 4,05 kg bis ∞
$\boldsymbol{P_2}$ = Differenz zwischen 1 und dem Funktionswert von F an der Stelle 4,05

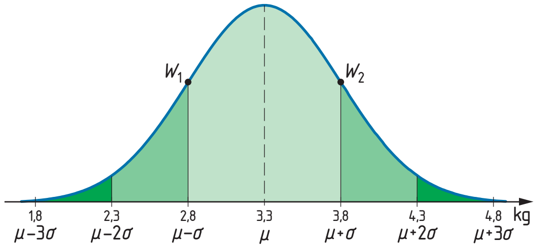
$$\Rightarrow \boldsymbol{P_2} = P(X \geqslant 4{,}05) = 1 - P(X \leqslant 4{,}05) = 1 - \int_{-\infty}^{4{,}05} f(x)\,dx = 1 - F(4{,}05)$$

$\boldsymbol{P_3}$ = Flächeninhalt unter f im beidseitig begrenzten Intervall von 2,8 kg bis 3,8 kg.
$\boldsymbol{P_3}$ = Differenz zwischen den Funktionswerten von F an den Stellen 3,8 kg und 2,8 kg.

$$\Rightarrow \boldsymbol{P_3} = P(2{,}8 \leqslant X \leqslant 3{,}8) = P(X \leqslant 3{,}8) - P(X \leqslant 2{,}8) =$$
$$= \int_{-\infty}^{3{,}8} f(x)\,dx - \int_{-\infty}^{2{,}8} f(x)\,dx = \int_{2{,}8}^{3{,}8} f(x)\,dx = F(3{,}8) - F(2{,}8)$$

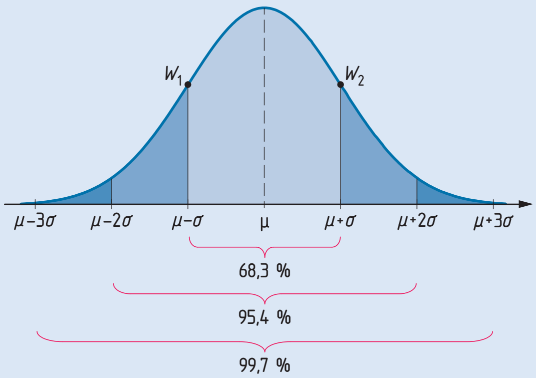
Eigenschaften der Verteilungsfunktion *F* der Normalverteilung
- definiert für alle $x \in \mathbb{R}$, Funktionswerte immer positiv (dh. $F(x) > 0$), keine Nullstellen
- x-Achse ist Asymptote für $x \to -\infty$; $y = 1$ ist Asymptote für $x \to \infty$
- Wendepunkt an der Stelle $x = \mu$ mit den Koordinaten $(\mu|0{,}5)$
- punktsymmetrisch bezüglich des Wendepunkts
- Die Funktionswerte werden als Wahrscheinlichkeiten interpretiert:
  $P(X \leqslant a) = F(a)$ und $P(X \geqslant b) = 1 - F(b)$ und $P(a \leqslant X \leqslant b) = F(b) - F(a)$

c) **Umgebungen** sind (meist) symmetrische Intervalle (Streubereiche) rund um den Erwartungswert. Die häufig verwendeten σ-Umgebungen umfassen dabei jeweils die Stellen von $\mu - \sigma$ bis $\mu + \sigma$ (Wendestellen) im Falle der 1σ-Umgebung bzw. $\mu \pm 2\sigma$ und $\mu \pm 3\sigma$ bei 2σ- und 3σ-Umgebungen. Da hier $\sigma = 0{,}5$ kg ergeben sich die Intervalle laut Skizze.



σ-Umgebungen
Unabhängig von μ und σ gilt immer:
σ-Umgebung (σ-Intervall):
$P(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma) \approx 68{,}27\,\%$
2σ-Umgebung (2σ-Intervall):
$P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 95{,}45\,\%$
3σ-Umgebung (3σ-Intervall):
$P(\mu - 3\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 3\sigma) \approx 99{,}73\,\%$

Die Grenzen dieser Umgebungen werden auch ein-/zwei-/dreifache σ-Grenzen genannt.



2.46 Das Geburtsgewicht ist $N(3{,}3;\,0{,}5)$-verteilt (Werte in kg).

BCD

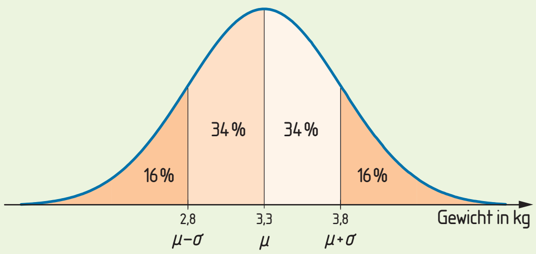
a) Erkläre, bis zu welcher Stelle ein links-offenes bzw. rechts-offenes Intervall reichen muss, damit die Wahrscheinlichkeit für diesen Bereich über 50 % liegt.

b) Skizziere die Dichtefunktion.
Kennzeichne die Wahrscheinlichkeiten der vier Bereiche, die sich durch die Grenzen 2,8 und 3,3 sowie 3,8 kg ergeben.

c) Schätze die Wahrscheinlichkeiten für mindestens 4 kg Geburtsgewicht bzw. für höchstens 3,5 kg Geburtsgewicht mithilfe der Bereiche aus ***b)***.

Lösung:

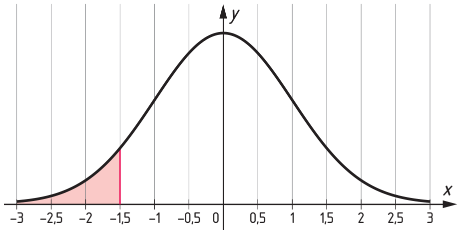
a) μ unterteilt die Glocke in zwei symmetrische Flächen mit jeweils 50 % Wahrscheinlichkeit. Darum gilt für größere Wahrscheinlichkeiten:
Links-offen: Intervall von $-\infty$ bis zu einer Stelle, die größer als μ ist.
Rechts-offen: Intervall von einer Stelle, die kleiner als μ ist, bis ∞.

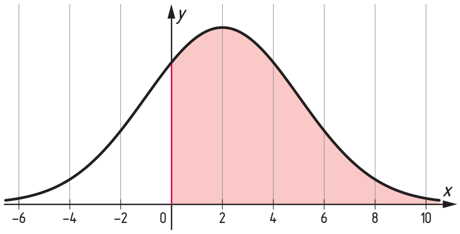


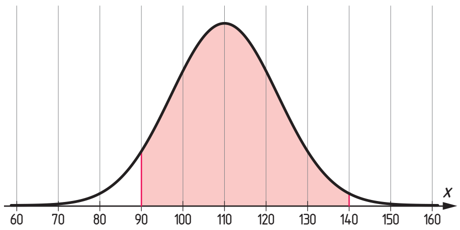
b) Siehe Abbildung.

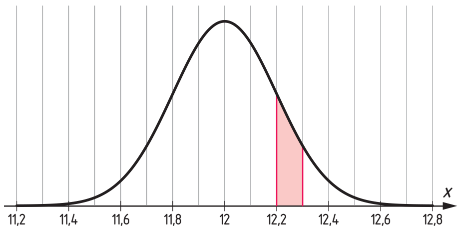
c) 4 kg liegt über 3,8 kg, deswegen beträgt die Wahrscheinlichkeit weniger als 16 %.
3,5 kg liegt zwischen 3,3 und 3,8 kg. Darum beträgt die Wahrscheinlichkeit zwischen 50 % und 84 %.

C **2.47** Lies jeweils μ, σ und die Intervalle ab, für die die Wahrscheinlichkeit markiert ist.

a)


b)


c)


d)


AC **2.48** Veranschauliche jeweils die Dichtefunktion der Normalverteilung.
Markiere die angegebene Wahrscheinlichkeit.

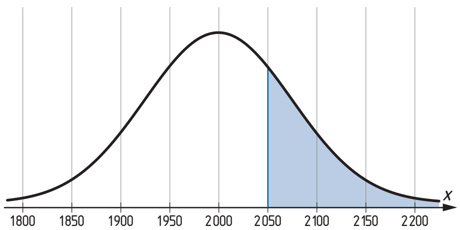
a) $\mu = 25$; $\sigma = 3$; $P(X \geqslant 30)$

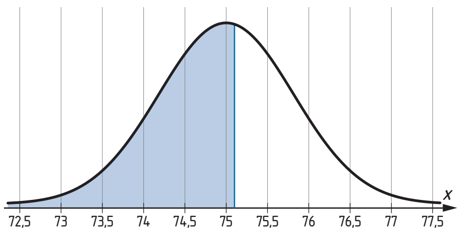
b) $\mu = -5$; $\sigma = 0{,}5$; $P(X \leqslant -4{,}75)$

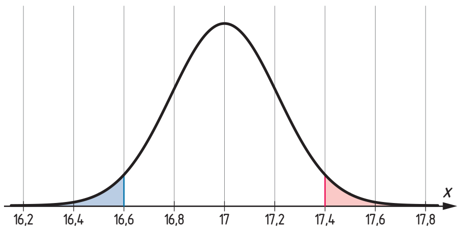
c) $N(4; 2)$; $P(3 \leqslant X \leqslant 6)$

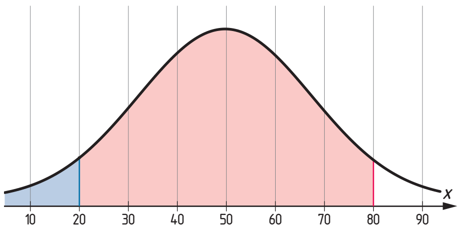
d) $\mu = 10$; $\sigma = 10$; $P(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma)$

BC **2.49** Die Wahrscheinlichkeiten der nicht markierten Bereiche sind gegeben.
Lies die Grenzen der ein bzw. zwei markierten Intervalle ab.
Ermittle jeweils deren Wahrscheinlichkeit.

a) $P(X < 2\,050) \approx 69{,}1\ \%$


b) $P(X > 75{,}1) \approx 46{,}0\ \%$


c) $P(16{,}6 < X < 17{,}4) \approx 89{,}0\ \%$


d) $P(X > 80) \approx 6{,}7\ \%$


AD **2.50** Fertigkuchen einer bestimmten Marke weisen die Form eines Zylinders auf. Der Radius ist normalverteilt mit $\mu = 26$ cm und $\sigma = 0{,}5$ cm.

a) Skizziere die Dichtefunktion f und die Verteilungsfunktion F übereinander.

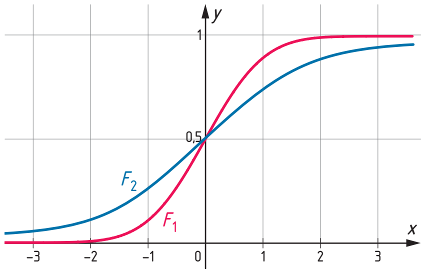
b) Erläutere im Sachzusammenhang, warum F streng monoton steigend ist.

c) Argumentiere für die Funktion F, warum der Wendepunkt $W(26|0{,}5)$ lautet.

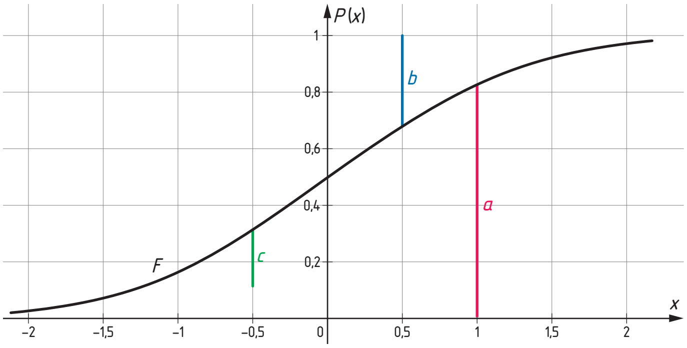
2.51 F_1 und F_2 sind die Verteilungsfunktionen zweier normalverteilten Zufallsvariablen. **D**

a) Erkläre anhand der graphischen Darstellung, bei welcher Zufallsvariable die größere Standardabweichung vorliegt.

b) Erläutere, wie sich eine Änderung des Erwartungswertes μ auf den Graphen der Verteilungsfunktion auswirkt.



2.52 Die Verteilungsfunktion F einer $N(0; 1)$-verteilten Zufallsvariable ist dargestellt. Lies die durch die Strecken a, b und c dargestellten Wahrscheinlichkeiten und die dazugehörigen x-Intervalle ab. **C**



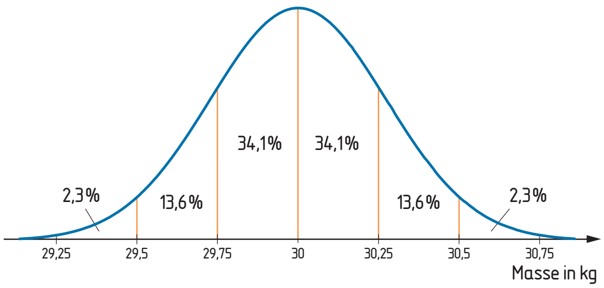
2.53 Die Zufallsvariable X ist normalverteilt mit $\mu = 10$ und $\sigma = 2$. **AC** TE

a) Interpretiere die Angabe im Hinblick auf die Koordinaten des Wendepunktes der Verteilungsfunktion F.

b) Zeichne die Verteilungsfunktion F.

c) Kennzeichne die folgenden Wahrscheinlichkeiten am Graphen von F:
$P_1(X \leqslant 10)$, $P_2(X \geqslant 8)$, $P_3(11 \leqslant X \leqslant 13)$
Lies die jeweiligen Wahrscheinlichkeitswerte ab.

2.54 Eine Firma füllt Mehlsäcke normalverteilt ab. X ist die Masse der Säcke in Kilogramm mit $\mu = 30$ kg und $\sigma = 0{,}25$ kg. **ABD**



a) Zeige, wie man mithilfe der Wahrscheinlichkeiten für die σ- und 2σ-Umgebung auf die im Diagramm angeführten Prozentzahlen kommt.

b) $P(X \leqslant 29{,}5)$; $P(X \leqslant 30{,}2)$; $P(X \geqslant 30)$; $P(X \geqslant 29{,}7)$; $P(29{,}6 \leqslant X \leqslant 30{,}6)$;
$P(30 - 0{,}8 \leqslant X \leqslant 30 + 0{,}8)$
Schätze das Ergebnis der angegebenen Wahrscheinlichkeiten mithilfe der im Diagramm markierten Bereiche.
Erstelle einen möglichen Angabentext für diese Wahrscheinlichkeiten. Beginne den Text jeweils mit: „Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass ein Mehlsack eine Masse ...“

2.2.3 Normalverteilung: Berechnen von Wahrscheinlichkeiten

Da die Wahrscheinlichkeiten normalverteilter Zufallsvariablen Flächen unter der Dichtefunktion (bzw. Funktionswerten der entsprechenden Stammfunktion) entsprechen, muss für ihre Berechnung die Integralrechnung herangezogen werden.

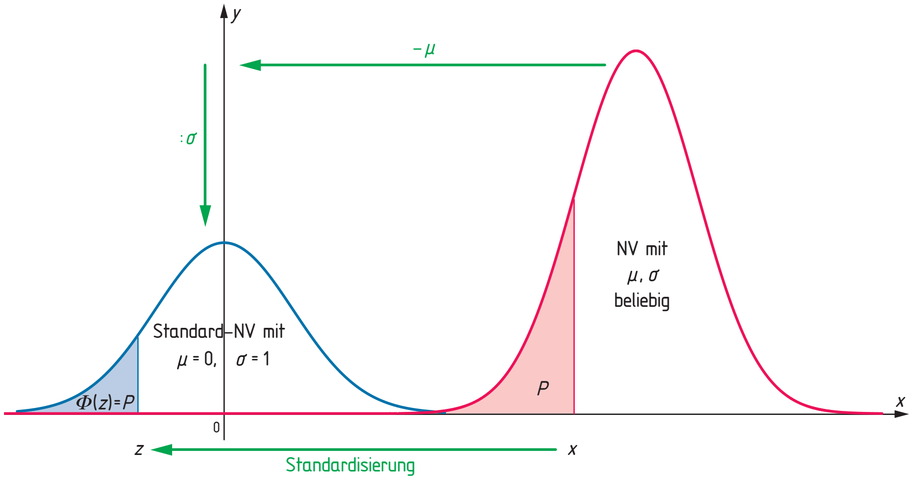
Das Integral der Dichtefunktion der Glockenkurve $f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ kann nur mit sehr großem Aufwand berechnet werden.

In der Praxis wird die Berechnung heute im Allgemeinen mittels Technologieeinsatz vollzogen.

Die Berechnung kann aber auch mittels einer vorgefertigten Tabelle mit den Werten einer Normalverteilung mit $\mu = 0$ und $\sigma = 1$ erfolgen. Diese spezielle Verteilung heißt **Standardnormalverteilung *N*(0; 1)**. Jede beliebige Normalverteilung kann in die Standardnormalverteilung transformiert („übergeführt") werden.

Die Transformationsvorschrift für die x-Koordinaten der Dichtefunktion lautet $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$. Die Zufallsvariable X wird damit in eine neue Zufallsvariable Z transformiert[1)].

Grafisch lässt sich dies gut veranschaulichen:



Standardnormalverteilung
Die standardisierte Zufallsvariable Z ist normalverteilt mit dem **Erwartungswert $\mu = 0$** und der **Standardabweichung $\sigma = 1$**. Ihre Dichtefunktion wird mit φ (statt f) und ihre Verteilungsfunktion Φ (statt F) bezeichnet (sprich: kleines bzw. großes „phi"). Die Koordinate x wird in die Koordinate $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ transformiert:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot x^2} \qquad \Phi(x) = P(Z \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt$$

Standardisierung: Wenn X allgemein $N(\mu; \sigma)$-verteilt ist, dann ist Z die standardisierte, $N(0; 1)$-verteilte Zufallsvariable. Es gilt:

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

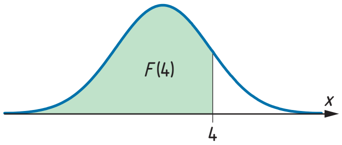
1) Statt z und Z werden häufig auch u und U verwendet.

Lösungsfälle für vier typische Grundaufgaben

2.55 Das Gewicht X von Neugeborenen ist normalverteilt mit $\mu = 3{,}3$ kg und $\sigma = 0{,}5$ kg.
Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass ein Neugeborenes ...
a) ... höchstens 4 kg wiegt.
b) ... zumindest 3 kg wiegt.
c) ... zwischen 3 und 4 kg wiegt.
d) ... um höchstens 0,7 kg vom Erwartungswert abweicht.

B

a) Links-offenes Intervall: Die Wahrscheinlichkeit kann gemäß den Eigenschaften der Verteilungsfunktion direkt berechnet werden.
$P(X \leqslant 4) = F(4)$
TI-Nspire:
Calculator/Menu/5: Wahrscheinlichkeit/ 5: Verteilungen/2: NormalCdf



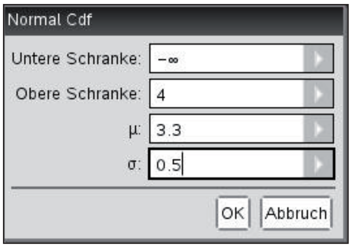


Tabelle: $\Phi\left(\frac{4-3{,}3}{0{,}5}\right) = \Phi(1{,}4) \approx 91{,}9\ \%$

Die vollständige Tabelle befindet sich im Tabellenanhang des Buchs auf Seite 138.

z	→ 0
0,00	0,50000
0,10	53983
	...
1,40	91924

b) Rechts-offenes Intervall: Die Wahrscheinlichkeit wird mithilfe des Gegenereignisses berechnet.
$P(X \geqslant 3) = 1 - P(X \leqslant 3) = 1 - F(3)$
TI-Nspire:

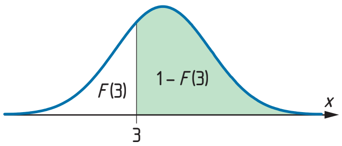


Tabelle: $\Phi\left(\frac{3-3{,}3}{0{,}5}\right) = \Phi(-0{,}6)$
Es gilt: $\boldsymbol{\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)}$
$1 - \Phi(-0{,}6) = 1 - (1 - \Phi(0{,}6)) = \Phi(0{,}6) \approx 72{,}6\ \%$

z	→ 0
0,00	0,50000
0,10	53983
	...
0,60	72575

c) Beidseitig begrenztes Intervall: Die Wahrscheinlichkeit ergibt sich als Differenz laut Integralrechnung.
$P(3 \leqslant X \leqslant 4) = F(4) - F(3)$
TI-Nspire:

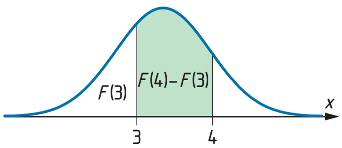
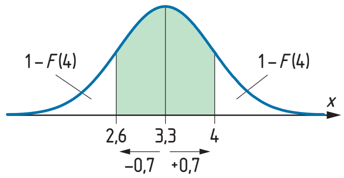


Tabelle: $\Phi(1{,}4) - \Phi(-0{,}6) \approx 64{,}5\ \%$

d) Symmetrisches Intervall um den Erwartungswert:
Die Wahrscheinlichkeit wird wie in ***c)*** berechnet.
$P(3{,}3 - \mathbf{0{,}7} \leq X \leq 3{,}3 + \mathbf{0{,}7}) = F(4) - F(2{,}6)$
Alternativer Rechenweg mit **Tabelle**:
$F(4) - F(2{,}6) = F(4) - (1 - F(4)) =$
$= F(4) - 1 + F(4) = 2 \cdot F(4) - 1 =$
$= 2 \cdot \Phi\left(\frac{0{,}7}{0{,}5}\right) - 1 = 2 \cdot \Phi(1{,}4) - 1 \approx 83{,}8\,\%$



Technologieeinsatz zu diesem Thema für TI82-84, Excel und Geogebra-CAS siehe www.hpt.at (Schulbuch Plus für Schüler/innen)

Lösungsfälle im Überblick

Links-offenes Intervall: $P(X \leq x) = F(x)$

mit Standardisierung: $P(X \leq x) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$

Rechts-offenes Intervall: $P(X \geq x) = 1 - F(x)$

mit Standardisierung: $P(X \geq x) = 1 - \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$

Beidseitig begrenztes Intervall: $P(x_1 \leq X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$

mit Standardisierung: $P(x_1 \leq X \leq x_2) = \Phi\left(\frac{x_2 - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - \mu}{\sigma}\right)$

Symmetrisches Intervall: $P(\mu - c \leq X \leq \mu + c) = F(\mu + c) - F(\mu - c) = 2 \cdot F(\mu + c) - 1$

mit Standardisierung: $P(\mu - c \leq X \leq \mu + c) = 2 \cdot \Phi\left(\frac{(\mu + c) - \mu}{\sigma}\right) - 1 = 2 \cdot \Phi\left(\frac{c}{\sigma}\right) - 1$

Eine Skizze der Glockenkurve und das Markieren der jeweils gesuchten Wahrscheinlichkeit ist prinzipiell immer zu empfehlen.

B **2.56** Die Bauzeit für die Außen- und Innenrenovierung eines Hauses ist normalverteilt und wird von einer Baufirma mit erwartungsgemäß 75 Werktagen bei einer Standardabweichung von 5 Tagen angegeben.
Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass …

a) … höchstens 68 Tage gearbeitet wird.
b) … mindestens 78 Tage gearbeitet wird.
c) … zwischen 65 und 75 Tage gearbeitet wird.
d) … die Arbeitszeit um höchstens 1 Tag von der angegebenen Zeit abweicht.

Lösung: $\mu = 75$; $\sigma = 5$

a) $P(X \leq 68) = F(68) = \Phi\left(\frac{68 - 75}{5}\right) = \Phi(-1{,}4) \approx 8{,}1\,\%$

b) $P(X \geq 78) = 1 - F(78) = 1 - \Phi\left(\frac{78 - 75}{5}\right) = 1 - \Phi(0{,}6) \approx 27{,}4\,\%$

c) $P(65 \leq X \leq 75) = F(75) - F(65) = \Phi\left(\frac{75 - 75}{5}\right) - \Phi\left(\frac{65 - 75}{5}\right) = \Phi(0) - \Phi(-2) \approx 47{,}7\,\%$

d) $P(74 \leq X \leq 76) = F(76) - F(74) = 2 \cdot F(76) - 1 = 2 \cdot \Phi\left(\frac{1}{5}\right) - 1 =$
$= 2 \cdot \Phi(0{,}2) - 1 \approx 15{,}9\,\%$

2.57 Ein reiner Stadt-Autofahrer analysiert seine Fahrtstrecken, sie sind normalverteilt mit $\mu = 3{,}5$ km und $\sigma = 1{,}2$ km. B

a) Berechne den Anteil seiner Fahrten unter 1 km.
b) Berechne die Wahrscheinlichkeit für eine Fahrtstrecke von mindestens 5 km.
c) Ermittle die Wahrscheinlichkeit für Fahrten zwischen 4 und 5 km.
d) Bestimme den Anteil der Fahrten, die maximal 1 km von μ abweichen.

2.58 Die Lebensdauer eines empfindlichen elektronischen Geräts wird vom Hersteller als normalverteilt mit $\mu = 3$ Jahre und $\sigma = 9$ Monate angegeben. BD
a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass das Gerät länger als 4 Jahre hält.
b) Ermittle die Wahrscheinlichkeit, dass das Gerät 3 bis 4 Jahre hält.
c) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass das Gerät nicht einmal 1 Jahr hält.
d) Erläutere, warum man die Wahrscheinlichkeit für eine Lebensdauer zwischen 1,5 und 4,5 Jahren ohne Rechnung angeben kann.

2.59 Der jährliche Wasserverbrauch in einem 4-köpfigen Haushalt ist normalverteilt mit einem Erwartungswert von 95 m^3 und einer Standardabweichung von 6 m^3. BCD

a) Ermittle die Wahrscheinlichkeit, dass der Wasserverbrauch im dreistelligen Bereich liegt.
Argumentiere, für welches andere Intervall die Wahrscheinlichkeit gleich groß sein muss.
b) Berechne die Wahrscheinlichkeit für eine Abweichung von mehr als 10 m^3 vom zu erwartenden Durchschnitt.
Beschreibe zu diesem Ereignis das Gegenereignis in Worten.

2.60 In einem großen Konzern ist der Arbeiterbruttolohn normalverteilt mit einem Erwartungswert von 1.900 € und einer Standardabweichung von 200 €. BD
a) Berechne, wie viel Prozent der Arbeiter einen Lohn unter 1.550 € erhalten.
b) Ermittle die Wahrscheinlichkeit für einen Lohn zwischen 2.100 € und 2.300 €.
Erkläre, welches andere Lohnintervall eine gleich hohe Wahrscheinlichkeit aufweisen muss.
c) Berechne, wie viel Prozent der Arbeiter mehr als 2.500 € brutto verdienen.

2.61 Metallhobelmaschinen schleifen Platten bis zu einer bestimmten Dicke. Die Dicke X der Platten ist normalverteilt mit $\mu = 2{,}5$ cm und $\sigma = 0{,}04$ cm. AB
a) Platten, die um mehr als 1 mm von μ abweichen, gelten vorerst als unbrauchbar.
Berechne, mit welcher Wahrscheinlichkeit dies eintritt.
Die Hobelmaschinen erzeugen in einem bestimmten Zeitraum 1 500 Platten. Zu dicke Platten werden nachbearbeitet, zu dünne Platten sind Ausschussware.
Ermittle, wie viele Platten direkt auszuscheiden sein werden.
b) Erstelle passend zur Aufgabenstellung einen Angabentext für folgende Lösungsansätze:
$1 - F(2{,}55)$; $2 \cdot F(2{,}52) - 1$; $2 \cdot F(2{,}45)$.
Beginne den Text jeweils mit: „Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass ..."

ABD **2.62** Die Semmeln eines Bäckereibetriebs weisen eine normalverteilte Masse von durchschnittlich 75 g auf, wobei die Standardabweichung 18 g beträgt.

a) In einer Zeitung steht: „Dies bedeutet, dass die Masse um bis zu 18 g vom Durchschnitt abweichen kann."
Erkläre mithilfe von Wahrscheinlichkeiten, warum diese Aussage falsch ist.

b) Unter 45 g zählt eine Semmel zum sogenannten Jourgebäck (Kleingebäck). Berechne, mit welcher Wahrscheinlichkeit dies der Fall ist.

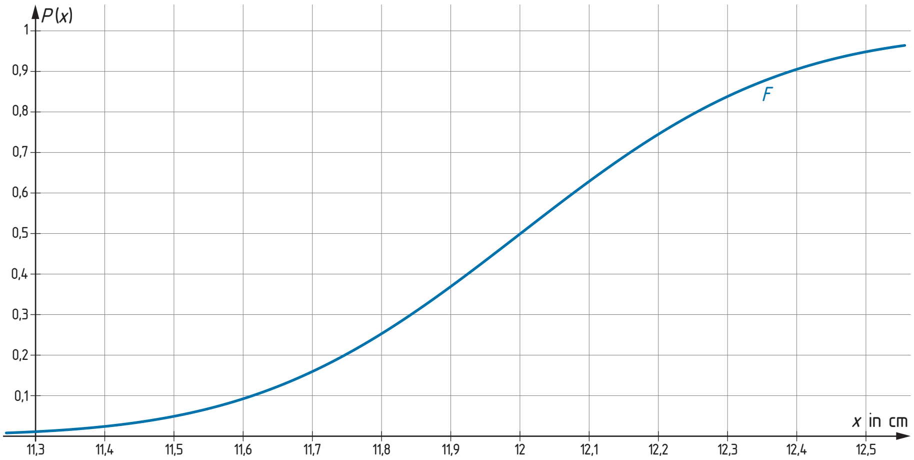
c) Ermittle die Wahrscheinlichkeit, dass eine Semmel genau die Masse des Erwartungswertes aufweist (Toleranz: ± 0,5 g).

d) Erstelle drei verschiedene Ansätze zum Berechnen der Wahrscheinlichkeit, dass eine Semmel in der 15-g-Umgebung von μ liegt.

D **2.63** **a)** Erläutere, welchen Bereich $a\sigma$-Umgebungen umfassen ($a \in \mathbb{R}$).

b) Zeige, dass die Wahrscheinlichkeiten der σ-/2σ-/3σ-Umgebungen 68,3 % bzw. 95,4 % bzw. 99,7 % betragen.

CD **2.64** Viertelliter-Dosen werden automatisiert von einer Maschine abgefüllt. Die Füllhöhe ist normalverteilt mit dem Erwartungswert 12 cm. In der Grafik ist die entsprechende Verteilungsfunktion F dargestellt.



a) Erkläre, woran man am Graphen erkennen kann, dass der Erwartungswert 12 cm beträgt.

b) Bei einer Füllmenge von weniger als 11,6 cm protestieren Konsumentenschützer. Lies ab, mit welcher Wahrscheinlichkeit dies geschieht.

c) Lies ab, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Füllhöhe 12,3 cm überschritten wird.

d) Lies ab, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Füllhöhe um maximal 2 mm vom Wert 12 cm abweicht.

e) Ca. 16 % der Werte liegen unterhalb der σ-Umgebung.
Erläutere, wie man diese Wahrscheinlichkeit erhält.
Lies mithilfe dieser Werte die Größe der Standardabweichung ab.

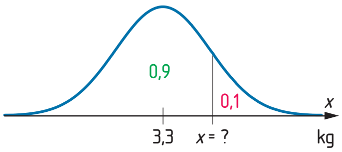
2.2.4 Normalverteilung: Berechnen von Intervallgrenzen und Parametern

In diesem Abschnitt werden die bisher behandelten Aufgaben um sogenannte „Umkehraufgaben“ erweitert, in denen bestimmte Wahrscheinlichkeiten gegeben und dazugehörige Intervallgrenzen, der Erwartungswert oder die Standardabweichung gesucht sind. Wiederum gilt: Dieser Teilbereich kann mit oder ohne Standardisierung behandelt werden.

2.65 Das Gewicht X von Neugeborenen ist normalverteilt mit $\mu = 3{,}3$ kg und $\sigma = 0{,}5$ kg.
Berechne, ab welchem Gewicht ein Baby zu den 10 % der schwersten Neugeborenen zählt.

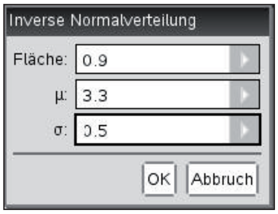
B

Zuerst wird eine Skizze erstellt und die gesuchte Intervallgrenze geschätzt. Diese Schätzung soll zumindest so gut sein, dass die Lage im Vergleich zu μ korrekt ist, hier also rechts von 3,3 kg.



Dann werden die sich durch die Grenze ergebenden Intervalle mit den angegebenen Wahrscheinlichkeiten beschriftet, hier 10 % laut Angabe für den Bereich oberhalb der Grenze und damit 90 % für den restlichen Bereich.
Da die Verteilungsfunktion stets die Wahrscheinlichkeit für das links-offene Intervall angibt, sollte der Gleichungsansatz stets über das links-offene Intervall erfolgen: $F(x) = 0{,}9$.
Um in dieser Gleichung x zu isolieren, wird die Umkehrfunktion benötigt: $x = F^{-1}(0{,}9)$.

Die Werte der Umkehrfunktion werden mittels Technologieeinsatz ermittelt.
Mit TI-Nspire:
Calculator/5: Wahrscheinlichkeit/5: Verteilungen/ 3: Inverse Normalverteilung/Werte eingeben/OK
Oder direkt eingeben: **invNorm(P, μ, σ)**



Mithilfe der Standardisierung lautet der Rechenweg wie folgt:
$$\Phi\left(\frac{x-3{,}3}{0{,}5}\right) = 0{,}9 \;\Rightarrow\; \frac{x-3{,}3}{0{,}5} = \Phi^{-1}(0{,}9) \;\Rightarrow\; x = 1{,}28155\ldots \cdot 0{,}5 + 3{,}3 \approx 3{,}94 \text{ kg}$$
Über 3,94 kg liegen also nur 10 % der Neugeborenen.

SB PLUS

Technologieeinsatz zu diesem Thema für TI82-84, Excel und Geogebra-CAS siehe www.hpt.at (Schulbuch Plus für Schüler/innen)

Umkehrfunktion F^{-1} der Verteilungsfunktion
Wenn in der Verteilungsfunktion $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$ die Wahrscheinlichkeit $P(X \leq x)$ gegeben und die Grenze x eines links-offenen Intervalls gesucht ist, gilt:
$$x = F^{-1}(F(x)) = F^{-1}(P(X \leq x))$$
Analog gilt für die Standardnormalverteilung:
$$\frac{x-\mu}{\sigma} = \Phi^{-1}(P(X \leq x) \;\Rightarrow\; x = \Phi^{-1}(P(X \leq x)) \cdot \sigma + \mu$$

B

TE

2.66 Für die Füllmenge einer 1-kg-Zuckerpackung beträgt der Erwartungswert der normalverteilten Einfüllmasse 1 016 g bei einer Standardabweichung von 12 g.

a) Berechne die Grenze, unterhalb der die 10 % der leichtesten Packungen liegen.

b) Ermittle die Grenze, die nur von 15 % der Packungen überschritten wird.

c) Bestimme die symmetrisch um den Erwartungswert liegenden Grenzen, innerhalb derer sich 90 % der Produkte befinden.

d) Unterhalb der 1-kg-Grenze sollen nur mehr 5 % der Packungen fallen. Dazu muss entweder mehr eingefüllt (also μ erhöht) oder die Maschine besser eingestellt (also σ verkleinert) werden.
Berechne für diese beiden Fälle die neuen Werte von μ bzw. σ.

Lösung:

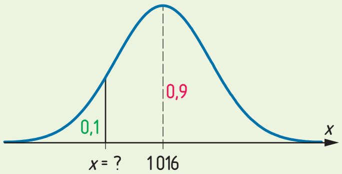
a) $F(x) = 0{,}1$ bzw. $\Phi\left(\frac{x - 1\,016}{12}\right) = 0{,}1$

Anwenden der Umkehrfunktion:

$x = F^{-1}(0{,}1)$ bzw. $\frac{x - 1\,016}{12} = \Phi^{-1}(0{,}1)$

und $x = \Phi^{-1}(0{,}1) \cdot 12 + 1\,016$

Mittels Technologie: $x \approx 1\,000{,}6$ g

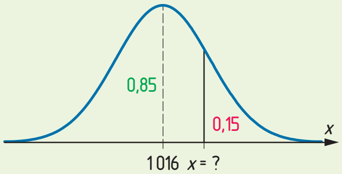


b) Ansatz über das links-offene Intervall:

$x = F^{-1}(0{,}85)$ bzw.

$\frac{x - 1\,016}{12} = \Phi^{-1}(0{,}85)$

Mittels Technologie: $x \approx 1\,028{,}4$ g



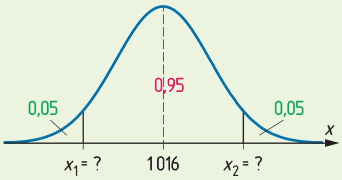
c) Ansatz über das links-offene Intervall:

$x_1 = F^{-1}(0{,}05)$ bzw.

$\frac{x_1 - 1\,016}{12} = \Phi^{-1}(0{,}05)$

Mittels Technologie: $x_1 \approx 996{,}3$ g

$\Rightarrow\ x_2 = \mu + (\mu - 996{,}3) \approx 1\,035{,}7$ g



d) Ansatz über das links-offene Intervall:

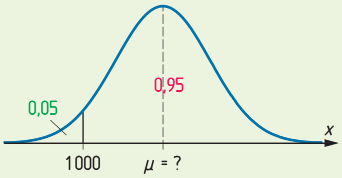
$F^{-1}(0{,}05) = 1\,000$

Mittels Technologie, zB TI-Nspire:

nsolve(invNorm(0.05,m,12)=1000,m)

bzw. $\frac{1\,000 - \mu}{12} = \Phi^{-1}(0{,}05)$

$\Rightarrow\ \mu \approx 1\,019{,}7$ g



$F^{-1}(0{,}05) = 1\,000$

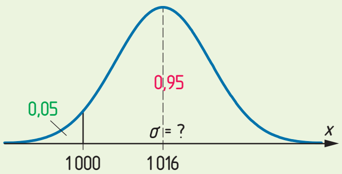
Mittels Technologie, zB TI-Nspire:

nsolve(invNorm(0.05,1016,s)=1000,s,1)

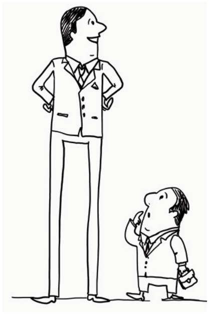
(**1** ist ein Startwert für das Programm)

bzw. $\frac{1\,000 - 1\,016}{\sigma} = \Phi^{-1}(0{,}05)$

$\Rightarrow\ \sigma \approx 9{,}7$ g



2.67 Die Körpergröße von Menschen in Mitteleuropa ist näherungsweise $N(178; 8)$-verteilt für Männer und $N(166; 6)$-verteilt für Frauen (Maße in cm). BC



a) Berechne die Wahrscheinlichkeit für eine Größe über 190 cm bei beiden Geschlechtern.
b) Bestimme, welche Größe je nach Geschlecht nur von 10 % überschritten wird.
c) Ermittle diejenige Größe, unterhalb derer nur mehr 5 % des jeweiligen Geschlechts liegen.
d) Berechne den symmetrischen Bereich rund um den Erwartungswert, in dem 90 % der Männer bzw. der Frauen liegen.
e) Zeichne die Glockenkurven beider Geschlechter in dasselbe Koordinatensystem. Beschreibe, wie sich die unterschiedlichen Erwartungswerte und Standardabweichungen auf die graphische Darstellung auswirken.

2.68 Der IQ (Intelligenzquotient) wird durch einen Intelligenztest festgestellt, der so konzipiert ist (sofern er seriös ist), dass die Ergebnisse normalverteilt sind und ca. 68,3 % der Menschen zwischen 85 und 115 Punkte erreichen. BC
a) Interpretiere diese Angabe hinsichtlich der Werte μ und σ.
b) Ab einem IQ von 130 spricht man von einer Hochbegabung. Schätze ab, wie viel Prozent der Menschen dies ungefähr betrifft.
c) Berechne, mit welchem IQ man zum intelligentesten Zehntel zählt.
d) Ermittle, innerhalb welcher Grenzen um den Erwartungswert 90 % liegen.

2.69 Bei einer großangelegten Untersuchung einer Konsumentenschutzorganisation fällt ein Weinproduzent durch zu häufigen „Etikettenschwindel" (weniger Inhalt als angegeben) auf. Auf den Etiketten steht: „Inhalt: 750 ml", die Abfüllanlage arbeitet normalverteilt mit dem Erwartungswert 754,5 ml und der Standardabweichung 4,1 ml. B
a) Berechne, mit welcher Wahrscheinlichkeit weniger als 750 ml eingefüllt werden.
b) Der Weinproduzent strebt nun eine Wahrscheinlichkeit von nur 1 % für einen Etikettenschwindel an. Dazu gibt es prinzipiell drei Möglichkeiten: (1) Die Etikettenbeschriftung bezüglich der Inhaltsmenge wird geändert oder die Anlage füllt (2) mehr oder (3) besser ein.
Ermittle die neuen Werte für (1) Füllinhalt bzw. (2) μ bzw. (3) σ.

2.70 Der Anteil der wahlberechtigten Bevölkerung, der eine bestimmte Partei wählt, sei nach Auskunft eines Meinungsforschungsinstituts normalverteilt mit $\mu = 31{,}5$ Prozentpunkte und $\sigma = 3{,}5$ Prozentpunkte. B

a) Bestimme unter diesen Voraussetzungen denjenigen Stimmenanteil der Partei, der nur mehr mit 1 % Wahrscheinlichkeit überschritten wird.
b) Berechne den Bereich rund um den Erwartungswert, in dem laut Institut das Wahlergebnis zu 80 % liegen wird.
c) Ein anderes Meinungsforschungsinstitut erhält für dasselbe symmetrische Intervall (auf volle Prozent gerundet) aus **b)** eine Wahrscheinlichkeit von 95 %. Ermittle, mit welcher Standardabweichung dieses Institut kalkuliert.

B **2.71** Bei einem Reaktionstest muss ein Knopf auf ein bestimmtes Signal hin gedrückt werden. Die Zeiten sind normalverteilt, 75 % weisen eine Reaktionszeit innerhalb des symmetrischen Intervalls um μ zwischen 0,20 und 0,36 Sekunden auf.

a) Ermittle Erwartungswert und Standardabweichung.

b) Berechne, bei welcher Reaktionszeit die Wahrscheinlichkeit nur 1 % beträgt, dass jemand noch schneller den Knopf drückt.

c) Wenn zur Reaktionszeit noch eine Bewegung hinzukommt (zB beim Bremsen im Auto, wenn der Fuß noch das Pedal betätigen muss), dann erhöht sich die durchschnittliche Zeit bis zum Eintritt des gewünschten Ereignisses.
Berechne den neuen Erwartungswert bei σ = 0,1 Sekunden, wenn mit einer Wahrscheinlichkeit von 15,9 % eine Reaktionszeit von über 1 Sekunde vorliegt.

BCD **2.72** Die langjährige Durchschnittstemperatur im Jänner in Innsbruck beträgt –0,7 °C, die Standardabweichung 2,5 °C. Es liege eine Normalverteilung vor.

a) Berechne, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Durchschnittstemperatur über dem Gefrierpunkt liegt.

b) Ermittle, welche Jänner-Temperatur nur mehr mit einer Wahrscheinlichkeit von 10 % unterschritten wird.
Interpretiere dieses Ergebnis in Hinblick auf die mittleren 80 % und die oberen 10 % der Jänner-Temperaturen.

c) Erkläre die Auswirkungen eines möglicherweise in Zukunft höheren Erwartungswerts (bei konstantem σ) bzw. einer höheren Standardabweichung (bei konstantem μ) auf die Wahrscheinlichkeit für extremere Temperaturen im Jänner.

B **2.73** Eine Fluglinie erlaubt Handgepäck mit höchstens 8 kg. Die Auswertung der automatisch aufgezeichneten Daten ergibt, dass die Masse eines Handgepäckstücks normalverteilt ist mit μ = 6,2 kg und σ = 1,1 kg.

a) Berechne, wie viele von 255 Handgepäckstücken wahrscheinlich zu schwer sind.

b) Bestimme den symmetrischen Bereich, in dem die Gepäckstücke zu 98 % liegen.
Ermittle für diesen Bereich, der einer $a\sigma$-Umgebung entspricht, den Faktor a.

c) Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass ein Gepäckstück um maximal 25 % der zu erwartenden Masse vom Erwartungswert abweicht.

d) Die Fluglinie senkt die Höchstgrenze auf 7 kg.
Berechne bei gleichbleibendem σ den notwendigen Erwartungswert, wenn der Anteil übergewichtiger Handgepäckstücke nur 5 % betragen soll.

BD **2.74** Eine Radarstation zeichnet die gemessenen Fahrzeug-Geschwindigkeiten auf. Sie sind normalverteilt mit μ = 68 km/h und σ = 9 km/h.

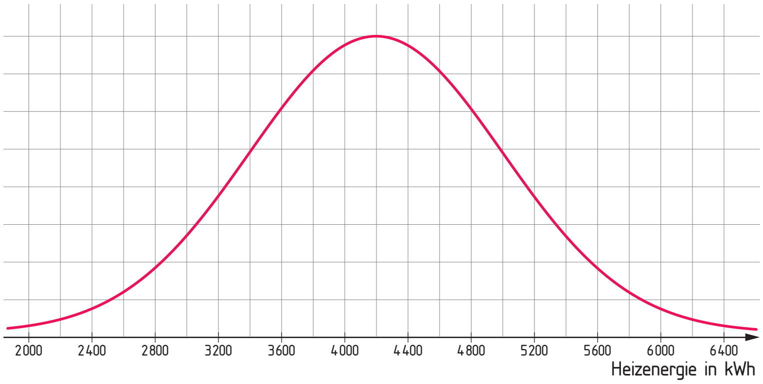
a) Berechne den Anteil der Geschwindigkeitsübertretungen, wenn die Geschwindigkeitsbegrenzung 80 km/h lautet.

b) Bestimme die Geschwindigkeitsgrenze, die nur zu 0,1 % überschritten wird.

c) Erkläre, wie groß der Median der gemessenen Geschwindigkeiten ist.

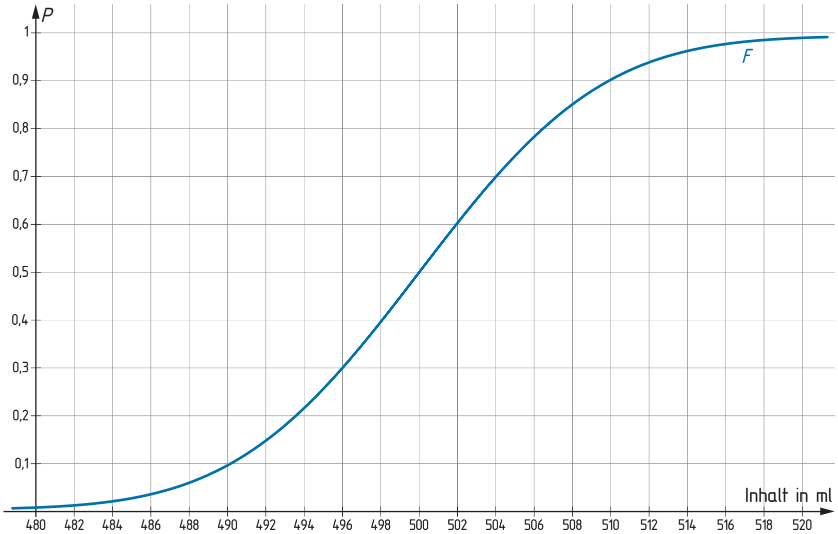
d) Ermittle die 1. bzw. 3. Quartile der gemessenen Geschwindigkeiten.
Beurteile, ob das Anfertigen eines Boxplots bei normalverteilten Zufallsvariablen möglich ist.

2.75 Der Energieverbrauch in Kilowattstunden (kWh) für das Heizen einer Wohnung ist in einer großen Wohnanlage über Jahre hinweg normalverteilt. C



a) Lies aus dem Graphen der Dichtefunktion die Werte von μ und σ ab.
b) Lies mithilfe der σ-Umgebungen ungefähr ab, unterhalb welcher Grenze die 2 % der sparsamsten Wohnungen liegen bzw. welche Grenze die 15 % derjenigen mit dem höchsten Bedarf überschreiten.
Markiere diese beiden Wahrscheinlichkeiten im Diagramm.

2.76 Ein Putzmittel wird normalverteilt mit einer Nennfüllmenge von 500 ml (Erwartungswert) abgefüllt. Im Kleingedruckten auf der Flasche wird eine Mindestfüllmenge von 490 ml angegeben. Die Verteilungsfunktion *F* ist abgebildet. BCD TE



a) Lies ab, mit welcher Wahrscheinlichkeit dies nicht eingehalten wird.
Berechne daraus die hier vorliegende Standardabweichung.
b) Lies diejenige Abfüllmenge ab, die nur zu 15 % überschritten wird.
Markiere diese Grenze im Diagramm.
c) Kennzeichne im Diagramm, wie man die Grenzen des symmetrischen Intervalls um den Erwartungswert ablesen kann, dessen Wahrscheinlichkeit 40 % beträgt.
d) Die durchschnittlich abgefüllte Menge wird so erhöht, dass die Grenze der unteren 10 % bei 492 ml liegt.
Erkläre, wie man den neuen Graphen von *F* aus dem alten erhält.

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Zusammenfassung

Eine **Zufallsvariable *X*** ist eine Funktion, die jedem Ergebnis eines Zufallsexperiments eindeutig eine reelle Zahl x_i ($i = 1, 2, \ldots$) zuordnet.

diskrete Zufallsvariable	**stetige Zufallsvariable**
Wahrscheinlichkeitsfunktion *f*: $f(x) = \begin{cases} P(X) = x_i & \text{für } x = x_i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$	**(Wahrscheinlichkeits-)Dichtefunktion *f*:** $f(x) \geqslant 0$ und $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$
(Wahrscheinlichkeits-)Verteilungsfunktion *F*: $F(x) = P(X \leqslant x) = \sum_i f(x_i)$ für $x_i \leqslant x$	$F(x) = P(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$
Erwartungswert: $E(X) = \mu = x_1 \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = x_2) + \ldots = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X = x_i)$ **Varianz:** $V(X) = x_1^2 \cdot P(X = x_1) + x_2^2 \cdot P(X = x_2) + \ldots - \mu^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot P(X = x_i)\right) - \mu^2$ **Standardabweichung:** $\sigma = \sqrt{V(X)}$	**Wahrscheinlichkeitsberechnung als Flächenintegral:** $P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$ Aufgrund der Stetigkeit gilt: $P(X = x) = 0$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ Daraus folgt: $P(X < x) = P(X \leqslant x)$

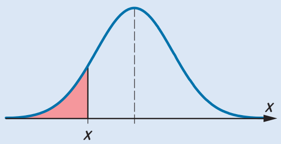
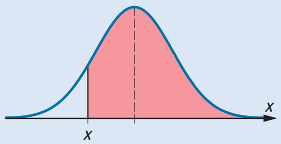
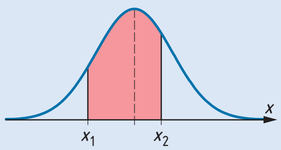
Binomialverteilung $B(n; p)$: Ein Zufallsexperiment mit nur zwei möglichen Ergebnissen, wobei die Wahrscheinlichkeit p für Erfolg konstant bleibt, wird n-mal unabhängig wiederholt.

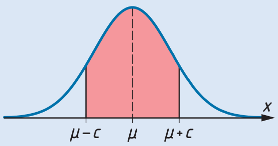
$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k} \quad \text{mit } k = 0, 1, 2, \ldots, n \text{ Erfolge}$$

$$\mu = n \cdot p \qquad \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$$

Normalverteilung $N(\mu; \sigma)$: $f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ … Gauß'sche Glockenkurve

Standardnormalverteilung $N(0; 1)$: $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2} \cdot x^2}$ und $F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$

Lösungsfälle	**Lösungsweg allgemein bzw. mit Standardisierung**
	**1. Links-offenes Intervall** $P(X \leqslant x) = F(x) \quad \left[= \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right]$ „Umkehraufgaben" werden in der Regel über das links-offene Intervall angesetzt: $x = F^{-1}(P)$
	**2. Recht-offenes Intervall** $P(X \geqslant x) = 1 - F(x) \quad \left[= 1 - \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right]$
	**3. Begrenztes Intervall** $P(x_1 \leqslant X \leqslant x_2) = F(x_2) - F(x_1)$ $\left[= \Phi\left(\frac{x_2-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma}\right)\right]$ Merkregel: „obere minus untere Grenze"



Symmetrisches Intervall (Umgebung, Streubereich)
$P(\mu - c \leqslant X \leqslant \mu + c) = 2 \cdot F(\mu + c) - 1$
$\left[= 2 \cdot \Phi\left(\frac{c}{\sigma}\right) - 1\right]$

Spezielle Streubereiche
σ-Umgebung (σ-Intervall): $P(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma) \approx 68{,}27\,\%$
2σ-Umgebung (2σ-Intervall): $P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 95{,}45\,\%$
3σ-Umgebung (3σ-Intervall): $P(\mu - 3\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 3\sigma) \approx 99{,}73\,\%$

Φ-Werte: Diese werden entweder mit Technologie berechnet (empfohlen) oder in der Normalverteilungstabelle (Φ-Tabelle) auf Seite 138 abgelesen.
Regel für das Ablesen negativer Werte:
Aufgrund der Symmetrie der Glockenkurve gilt $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$.

Vermischte Aufgaben zur Vertiefung

2.77 Auf dem Maturaball wird ein Spiel angeboten, bei dem der Inhalt eines mit allen möglichen Euro- und Cent-Münzen gefüllten Gefäßes geschätzt werden muss. Die geschätzten Geldbeträge sind normalverteilt mit μ = 842,25 € und σ = 34,07 €. Tatsächlich befinden sich 815 € im Gefäß. Wer sich um höchstens 2 € verschätzt, kommt in die Preisverlosung.

BD

a) Erkläre mithilfe von σ-Umgebungen, wie groß ungefähr die Wahrscheinlichkeit ist, dass der tatsächliche Betrag unterschätzt wird.
Prüfe deine Schätzung mit einer genauen Berechnung.
b) Ermittle diejenige Grenze, über der nur mehr 1 % der Schätzungen liegen.
c) Berechne, wie viele von 800 abgegebenen Tipps voraussichtlich in die Preisverlosung gelangen.
d) Tatsächlich kommen 27 Tipps in die Preisverlosung. Für jeden Tipp darf 1-mal gewürfelt werden, im Falle eines Sechsers gewinnt man einen Casino-Abend.
Erkläre, mit wie vielen zu vergebenden Preisen man ungefähr rechnen muss.
Berechne die Wahrscheinlichkeit für mehr als 6 zu vergebende Preise.

2.78 Beim Glücksspiel „Chuck a Luck" setzt man auf eine der sechs Würfelzahlen. Dann wird 3-mal gewürfelt. X ist die Anzahl der gewürfelten Augenzahlen, die der gesetzten Augenzahl entsprechen.

ABC

a) Erstelle eine Tabelle mit allen Wahrscheinlichkeiten für die Werte von X.
b) Die Zufallsvariable Y beschreibt den Reingewinn des Spielers, der 100 € pro Spiel setzt.
Der Einsatz geht bei $X = 0$ verloren. Bei allen anderen Werten $X = k$ bekommt der Spieler seinen Einsatz zurück und das k-Fache seines Einsatzes dazu.
Ermittle den Erwartungswert von Y.
Interpretiere diesen Erwartungswert.

ABCD TE **2.79** **Horoskop(okus)**

a) In Horoskopen werden häufig drei verschiedene Aussagetypen kombiniert: fast immer zutreffende Aussagen (Wahrscheinlichkeit des Eintreffens $p_1 = 0{,}99$) wie „Manchmal zweifeln Sie, ob Sie das Richtige tun"; vage, aber oft zutreffende Aussagen ($p_2 = 0{,}9$) wie „Die Lage in diesem Krisengebiet bleibt kritisch"; typische Fifty-Fifty-Aussagen ($p_3 = 0{,}5$) wie „In der Liebe erleben Sie heute Schönes".
Ein Horoskop besteht aus drei (stochastisch unabhängigen) Aussagen, jeweils eine jedes Typs. X ist die Anzahl der Aussagen, die auf dich zutreffen.
- Erstelle eine Tabelle der Wahrscheinlichkeitsfunktion für alle Werte von X.
- Ermittle Erwartungswert und Standardabweichung von X.
- Interpretiere die beiden Werte im Sachzusammenhang.

b) 40 % der Österreicher/innen glauben an Horoskope, jede/r 10. davon ist auch bereit, für ein individuell erstelltes Horoskop zu zahlen. Ein Astrologe befragt täglich und unabhängig voneinander 200 Personen, ob sie sich für 39 € ein persönliches Horoskop anfertigen lassen möchten.
- Erläutere, warum hier eine Binomialverteilung vorliegt.
- Ermittle, mit welchen täglichen Einnahmen der Astrologe rechnen kann.
- Berechne, mit welcher Wahrscheinlichkeit nicht mehr als 10 Personen ein Horoskop käuflich erwerben.
- Bestimme die Anzahl der Personen, die der Astrologe pro Tag wenigstens befragen muss, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99 % zumindest ein Horoskop zu verkaufen.

BC TE **2.80** **Wunderpillen**

Besonders leichtgläubige Menschen lassen sich oft überreden, falls sie sich zu dick fühlen, bestimmte überteuerte Pillen zur Gewichtsreduktion zu kaufen. Diese Pillen sind in Bezug auf das Körpergewicht wirkungslos, beinhalten aber Bestandteile, die bei Überdosierung ($>$ 500 mg pro Tag) gefährlich werden können. Die Betroffenen nehmen erfahrungsgemäß diesen Inhaltsstoff normalverteilt mit dem Erwartungswert 400 mg und der Standardabweichung 50 mg zu sich.

a) Zeichne die Dichtefunktion f dieser Normalverteilung.
Markiere die Wahrscheinlichkeit für eine Gefährdung.
Lies diese Wahrscheinlichkeit möglichst genau ab.

b) Ermittle die Wahrscheinlichkeit für eine Dosierung des bedenklichen Stoffs zwischen 500 und 540 mg.

c) Berechne, in welchem symmetrischen Bereich um den Erwartungswert 99 % der Dosierungen liegen.

d) Bestimme die richtige Standardabweichung, wenn im Intervall zwischen 271 mg und 529 mg tatsächlich nur 90 % der Dosierungen liegen.

e) Ermittle für σ = 50 mg den neuen Erwartungswert, wenn die Wahrscheinlichkeit für eine Gefährdung auf 25 % steigt.

BCD

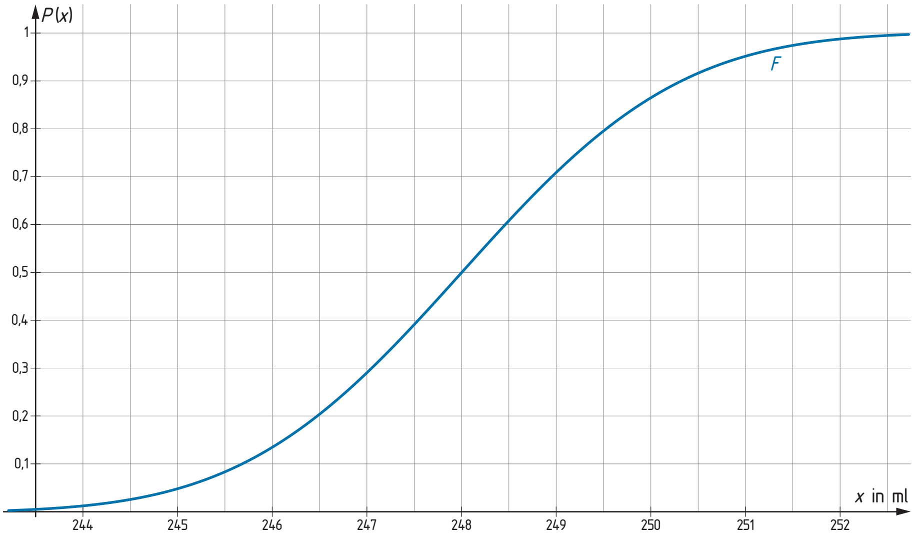
2.81 **Energy-Drink „Chamäleon“**

Ein neuartiger Energy-Drink beinhaltet harmlose Farbstoffe, die Zunge und Zähne kurzfristig unterschiedlich färben. Das Getränk wird in Paletten zu je 24 Dosen verkauft, jede Dose beinhaltet nach dem Zufallsprinzip einen anderen Farbstoff.

a) Die Farben des „Chamälon“ verteilen sich wie folgt auf die Gesamtproduktion: 45 % grün, 35 % rot und 20 % blau.

- Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als die Hälfte der Dosen einer Palette eine Grünfärbung bewirkt.
- Interpretiere den folgenden Ausdruck im Sachzusammenhang:
  $1 - 0{,}65^{24} - 24 \cdot 0{,}35 \cdot 0{,}65^{23} - \binom{24}{2} \cdot 0{,}35^2 \cdot 0{,}65^{22}$
- Beschreibe im Sachzusammenhang, was mit folgender Gleichung berechnet werden kann: $0{,}8^n = 0{,}01$

b) Die Füllmengen der einzelnen Viertelliterdosen einer Produktion des „Chamäleons“ sind normalverteilt. Die zugehörige Verteilungsfunktion *F* ist abgebildet.



- Lies die durchschnittliche Füllmenge einer Dose ab.
- Erkläre, wie man mithilfe der σ-Umgebung ($\approx$ 68 %) σ ablesen kann.
- Lies ab, mit welcher Wahrscheinlichkeit eine Dose zumindest einen Viertelliter beinhaltet.
- Lies ab, welche Mindestfüllmenge auf den Dosen angegeben werden muss, wenn nur 5 % der Dosen unter diesem Wert liegen sollen.
- Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Palette die Füllmenge von mehr als 2 Dosen unter der Mindestfüllmenge liegt.
- Nach Kritik von Konsumentenschützern soll die Viertelliterdose tatsächlich auch diesen Inhalt aufweisen.
  Berechne den neuen Erwartungswert bei einer Standardabweichung von 1,82 ml, sodass nur mehr 5 % unter 250 ml liegen.

Wissens-Check

Bearbeite die Aufgaben. **Begründe** jeweils deine Auswahl.

		gelöst

1

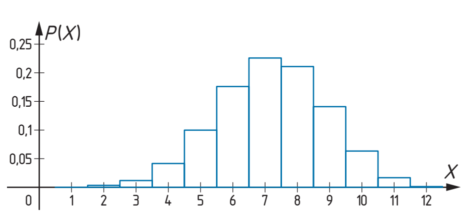
Ergänze die Textlücken durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine korrekte Aussage entsteht.
Ein Charakteristikum einer $B(n; p)$-verteilten Zufallsvariable ist, dass ___①___, weil die n Wiederholungen des Experiments ___②___.

①		②	
sich die Erfolgswahrscheinlichkeit p ändern kann	**A** ☐	im Urnenmodell dem Ziehen „auf einen Griff" entsprechen	**A** ☐
die Misserfolgswahrscheinlichkeit $1 - p$ konstant bleibt	**B** ☐	im Urnenmodell dem Ziehen ohne Zurücklegen entsprechen	**B** ☐
Erfolg und Misserfolg vereinbare Ereignisse sind	**C** ☐	im Urnenmodell dem Ziehen mit Zurücklegen entsprechen	**C** ☐

2

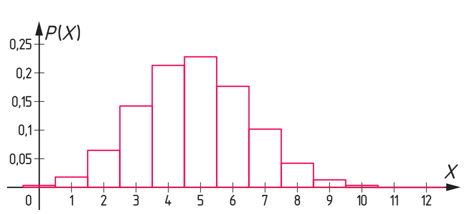
Ordne den als Säulendiagramm dargestellten Wahrscheinlichkeitsfunktionen von X die jeweils richtige Aussage aus A bis D zu.

1



☐

2



☐

A	X ist $B(12; 0{,}3)$-verteilt.
B	X ist $B(12; 0{,}4)$-verteilt.
C	X ist $B(12; 0{,}5)$-verteilt.
D	X ist $B(12; 0{,}6)$-verteilt.

3

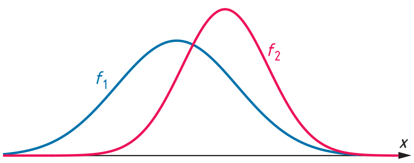
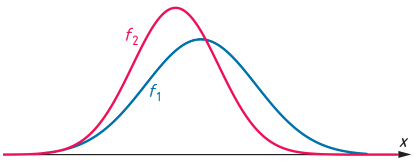
Die Zufallsvariable X ist $N(0; 1)$-verteilt. Kreuze die richtige Aussage an.

A ☐	$P(X = 0) = 0{,}5$
B ☐	$P(-1 \leq X \leq 1) = 0{,}5$
C ☐	$P(X < 0) = P(X \geq 0)$
D ☐	$P(0 \leq X \leq 4) = 0{,}5$
E ☐	$P(X > 0{,}5) > 0{,}5$

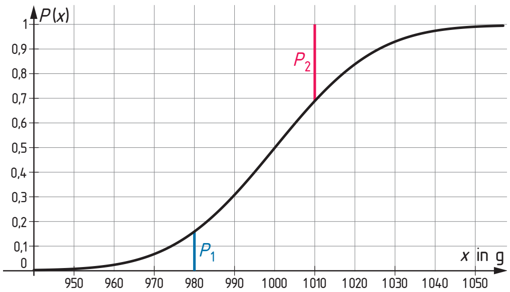
		gelöst
4	Der Luftdruck X in den Reifen eines bestimmten Automodells ist normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 2{,}5$ bar. Ordne den Ereignissen den jeweils richtigen Berechnungsansatz aus A bis D zu.	

1	Der Luftdruck eines Reifens liegt zwischen 2 bar und 3 bar.	☐	A	$1 - F(2)$
			B	$2 \cdot F(3) - 1$
2	Der Luftdruck eines Reifens beträgt weniger als 2 bar oder mehr als 3 bar.	☐	C	$1 - 2 \cdot F(3)$
			D	$2 \cdot F(2)$

		gelöst
5	f_1 ist die Dichtefunktion einer $N(\mu; \sigma)$-verteilten Zufallsvariable. Ordne f_2 jeweils die richtige Änderung der Parameter aus A bis D zu.	

1		☐	A	μ wird kleiner, σ wird kleiner.
			B	μ wird kleiner, σ wird größer.
2		☐	C	μ wird größer, σ wird kleiner.
			D	μ wird größer, σ wird größer.

		gelöst
6	Reissäcke werden normalverteilt mit $\mu = 1\,000$ g und $\sigma = 20$ g abgefüllt. Lies ab, welche Wahrscheinlichkeiten durch P_1 und P_2 beschrieben werden. Ordne den Änderungen an der Abfüllung die jeweils richtige Auswirkung aus A bis D zu.	



1	Der Sollwert μ der Abfüllmenge wird erhöht (bei $\sigma = 20$ g).	☐	A	P_1 wird kleiner, P_2 wird kleiner.
			B	P_1 wird kleiner, P_2 wird größer.
2	Die Standardabweichung σ wird verringert (bei $\mu = 1\,000$ g).	☐	C	P_1 wird größer, P_2 wird kleiner.
			D	P_1 wird größer, P_2 wird größer.

Lösung:
1) 1 → B; 2 → C   2) 1 → D; 2 → B   3) C   4) 1 → B; 2 → D   5) 1 → C; 2 → A
6) $P_1 = P(X \leqslant 980)$; $P_2 = P(X \geqslant 1\,010)$; 1 → B; 2 → A

CLIL-Review: Probability distribution

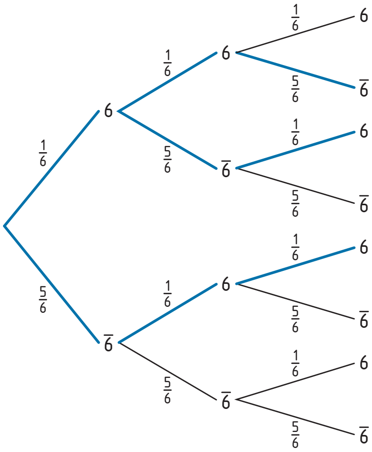
Get in pairs and work on the following tasks (2.E1, 2.E2). You may use your formula collection and an online dictionary.

Please find important vocabulary and other supporting material to these tasks as well as solutions and example answers in the solutions book. For further information have a look at page 2 of this book.

ABD **2.E1** First read the text about **binomial distribution** and get familiar with the new terms.

TE

Many probability problems ask for the number of successes that occur when a certain trial is independently repeated a fixed number of times.
Any such situation having 2 possible, mutually exclusive outcomes is called a binomial situation. The probability p of the success and the number n of trials are usually known.
In this case the discrete random variable X has a probability density function of the form:
$f(k) = P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n - k}$
Example: By rolling a die three times we ask for the probability for "2 sixes appear". We use first the tree diagram to determine the probability. To compare the result we then apply the formula above.

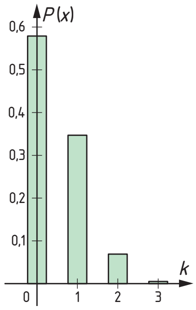


$n = 3$, $k = 2$; $p = \frac{1}{6}$
We find 3 relevant branches marked in blue:
$P(X = 2) = 3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{5}{6} \approx 6{,}9\ \%$
The formula leads to:
$P(X = 2) = \binom{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{3-2} \approx 6{,}9\ \%$

After this we can compute the probabilities for "0, 1, 2 and 3 sixes" rounded to 1 decimal place.

k	0	1	2	3
f(k) in %	57,9	34,7	6,9	0,5

With this table we can draw the binomial distribution function as a bar chart or as a column diagram.



Work on the following task.
Discuss your solutions with your partner and prepare a presentation in class.

The probability that a marksman hits a target will be constant $p = 0{,}87$.
He shoots 10 times.
Calculate the probability that the man will hit the target …
a) at least 8 times. ***b)*** no more than 6 times. ***c)*** exactly 6 times.
Explain what we calculate with the following expression:

$$\sum_{k=0}^{3} \binom{10}{k} p^k \cdot (1 - p)^{10 - k}$$

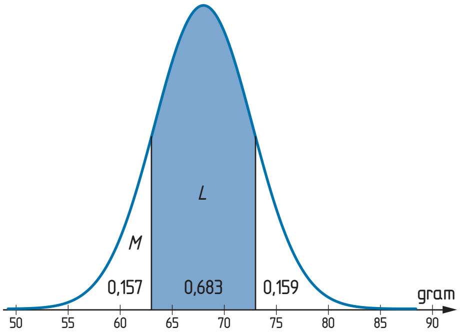
2.E2 There is a solution sheet to a task, the setting of which is unknown.
Together with your partner try to get familiar with the content.
Explain in your own words what the sheet is about.
Explain the calculation process, all the diagrams and the meaning of all the terms used in this sheet.
Finally write an appropriate task sheet.
Prepare a presentation in class.

ACD

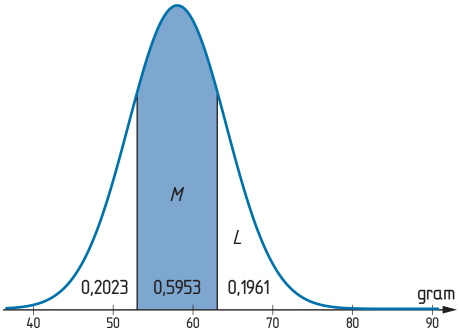
The given table of 2 breeds of hen, laying eggs

class	description	weight in gram
XL	extra large	at least 73 g
L	large	63 g to nearly 73 g
M	medium	53 g to nearly 63 g
S	small	less than 53 g

a) Breed 1:



Breed 2:



b) The probability the hens lay medium eggs: $P(X \text{ in class M}) = 15{,}7\ \%$

The probability the hens lay eggs of more than 73 g:
$P(X \text{ in class XL}) = 15{,}9\ \%$

The probability the hens lay large eggs:
$P(X \text{ in class L}) = 19{,}6\ \%$

The probability the hens lay eggs of less than 53 g:
$P(X \text{ in class S}) = 20{,}2\ \%$

c) The probability density function shows a normal distribution for X being a continuous random variable.
This curve is symmetric about the horizontal axis and bell-shaped, with only one peak centred above the mean.
In order to calculate probabilities, we must integrate the density function.
So we need to calculate the area under the normal density curve.
The whole area under the curve is 1 – this means a probability of 100 %.
Ca. 68 % come within 1 standard deviation of the mean, 95 % within 2 standard deviations and 99,7 % (= nearly all observations) within 3 standard deviations.