Wahrscheinlichkeitsrechnung 1

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung als Teil der **Stochastik** („Kunst des Mutmaßens“) bot schon seit dem Altertum reichlich Diskussionsstoff. Haupttriebfeder war dabei stets die Analyse von Glücksspielen. Als eigentliche Geburtsstunde wird aber ein Briefwechsel zwischen Blaise Pascal (1623 – 1662) und Pierre de Fermat (1607 – 1665) aus dem Jahr 1654 betrachtet. Darin ging es ua. um ein Würfelspiel, bei dem in 4 Versuchen zumindest ein Sechser gewürfelt werden sollte. Zahlreiche weitere prominente Mathematiker trugen das Ihre zur Wahrscheinlichkeitsrechnung bei, namentlich begegnen wir in diesem Kapitel vor allem Laplace und Gauß. Eine wissenschaftlich fundierte Wahrscheinlichkeitstheorie wurde aber erst im 20. Jahrhundert finalisiert, weswegen die Stochastik auch als moderne Wissenschaft gilt.

Neben den Glücksspielen fiel ihr zunehmend mehr Gewicht in den Bereichen Finanzmathematik (Versicherungen), Philosophie und Rechtswissenschaft zu. Mit der Weiterentwicklung der beschreibenden Statistik hin zur schließenden Statistik, die sich mit Prognosen auf der Grundlage von Datenerhebungen beschäftigt, spielt die Wahrscheinlichkeitsrechnung nunmehr eine zentrale Rolle in allen Wissenschaften, die mit Statistiken arbeiten, etwa Technik, Natur- und Wirtschaftswissenschaften.


Pierre-Simon de Laplace
(1749 – 1827)

Carl Friedrich Gauß
(1777 – 1855)

1.1 Klassische und statistische Wahrscheinlichkeit

1.1.1 Grundbegriffe

Im Alltag wird der Begriff „wahrscheinlich“ (zB laut Duden) als „mit ziemlicher Sicherheit“ definiert. In der Mathematik geht es exakter um den Grad der Sicherheit des Eintretens eines Ereignisses und dieser umfasst in diesem Sinne das Spektrum von „sicher nicht“ (0 %) bis „sicher schon“ (100 %).

Darstellung von Wahrscheinlichkeiten
Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines bestimmten Ereignisses wird als reelle Zahl von 0 bis 1 oder häufiger als Prozentzahl von 0 % bis 100 % dargestellt. Beliebt sind dabei auch ungekürzte Brüche $\frac{x}{y}$, seltener Anteile „in x von y Fällen“ oder Chancen „x zu $(y - x)$“.

1.1 **a)** Übertrage die Wahrscheinlichkeit von 60 % für das Auftreten eines bestimmten Ereignisses in die anderen Schreibweisen. AD
b) Erkläre die Nachteile des Kürzens anhand der beiden Wahrscheinlichkeiten $\frac{6}{36}$ und $\frac{7}{36}$.

a) $60\,\% = 0{,}6 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ = in 3 von 5 Fällen = Chance 3 : 2
b) Nur $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ lässt sich kürzen. Bei der Frage nach der höheren Wahrscheinlichkeit lassen sich die ungekürzten Brüche intuitiv schneller vergleichen. Es ist in der Wahrscheinlichkeitsrechnung durchaus üblich, Brüche fallweise nicht zu kürzen.

Wahrscheinlichkeitsrechnung

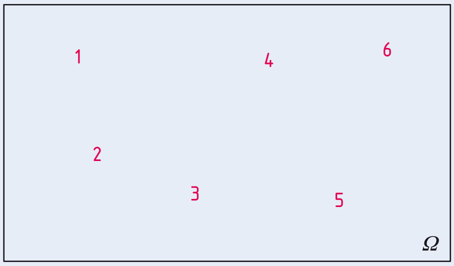
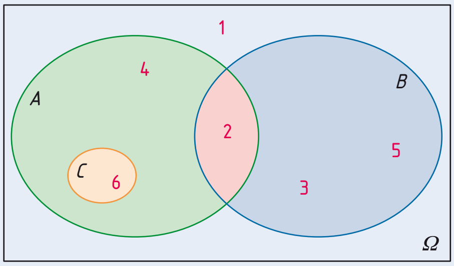
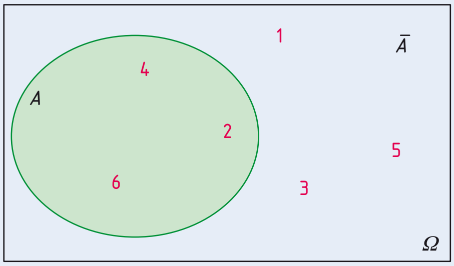
Die Basis für die Wahrscheinlichkeitsrechnung bilden vom Zufall gesteuerte Experimente, etwa das Würfeln, das Werfen einer Münze, das blinde Ziehen von Karten oder Kugeln aus einer Urne, um nur einige Beispiele aufzuzählen.

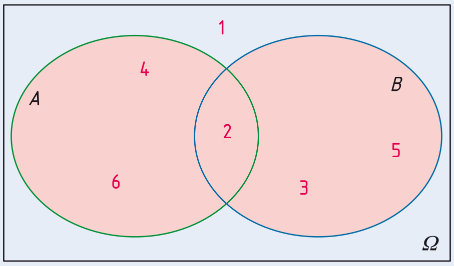
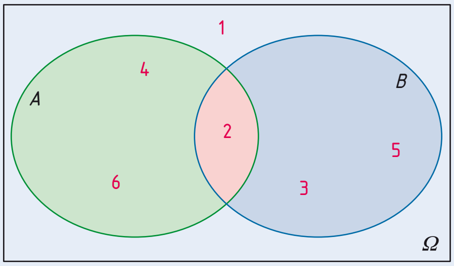
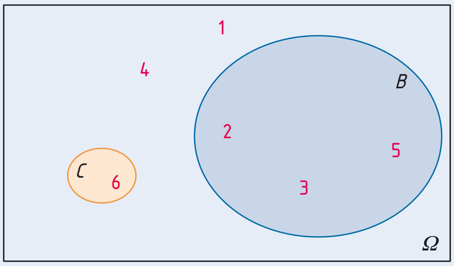
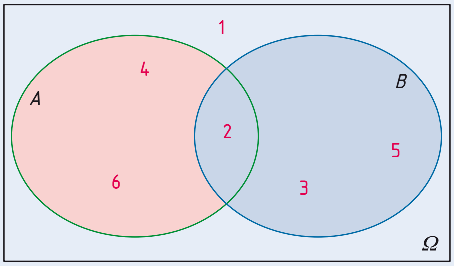
Ein **Zufallsexperiment** weist folgende notwendigen Eigenschaften auf:

- Es wird nach bestimmten Regeln durchgeführt.
- Es kann beliebig oft wiederholt werden („Versuche“).
- Es führt zu mehreren möglichen Ergebnissen.
- Das Ergebnis kann nicht vorhergesagt werden (Kriterium der Zufälligkeit).

Das Würfeln mit einem gewöhnlichen 6-seitigen Würfel ist beispielsweise ein Zufallsexperiment, das alle genannten Kriterien erfüllt, wenn der Wurf so stattfindet, dass das Ergebnis (die gewürfelte Augenzahl) tatsächlich zufällig ist.

Im Folgenden werden nun Begriffe aus der **Mengenlehre** wiederholt bzw. in die Wahrscheinlichkeitsrechnung übergeführt und durch **Venn-Diagramme (Mengendiagramme)** veranschaulicht.

Definition und Beispiel	Venn-Diagramm
Der **Ergebnisraum Ω** besteht aus allen möglichen Ergebnissen eines Zufallsexperiments. Beispiel: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$	
Jede beliebige Teilmenge A des Ergebnisraumes ($A \subseteq \Omega$) heißt **Ereignis**. „Ereignis A tritt ein“, wenn das Ergebnis des Zufallsexperiments ein Element von A ist. Insbesondere $\Omega \subseteq \Omega$ („sicheres Ereignis“) und $\{\,\} \subseteq \Omega$ („unmögliches Ereignis“). Beispiel: $A = \{2, 4, 6\}$ ... gerade Augenzahl $B = \{2, 3, 5\}$ ... Prim-Augenzahl Einelementige Teilmengen heißen **Elementarereignisse**: $C = \{6\}$ ... 6er	 **Mächtigkeit** = Anzahl der Elemente $\lvert\Omega\rvert = 6$, $\lvert A\rvert = \lvert B\rvert = 3$, $\lvert C\rvert = 1$, $\lvert\{\,\}\rvert = 0$
Die Komplementärmenge $\overline{A}$ ist das **Gegenereignis** von A. „Ereignis A tritt nicht ein.“ Es gilt $\overline{A} = \Omega \setminus A$ bzw. $A \cup \overline{A} = \Omega$. Daraus folgt $A \cap \overline{A} = \{\,\}$. Beispiel: $\overline{A} = \{1, 3, 5\}$ ... ungerade Augenzahl	

Definition und Beispiel	**Venn-Diagramm**
Vereinigungsmenge $A \cup B$ „Ereignis A **oder** Ereignis B (oder beide gleichzeitig) treten ein." Beispiel: $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ ... gerade oder prime Augenzahl	
Durchschnittsmenge $A \cap B$ „Ereignis A **und** Ereignis B treten (gleichzeitig) ein." Beispiel: $A \cap B = \{2\}$ ... gerade und prime Augenzahl	
B und C sind **unvereinbar**, wenn $B \cap C = \{\,\}$ ein unmögliches Ereignis ist. „Ereignis B und Ereignis C können nicht gleichzeitig eintreten." Beispiel: $B \cap C = \{\,\}$ ... unmöglich (prime Augenzahl und 6 gleichzeitig)	
Differenzmenge $A \backslash B$ „Ereignis A tritt ein, aber Ereignis B nicht." Beispiel: $A \backslash B = \{4, 6\}$ ... gerade, aber nicht prime Augenzahl	

1.2 Beim Werfen einer Münze kommt entweder die Seite mit „Kopf (K)" oder die mit „Zahl (Z)" oben zu liegen.

AB

a) Modelliere Ω und alle möglichen Ereignisse beim Werfen einer Münze.
b) Erstelle Ω für das Werfen von drei Münzen als Menge von geordneten Tripeln.
c) Berechne die Mächtigkeit von Ω für das Werfen von zehn Münzen.

Lösung:
a) $\Omega = \{K, Z\}$, Ereignisse/Teilmengen: $\{\,\}, \{K\}, \{Z\}, \{K, Z\}$
b) $\Omega = \{(K, K, K), (Z, K, K), (K, Z, K), (K, K, Z), (K, Z, Z), (Z, K, Z), (Z, Z, K), (Z, Z, Z)\}$
c) $|\Omega| = 2^{10} = 1\,024$

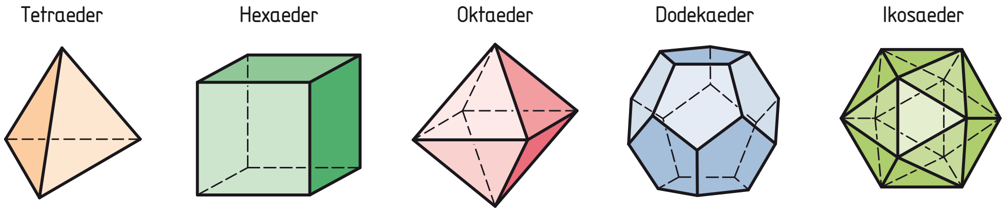
AC **1.3** Zwei herkömmliche Würfel werden geworfen. A sei das Ereignis „Augensumme ist 7“ und B „(Zumindest) ein Sechser erscheint“.

a) Stelle Ω auf.

b) Modelliere A und B als Venn-Diagramm samt allen Elementarereignissen von $A \cup B$.

c) Beschreibe die Ereignisse $A \cap B$, $A \setminus B$, $\overline{A}$ und $\overline{B}$ in Worten.

B **1.4** Es gibt fünf sogenannte „platonische Körper“, die von kongruenten regelmäßigen Vielecken gebildet werden.



Bestimme jeweils die Mächtigkeit von Ω für das Würfeln mit zwei gleichen platonischen Körpern mit nummerierten Seitenflächen.

BD **1.5** Aus einem Kartenspiel mit 20 Karten in 4 Farben (Herz, Schell, Laub, Eichel) zu je 5 Rängen (Ass, König, Ober, Unter, Zehner) wird eine Karte zufällig gezogen.
A ist das Ereignis „Ass wird gezogen“.
H ist das Ereignis „Herz wird gezogen“.
K ist das Ereignis „König wird gezogen“.

a) Erkläre, welche dieser Ereignisse unvereinbar sind, also als Durchschnittsmenge unmögliche Ereignisse darstellen.

b) Bestimme die Mächtigkeit von $A \cap H$, $A \cup H$, $A \cap K$, $\overline{H}$, $\overline{K}$.

AD **1.6** *These: „Der Begriff der Wahrscheinlichkeit ist intuitiv, bei einfacheren Beispielen also unmittelbar einsichtig.“*
Beurteile diese These, indem du im Folgenden intuitive Antworten formulierst.
Übertrage deine Antworten in andere Darstellungsformen:
In einer Urne befinden sich 10 Kugeln, nummeriert von 0 bis 9. Es wird blind gezogen.
Beurteile jeweils die Wahrscheinlichkeit für ...

a) ... das Ziehen einer 0.

b) ... das Ziehen einer ungeraden Zahl.

c) ... das Ergebnis „9 und 9“, wenn 2-mal hintereinander gezogen wird.

d) ... das Ziehen einer 7 im zweiten Versuch, wenn im ersten Versuch eine andere Kugel gezogen wurde und diese vor dem zweiten Versuch nicht mehr in die Urne zurückgelegt wird.

1.1.2 Definitionen der Wahrscheinlichkeit

Es existieren unterschiedliche Festlegungen der Wahrscheinlichkeit, deren Gemeinsamkeit in einem intuitiven, leicht verständlichen Grundgedanken liegt.

Schreibweise für Wahrscheinlichkeiten
***P*(*A*)** ... Wahrscheinlichkeit (engl. probability), dass das Ereignis A eintritt (sprich „P von A")
Hilfreich und erlaubt ist auch, in die Klammer informale, verbale Ausdrücke zu schreiben, zB P(„mindestens 1 Sechser").

Die erste Definition ist gerade für das Würfelbeispiel naheliegend und intuitiv.

Klassische Wahrscheinlichkeit (Laplace-Wahrscheinlichkeit)
Voraussetzung: Alle Elementarereignisse des Ergebnisraums Ω müssen gleichwahrscheinlich sein („Gleichverteilung"). Dann gilt:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{Anzahl der für } A \text{ günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl aller möglichen Ergebnisse}} = \frac{\text{„Günstige"}}{\text{„Mögliche"}}$$

Um diese Abzählregel in ein mathematisch vollständiges Konzept einzugliedern, genügen folgende Axiome (unmittelbar einleuchtende Grundsätze ohne Beweis).

Axiomatische Wahrscheinlichkeit nach Kolmogorow
(1) $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$
(2) sicheres Ereignis: $P(\Omega) = 1$ $\Rightarrow$ unmögliches Ereignis: $P(\{\,\}) = 0$
$\Rightarrow$ Gegenereignis: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
$\Rightarrow$ $P(A) \leqslant P(B)$, falls $A \subseteq B$
(3) Additionssatz für unvereinbare Ereignisse, wenn also $A \cap B = \{\,\}$:

$$P(\text{„}A \text{ oder } B\text{"}) = P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$\Rightarrow$ allgemeiner Additionssatz:

$$P(\text{„}A \text{ oder } B\text{"}) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

1.7 Ein fairer/idealer Würfel wird geworfen.
a) Begründe, warum ein Würfel „fair/ideal" sein sollte.
b) Ermittle für $A = \{2, 4, 6\}$ „gerade Augenzahl", $B = \{2, 3, 5\}$ „Augenzahl prim" und $C = \{6\}$ folgende Wahrscheinlichkeiten:
$P(A)$, $P(C)$, $P(\overline{C})$, $P(B \cap C)$, $P(B \cup C)$, $P(A \cup B)$

BD

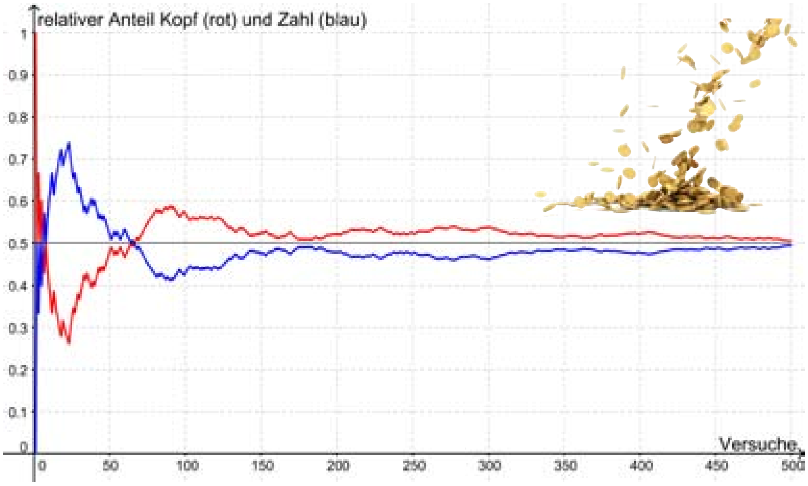
a) „Fair/ideal" bedeutet, dass der Würfel physikalisch so gestaltet ist, dass die Wahrscheinlichkeit für jede der 6 Seiten, oben sichtbar zu sein, gleich groß ist, also $\frac{1}{6}$ beträgt. Dies ist die Voraussetzung für die klassische Wahrscheinlichkeit.
b) Rechnen nach dem Prinzip „Günstige durch Mögliche":
$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3 \text{ Ergebnisse in } A}{6 \text{ mögliche Ergebnisse}} = \frac{3}{6} = 50\,\%$
$P(C) = \frac{1}{6} = 16{,}\dot{6}\,\%$
$P(\overline{C}) = 1 - P(C) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} = 83{,}\dot{3}\,\%$ (Gegenereignis, Gegenwahrscheinlichkeit)
$P(B \cap C) = \frac{0}{6} = 0 = 0\,\%$ (unmögliches Ereignis)
Additionssätze für unvereinbare bzw. allgemeine Ereignisse:
$P(B \cup C) = P(B) + P(C) = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = 66{,}\dot{6}\,\%$
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{6} + \frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} = 83{,}\dot{3}\,\%$

Wahrscheinlichkeitsrechnung

Die klassische Wahrscheinlichkeit genügt in der Praxis nicht, weil nicht alle Ergebnisräume gleichverteilt sind. Beispiele dafür sind etwa das Zielschießen (Treffer, kein Treffer), ein Los ziehen (Hauptgewinn, 2. Gewinn, ..., Niete), eine Partei wählen (rot, schwarz, ...), die Wirksamkeit eines Medikaments (heilend, wirkungslos, schädlich). In solchen Fällen, aber auch bei der Prüfung von Gleichverteilungen (zB „Ist der Würfel fair?“) können repräsentative, umfangreiche empirische Untersuchungen zur Wahrscheinlichkeit hinführen.

Statistische (frequentistische) Wahrscheinlichkeit
Ein Zufallsexperiment wird n-mal wiederholt. Die relative Häufigkeit h_A des Ereignisses A ist ein ungefähres Maß für die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ und wird statistische Wahrscheinlichkeit genannt.
Gesetz der großen Zahlen (in einer vereinfachten, anschaulichen Interpretation): **Je größer die Anzahl der Versuche n wird, desto mehr stabilisiert sich die relative Häufigkeit um die tatsächliche Wahrscheinlichkeit $P(A)$**. Bei (theoretisch) unendlich vielen Versuchen entspricht der Grenzwert der relativen Häufigkeit der Wahrscheinlichkeit.

Die Stabilisierung der relativen Häufigkeit kann durch einen Zufallsgenerator sehr schön veranschaulicht werden, hier zum Beispiel beim 500-maligen Werfen einer Münze, wodurch die klassische Wahrscheinlichkeit $P(\text{Kopf}) = P(\text{Zahl}) = \frac{1}{2}$ angenommen werden darf.



Wie oft man auch diese Simulation wiederholt, es wird nie passieren, dass die relative Häufigkeit für „Kopf“ oder „Zahl“ sich entscheidend und dauerhaft von 0,5 entfernt. Kurzfristig und in geringem Ausmaß ist dies aber möglich.[1)]
Aufwändigere Simulationen können dazu dienen, sich unbekannten Wahrscheinlichkeiten experimentell anzunähern.
Eine wesentliche Erkenntnis aus dem Gesetz der großen Zahlen: **Der Zufall ist kalkulierbar. Man kann zwar nie vorhersagen, welche Ereignisse als Nächste eintreten, aber man kann sehr wohl ausrechnen, was auf lange Sicht passiert.**
Auf diesem Prinzip basiert zB die Geschäftsidee von Glücksspielbetreibern. Der Kunde kann in jedem Spiel gewinnen oder verlieren, langfristig wird er aber jedenfalls verlieren und damit der Betreiber Gewinne verbuchen. Seltene Ausreißer dieses Grundprinzips machen wohl den Reiz des Glücksspiels aus.

1) Deshalb spricht man auch von einer „Stabilisierung“ und nicht von der klassischen mathematischen Konvergenz.

1.8 Aus einem Kartenspiel mit 36 Karten (4 Farben zu je 9 Karten: Ass, König, Dame, Bub, 10er, 9er, 8er, 7er, 6er) wird zufällig eine Karte gezogen. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass diese Karte
a) Herz, **b)** nicht Herz, **c)** Herz-Ass,
d) 9er oder 10er, **e)** Herz oder 10er ist.

B

Lösung:

a) $P(H) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

b) $P(\overline{H}) = 1 - P(H) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

c) $P(H \cap \text{Ass}) = \frac{1}{36}$

d) $P(\text{9er} \cup \text{10er}) = P(\text{9er}) + P(\text{10er}) = \frac{4}{36} + \frac{4}{36} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$

e) $P(H \cup \text{10er}) = P(H) + P(\text{10er}) - P(H \cap \text{10er}) = \frac{9}{36} + \frac{4}{36} - \frac{1}{36} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$

1.9 Beurteile für jede Aussage, ob sie auf der klassischen oder auf der statistischen Wahrscheinlichkeit basiert oder ob sie prinzipiell falsch ist.

D

Aussage	klass.	stat.	falsch
a) Beim Werfen eines idealen Würfels kommt jede Seite mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ oben zu liegen.			
b) Würfelt man 3-mal hintereinander keinen 6er, so steigt die Wahrscheinlichkeit für einen 6er im nächsten Wurf.			
c) Würfelt man 6-mal, erscheint sicher ein 6er.			
d) Die Wahrscheinlichkeit beim Lotto „6 aus 45" für 6 Richtige beträgt $\frac{1}{8\,145\,060}$.			
e) Wenn tatsächlich 8 145 060 Tipps abgegeben werden, dann muss jemand 6 Richtige erraten.			
f) Mit dem Tipp 1-2-3-4-5-6 habe ich eine geringere Wahrscheinlichkeit für 6 Richtige als mit anderen Tipps.			
g) Bei einer Testfrage mit 1 richtigen von 5 vorgegebenen Antworten beträgt die reine Rate-Wahrscheinlichkeit 20 %.			
h) Bei der Reifeprüfung gibt es 20 % „Sehr gut".			
i) An einem Freitag, den 13., oder wenn eine schwarze Katze meinen Weg quert, passieren mir eher Missgeschicke.			
j) Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kind an einem Sonntag geboren wird, ist geringer als $\frac{1}{7}$.			

BCD **1.10** Beim Roulette fällt eine Kugel zufällig in eines der mit 0 bis 36 beschrifteten Felder. Man kann unter anderem auf Folgendes setzen:
E ... einzelne Zahl, U ... Ungerade,
N ... Niedrig (1 – 18), H ... Hoch (19 – 36),
$D1$ ... 1. Dutzend (1 – 12).

a) Ermittle die Wahrscheinlichkeit für E, U, N und $D1$.
b) Erkläre, warum $P(D1) < P(N)$ und $P(D1 \cup N) = P(N)$ gilt.
c) Berechne die Wahrscheinlichkeit für $N \cup H$ und $U \cup D1$.
d) Beschreibe, was mit $1 - P(D1)$ berechnet werden kann.

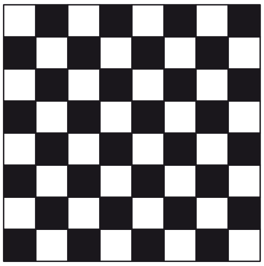
B **1.11** In einer BHS wurde eine Umfrage zum Leseverhalten in den 3. bis 5. Jahrgängen durchgeführt (siehe Tabelle). Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Person der Befragten ...

Schüler/innen in ...	mehr als 2 Bücher pro Jahr		Summe
	ja	nein	
... Nicht-Laptop-Klassen	42	11	53
... Laptop-Klassen	34	54	88
Summe	76	65	141

a) ... mehr als 2 Bücher pro Jahr liest.
b) ... eine Laptop-Klasse besucht.
c) ... höchstens 2 Bücher liest, wenn sie eine Laptop-Klasse besucht.
d) ... mehr als 2 Bücher liest, wenn sie in einer Nicht-Laptop-Klasse sitzt.
e) ... in einer Nicht-Laptop-Klasse sitzt, wenn sie höchstens 2 Bücher liest.

BD **1.12** Beim „Mäx“ oder „Lügenpaschen“ wird mit 2 Würfeln geworfen und aus den Augenzahlen eine Zahl gebildet, wobei stets die höhere Augenzahl die Zehnerstelle darstellt. In diesem Spiel zählt als Wurf mit höchstem Wert die 21, der „Mäx“. Dann folgen in der Wertigkeit die Paschwürfe $66 > 55 > 44 > 33 > 22 > 11$ und abschließend die noch offenen Zahlen in ihrer natürlichen Reihenfolge
$65 > 64 > 63 > 62 > 61 > 54 > 53 > ...$
a) Erkläre, warum $P(21)$ doppelt so groß ist wie $P(66)$.
b) Ermittle die Wahrscheinlichkeit für einen Paschwurf.
c) Ziel des Spiels ist es, einen höheren Wert als der Vorgänger zu würfeln. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass es gelingt, 54 zu übertrumpfen.

B **1.13** Ein Schachfeld besteht aus 8 x 8 Feldern. Der Turm darf senkrecht oder waagrecht eine beliebig weit entfernte Figur schlagen.



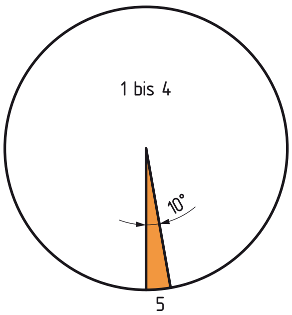
a) Ein Turm wird zufällig auf ein Feld des Schachbretts gestellt. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass der Turm eine zweite zufällig aufgestellte Figur schlagen kann.
b) Zwei Türme werden zufällig so aufgestellt, dass sie sich gegenseitig nicht schlagen können. Berechne nun die Wahrscheinlichkeit, dass die Türme eine dritte zufällig aufgestellte Figur schlagen können.

1.14 Die Statistik Austria (www.statistik.at) hat 2014 Daten zum Rauchen in Österreich erhoben. **BC**

Merkmale	Insgesamt	Raucher (täglich)	Raucher (gelegentlich)	Ex-Raucher (früher täglich)	Nichtraucher
	in 1 000				
Insgesamt	7 235,4	1 755,9	414,1	1 768,0	3 297,5
Alter in vollendeten Jahren					
15 bis unter 60	5 247,6	1 552,8	367,3	1 135,6	2 191,9
60 und mehr	1 987,9	203,1	46,8	632,4	1 105,6
Geschlecht					
Männer	3 518,8	933,3	225,6	1 002,5	1 357,5
Frauen	3 716,6	822,6	188,5	765,4	1 940,0
Bundesland					
Burgenland	247,3	55,0	11,3	69,0	112,0
Kärnten	475,4	101,7	32,5	126,8	214,3
Niederösterreich	1 383,4	303,2	77,2	352,2	650,9
Oberösterreich	1 202,4	262,0	68,5	297,1	574,8
Salzburg	451,1	102,2	25,4	104,1	219,3
Steiermark	1 042,3	227,4	54,7	250,9	509,3
Tirol	612,8	128,0	32,8	148,4	303,5
Vorarlberg	313,8	85,6	13,8	64,1	150,3
Wien	1 506,8	490,7	97,8	355,3	563,1

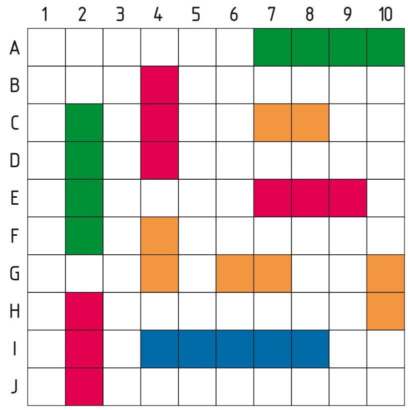
a) Interpretiere die Bedeutung der Zahl 1 002,5 bei den Männern.
b) Vergleiche die Wahrscheinlichkeit für das Merkmal „Nichtraucher" bei Männern und Frauen.
c) Beschreibe, welche Wahrscheinlichkeit mit $\frac{1\,755{,}9 + 414{,}1}{7\,235{,}4}$ berechnet wird.
d) Berechne die Wahrscheinlichkeit für „Raucher" innerhalb der jungen (15 bis 60) bzw. alten Menschen.
e) Schätze, in welchem Bundesland die Wahrscheinlichkeit am höchsten bzw. am niedrigsten ist, einen Nichtraucher anzutreffen.
f) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person, die früher täglich geraucht hat, weiblich ist.
g) Vergleiche die gegebenen Daten mit dem Anteil der Nichtraucher in deiner Klasse oder mit aktuelleren Daten der Statistik Austria.

1.15 Ein Glücksrad ist in 5 Kreissektoren aufgeteilt. Der kleinste Sektor 5 stellt den höchsten Gewinn dar und umfasst 10° **BD**



a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, beim Drehen des Glücksrades in den Sektoren 1 bis 4 zu landen.
b) Argumentiere allgemein, unter welchen Umständen die Verwendung der Gegenwahrscheinlichkeit von Vorteil ist.
c) A = „mindestens 4 erscheint beim Drehen"
B = „höchstens 4 erscheint beim Drehen"
Erläutere, warum $B \neq \overline{A}$ gilt.

BD **1.16** Beim Spiel „Schiffe versenken" besteht das Spielfeld aus einem karierten Blatt mit 10 x 10 Kästchen. Jeder Spieler markiert in seinem Spielfeld verdeckt 1 Schlachtschiff (Größe: 5 Kästchen), 2 Kreuzer (je 4 K.), 3 Zerstörer (je 3 K.) und 4 U-Boote (je 2 K.). Jeder Schuss trifft nun quasi zufällig ein einzelnes Kästchen.



a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass mit dem ersten Schussversuch gleich ein Schiffsteil getroffen wird.

b) Erkläre, wie sich die Wahrscheinlichkeit beim zweiten Versuch ändert, wenn der erste Versuch kein Treffer war.

c) Erkläre, warum die Wahrscheinlichkeit für den zweiten Versuch nicht so einfach zu bestimmen ist, wenn der erste Schussversuch erfolgreich war.

ABC **1.17** Wir nehmen an, dass jeder der 365 Tage im Kalenderjahr für einen Geburtstag gleichwahrscheinlich sei.

a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass jemand in den Sommermonaten Juli oder August Geburtstag feiert.

b) Ermittle die Wahrscheinlichkeit, dass jemand an irgendeinem 13. bzw. 31. Geburtstag hat.

c) Interpretiere den folgenden Rechenansatz im Zusammenhang mit Quartalen:
$\frac{31 + 28 + 31}{365}$

d) Schaltjahre sind bis jetzt unberücksichtigt geblieben.
Erstelle einen Ansatz, mit dem die Wahrscheinlichkeit ermittelt werden kann, dass jemand am 29. Februar Geburtstag feiert.

B **1.18** Ein Objekt aus dem Weltall, das auf dem Weg zur Erde nicht verglüht, schlägt zufällig auf irgendeinem Punkt der Erdoberfläche ($5{,}1 \cdot 10^8$ km^2) ein.
Berechne, mit welcher Wahrscheinlichkeit dies an Land (Wasserfläche 361 Mio. km^2) bzw. in Österreich (83 879 km^2) überhaupt sein könnte.

AB **1.19** Ein Tischtennisball (Durchmesser 40 mm) soll bei einem Fun-Bewerb aus erheblicher Distanz durch einen Gitterzaun geschossen werden, ohne diesen zu berühren. Eine Zaunmasche ist 100 mm breit und 200 mm hoch, die Drahtdicke darf vernachlässigt werden.

a) Erstelle eine beschriftete Skizze einer einzelnen Masche, in der du eine Fläche markierst, auf die der Ballmittelpunkt treffen darf.

b) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass der Schuss durch den Zaun gelingt.

1.2 Grundbegriffe der Kombinatorik

Die Kombinatorik beschäftigt sich mit der Bestimmung der Anzahl der Möglichkeiten, verschiedene Dinge anzuordnen oder auszuwählen. Hier sollen aus diesem eigentlich komplexen Teilgebiet der Mathematik nur die für das Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten („günstige : mögliche Ausgänge“) wichtigsten Grundprinzipien behandelt werden.

1.2.1 Anzahl von Anordnungsmöglichkeiten

1.20 Beim Online-Banking werden zur Bestätigung von Transaktionen Einmalpasswörter, sogenannte TANs („Transaktionsummern“), benötigt. Banken verwenden dabei unterschiedliche Systeme. B

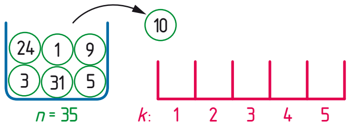
a) Berechne die Anzahl der möglichen TANs, wenn kein Symbol mehrfach auftreten darf. Als Symbol gelten alle Ziffern und alle Buchstaben außer dem O wegen der Verwechslung mit der Null.

b) Berechne die Anzahl der möglichen TANs, wenn eine Bank alle Symbole auch mehrfach für ihre 5-stelligen Codes zulässt.

Bei dieser Aufgabe geht es um Abzählvorgänge. Es kommen für den Code 35 verschiedene Symbole zum Einsatz: 10 Ziffern plus 26 minus 1 Buchstabe = 35 Symbole.
Anordnungsmöglichkeiten bei Auswahl von *k* aus *n* unterscheidbaren Elementen.
Man nennt diese Anordnung **Variation**.

a) Variation ohne Wiederholung ($k < n$)

Im Eingangsbeispiel sollen 5 aus 35 unterscheidbaren Elementen „ohne Wiederholung“ mit Berücksichtigung der Reihenfolge (dh. „geordnet“) ausgewählt werden.
Man spricht hier auch von einem **„Ziehen ohne Zurücklegen“** und stellt sich zur Veranschaulichung eine Urne vor, aus der nummerierte Kugeln gezogen werden.
Von anfangs 35 Symbolen ist pro Stelle (Ziehung) jeweils ein Symbol weniger verfügbar, daher erhält man
$35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31 = 38\,955\,840$ mögliche TANs.



Fundamentales Abzählprinzip
Ist ein Experiment aus mehreren unabhängigen Teilen zusammengesetzt, so ergibt sich die Gesamtzahl der möglichen Ergebnisse durch **Multiplikation** der möglichen Ergebnisse für die Einzelteile.

***b)* Variation mit Wiederholung**

Wir ziehen 5 aus 35 Kugeln, schreiben die Nummern jeweils geordnet auf, legen aber nach jedem Zug die Kugeln in die Urne zurück. In der Urne sind daher stets alle 35 Elemente.
Beim Ziehen kann daher jedes Element mehrfach vorkommen.
Für jede einzelne Stelle des Codes sind 35 Symbole verfügbar.
Daher erhält man mit dem fundamentalen Abzählprinzip
$35 \cdot 35 \cdot 35 \cdot 35 \cdot 35 = 35^5 = 52\,521\,875$ mögliche TANs.

Variation: Auswahl von *k* aus *n* Elementen mit Berücksichtigung der Reihenfolge
– ohne Wiederholung von Elementen (= ohne Zurücklegen):
$\boldsymbol{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots \cdot (n-k+1)}$ Anordnungsmöglichkeiten
– mit Wiederholung einzelner Elemente (= mit Zurücklegen): $\boldsymbol{n^k}$ Anordnungsmöglichkeiten

B **1.21** Ermittle die Anzahl der Anordnungsmöglichkeiten, in welcher Reihenfolge 6 Bundespräsidentschaftskandidat/innen auf dem Stimmzettel abgedruckt werden können.

Anordnungsmöglichkeiten von *n* unterscheidbaren Elementen

Man nennt dies **Permutation ohne Wiederholung** und versteht darunter eine Variation von n aus n unterscheidbaren Elementen ($k = n$) ohne Wiederholung.
Wir erhalten mit einem **geordneten** Ziehen von **allen** Kugeln aus der Urne, ohne die Kugeln zurückzulegen, die unterschiedlichen Möglichkeiten, wie n unterscheidbare Elemente angeordnet werden können.
In diesem Beispiel ist $n = 6$:
$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 =$ **Schreibweise 6!** = Anordnungsmöglichkeiten

Permutation ohne Wiederholung
Fakultät: $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$, sprich „$n$-Fakultät", „$n$-Faktorielle"
Es gilt $0! = 1$.

Anmerkung: Diese Rechenoperation führt sehr schnell zu großen Ergebnissen, sodass einfache Taschenrechner schon $70! > 10^{100}$ nicht mehr darstellen können.

B **1.22** Bestimme die Anzahl der unterschiedlichen Codes, die aus den Buchstaben der folgenden Wörter gebildet werden können.
a) ANNA,
b) MISSISSIPPI
Das Vertauschen von gleichen Buchstaben ergibt dabei keinen neuen Code. (Wir wollen das hier **„Mississippi-Prinzip"** nennen.)

Anordnungsmöglichkeiten von *n* Elementen, wobei einzelne Elemente mehrfach vorkommen. Diese Anordnung heißt **Permutation mit Wiederholung**.
Zur Veranschaulichung stellt man sich Kugeln mit Buchstaben in der Urne vor. „Mit Wiederholung" bedeutet hier nicht „mit Zurücklegen", sondern dass bestimmte Buchstaben mehrfach in die Urne gelegt werden. Man zieht **geordnet ohne Zurücklegen** und schreibt die Buchstaben auf. Am Ende subtrahiert man die nicht unterscheidbaren Anordnungen, die durch Vertauschen der wiederholt auftretenden Buchstaben entstehen.

a) ANNA hat 4 Elemente, wobei je 2 Elemente gleich sind.
2! gibt die Anzahl der Möglichkeiten an, wie die zwei *A* bzw. die zwei *N* untereinander vertauscht werden können. Diese Möglichkeiten müssen von *jedem* Code abgezogen werden (mehrfaches Subtrahieren entspricht dem Dividieren).
$\frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$ Anordnungsmöglichkeiten

b) Insgesamt hat das Wort MISSISIPPI 11 Elemente, davon kommen das I und das S je 4-mal vor, das P 2-mal und das M 1-mal.
$\frac{11!}{1! \cdot 4! \cdot 4! \cdot 2!} = \frac{11!}{4! \cdot 4! \cdot 2!} = 34\,650$ Anordnungsmöglichkeiten

Permutation mit Wiederholung („Mississippi-Prinzip")
$n_1, n_2, \ldots$ sich wiederholende Elemente: $\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots}$

1.23 Aus einer Urne mit 10 unterscheidbaren Kugeln werden 3 blind gezogen. Berechne die Anzahl der möglichen Anordnungen, wenn die Ziehung
a) hintereinander (also mit Berücksichtigung der Reihenfolge) mit Wiederholung,
b) hintereinander ohne Zurücklegen erfolgt.

B

Lösung:
a) $10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^3 = 1\,000$ Anordnungsmöglichkeiten
b) $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ Anordnungsmöglichkeiten

Sind *n* und *k* größere Zahlen, so kann dein Rechengerät eingesetzt werden:

1.24 Aus den 26 Buchstaben des Alphabets werden zufällig Sicherheitsschlüssel für den Zugang zu WLAN erzeugt, wobei kein Buchstabe mehrfach vorkommen darf. Berechne die Anzahl der möglichen 8-stelligen Sicherheitsschlüssel.

B

Lösung mit **TI-Nspire**:
1: Calculator/Menu/5:Wahrscheinlichkeit/2: Permutationen/nPr(26,8)
Dies entspricht der Formel $\frac{26!}{(26-8)!} = \frac{26!}{18!}$.
Das Ergebnis lautet: ca. $6{,}3 \cdot 10^{10} = 63$ Milliarden Sicherheitsschlüssel

Technologieeinsatz zu diesem Thema für TI82-84, Excel und Geogebra-CAS siehe www.hpt.at (Schulbuch Plus für Schüler/innen)

1.25 Schüler/innen setzen sich auf Stühlen nieder.
a) Ermittle, auf wie viele Arten 3 bzw. 10 bzw. 24 Schüler/innen auf ebenso vielen Stühlen Platz nehmen können.
b) Erstelle einen passenden Angabentext für den Lösungsweg $\frac{10!}{4! \cdot 6!} = 210$.

AB

1.26 **a)** Berechne, wie viele (auch unsinnige) Wörter sich aus den Buchstaben der ehemaligen (Un-)Wörter des Jahres bilden lassen:
TEURO, FREMDSCHÄMEN, BUBENDUMMHEITEN.
b) Erstelle ein sinnvolles Wort zur Rechnung $\frac{6!}{3! \cdot 2!}$.

AB

1.27 Entlang einer stark befahrenen Straße stehen hintereinander neun Werbeflächen, die vor einer wichtigen Wahl von den Parteien A (4 Stück), B (2), C (2) und D (1) gemietet werden. Ermittle die Anzahl der möglichen Abfolgen der Werbeplakate der vier Parteien.

B

1.28 Aus einem Kandidatenpool von 12 Männern und 7 Frauen werden in einer Regierung 4 offene Ministerposten besetzt. Da sich die Ämter unterscheiden, muss die Anordnung der ausgewählten Kandidat/innen berücksichtigt werden.
a) Berechne die Anzahl der möglichen Postenverteilungen, wenn nur Kandidatinnen zum Zug kommen sollen.
b) Interpretiere den Rechenansatz $19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 - 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9$ im Sachzusammenhang.
c) Erkläre die Bedeutung des Faktors 4 im Ansatz $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 7 \cdot 4$ zur Berechnung der Postenvergabe an 3 Männer und 1 Frau.
d) Bestimme die Anzahl der möglichen Postenverteilungen, wenn mindestens 3 Frauen ausgewählt werden sollen.

BCD

BD **1.29** Ein Pendler fährt jeden Tag dieselbe Strecke zur Arbeit, auf der er 4 Ampeln passiert. Jede Ampel kann grün, gelb oder rot anzeigen.

a) Berechne die Anzahl der möglichen Farbabfolgen, die pro Fahrt auftreten können.

b) Beurteile, ob die Wahrscheinlichkeit für das Aufleuchten der drei Farben pro Ampel einer Gleichverteilung unterliegt.

B **1.30** 5 Würfel werden geworfen. Berechne die Anzahl der Möglichkeiten, ...

a) ... alles unterschiedliche Augenzahlen zu werfen.

b) ... alles gleiche Augenzahlen zu werfen.

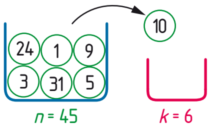
c) ... nur ungerade Augenzahlen zu werfen.

1.2.2 Anzahl von Auswahlmöglichkeiten

D **1.31** Beim österreichischen Lotto „6 aus 45" werden 6 aus 45 Kugeln ohne Berücksichtigung der Reihenfolge, sozusagen „auf einen Griff" gezogen.
Zeige, dass $\binom{45}{6}$ zur richtigen Anzahl an möglichen Kombinationen führt.

Auswahl von *k* aus *n* unterscheidbaren Elementen
(ohne Berücksichtigung der Reihenfolge)
Diese Auswahl wird **Kombination ohne Wiederholung** genannt.

Anzahl der Möglichkeiten beim Hintereinanderziehen:
$45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41 \cdot 40$
Anzahl der Anordnungen dieser sechs gezogenen Kugeln: 6!



Anzahl der Möglichkeiten beim Ziehen auf einen Griff, wenn die Reihenfolge eben nicht berücksichtigt wird:
$\frac{45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41 \cdot 40}{6!} = \frac{45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41 \cdot 40 \cdot \mathbf{39!}}{6! \cdot \mathbf{39!}} = \frac{45!}{6! \cdot 39!} =$ **Schreibweise** $\binom{45}{6}$, sprich: „45 über 6"

Letztlich entspricht also die Anzahl der unterschiedlichen Kombinationen beim Ziehen von 6 aus 45 Kugeln, $\binom{45}{6}$, der Anzahl der möglichen Anordnungen (Permutationen mit Wiederholung) von 6 Z (für „gezogene" Kugeln) und 39 N (für „nicht gezogene" Kugeln) als Codewort, $\frac{45!}{6! \cdot 39!}$ (vgl. „Mississippi-Prinzip").

Das Ergebnis lautet: 8 145 060 mögliche Ziehungsergebnisse.

Kombination: Auswahl von *k* aus *n* Elementen ohne Reihenfolge
Darstellbar durch den **Binomialkoeffizienten**:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}, \text{ sprich „}n\text{ über }k\text{"}$$

Bedeutungen:
(1) „Ziehen auf einen Griff" von *k* aus *n* Elementen.
(2) Anordnen von *n* Elementen bestehend aus nur zwei verschiedenen Typen von Elementen, *k* vom ersten Typ und der Rest $(n-k)$ vom zweiten Typ.

Regeln: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \Rightarrow$ speziell: $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ und $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$

1.32 **a)** Berechne, wie viele Möglichkeiten es gibt, aus einer Klasse mit 24 Schüler/innen einerseits 2 Klassenordner/innen, andererseits Klassensprecher/in und Stellvertreter/in auszuwählen. **BD**

b) Erläutere den Unterschied zwischen den beiden Ansätzen in ***a)***.

Lösung:

a) $\binom{24}{2} = 276$ Klassenordnerteams; $24 \cdot 23 = 552$ Klassensprechervariationen

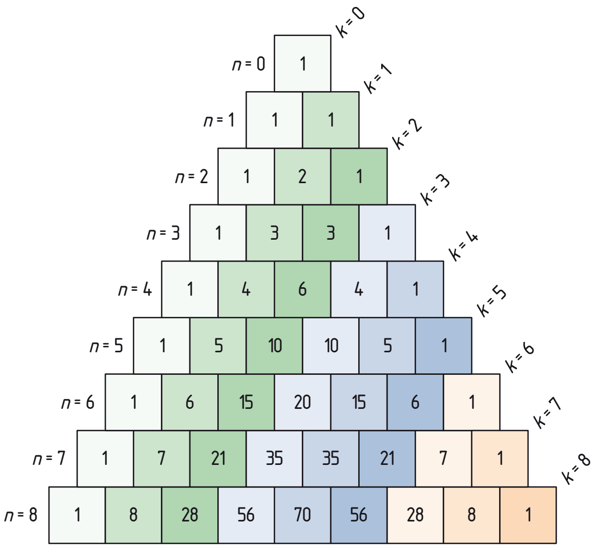
b) Bei den Klassenordnerteams spielt die Reihenfolge keine Rolle (Team AB = Team BA); bei den Klassensprecher/innen sehr wohl, weil AB und BA eine jeweils andere Rollenverteilung zwischen Klassensprecher/in und Stellvertreter/in bedeutet.

Technologieeinsatz bei Kombinationen, TI-Nspire:

1: Calculator/Menu/5:Wahrscheinlichkeit/3:Kombinationen/nCr(24,2)

Technologieeinsatz zu diesem Thema für TI82-84, Excel und Geogebra-CAS siehe www.hpt.at (Schulbuch Plus für Schüler/innen)

1.33 In der Abbildung ist der Beginn des Pascal'schen Dreiecks dargestellt. **CD**



a) Erkläre, wie das Dreieck entsteht.

b) Das Dreieck besteht aus den Werten des Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$.
Lies exemplarisch $\binom{5}{2}$ und $\binom{8}{5}$ ab.

c) Prüfe anhand des Dreiecks die Regeln $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ bzw. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ und $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$.

d) Erkläre die allgemeine binomische Formel mithilfe des Beispiels $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

1.34 „Stammtischproblem": **B**
An einem Stammtisch sitzen 12 Personen. Jede Person stößt mit jeder anderen einzeln auf ihr Wohl an.
Berechne, wie oft an diesem Tisch die Gläser klirren.

B **1.35** Beim Lotto „Euromillionen“ werden 5 aus 50 Zahlen und 2 aus 12 Sternenzahlen gezogen. Bestimme die Anzahl der möglichen Kombinationen.

AB **1.36** Bei Sportturnieren wird in Gruppenphasen meist nach dem Prinzip „jeder gegen jeden“ gespielt.
a) Berechne die Anzahl der Begegnungen in einer 8er-Gruppe.
b) Erstelle eine Formel für die Anzahl der Spiele für Gruppen der Größe *n*, die auch ohne Taschenrechner schnell berechnet werden kann.

D **1.37** Ein Lehrer kann für eine Gruppenarbeit in seinem Freifach, das von 9 Schüler/innen besucht wird, nur entweder 3er- oder 6er-Gruppen bilden.
Prüfe, welche Variante ihm mehr Auswahlmöglichkeiten bietet.

ABC **1.38** Aus einer Abschlussklasse mit 20 Schüler/innen (davon *m* Mädchen) sollen 4 Ballkomiteemitglieder ausgewählt werden.
a) Berechne die Anzahl der möglichen Komitees.
b) Erstelle eine Formel, mit der die Anzahl der geschlechtsbezogen ausgewogenen Komitees berechnet werden kann.
c) Interpretiere den Ausdruck $\binom{20}{4} - \binom{m}{0} \cdot \binom{20-m}{4}$ im Sachzusammenhang.

BD **1.39** 5 Würfel werden geworfen. Berechne die Anzahl der Möglichkeiten, ...
a) ... mindestens einen Sechser zu werfen.
b) ... höchstens einen Sechser zu werfen.
c) ... genau drei Sechser zu werfen.
d) Erkläre, wie man die Wahrscheinlichkeit für diese Ereignisse berechnet.

ABD **1.40** Beim Toto wird auf den Ausgang von Fußballspielen gewettet, und zwar jeweils entweder Tipp 1 (Sieg Heimmannschaft), Tipp 2 (Sieg Gastmannschaft) oder Tipp X (Unentschieden).
Pro Tippkolonne stehen 18 Spiele zur Wahl, von denen die ersten 5 Fixspiele darstellen und aus den restlichen Spielen weitere 8 ausgewählt werden.
a) Ermittle die Anzahl der Möglichkeiten, 13 Spiele auszuwählen.
b) Im Folgenden betrachten wir ausschließlich die 13 tatsächlich getippten Spiele:
– Berechne die Anzahl der möglichen Tipps innerhalb dieser 13 Spiele.
– Berechne die Anzahl der möglichen „13-er“ (alle Tipps richtig).
– Berechne die Anzahl der möglichen „Zwölfer“.
– Erkläre den Unterschied zwischen den folgenden Rechenansätzen:
$1^5 \cdot 2^8$ bzw. $1^5 \cdot 2^8 \cdot \frac{13!}{5! \cdot 8!}$ bzw. $1^5 \cdot 2^8 \cdot \binom{13}{5}$ bzw. $1^5 \cdot 2^8 \cdot \binom{13}{8}$
– Berechne die Anzahl der möglichen „Elfer“ und „Zehner“.
– Erstelle eine Formel für die Anzahl der Möglichkeiten für *n* Richtige.
c) Schätze die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Spiel Tipp 1 zutrifft.

1.3 Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten

1.3.1 Einfache ODER- bzw. UND-Verknüpfung

Haben wir uns bisher (hauptsächlich) mit einstufigen Zufallsexperimenten beschäftigt, so sollen diese nun zu mehrstufigen Zufallsprozessen zusammengesetzt werden. Dazu werden grundlegende Rechenregeln benötigt.

1.41 In einer Urne befinden sich 3 schwarze und 7 rote Kugeln, es werden 2 Kugeln hintereinander gezogen, und zwar mit und ohne Zurücklegen. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass ...

a) ... zwei gleichfarbige Kugeln gezogen werden,

b) ... zwei verschiedenfarbige Kugeln gezogen werden.

B

Der Additionssatz wurde schon im Kapitel über die Definitionen der Wahrscheinlichkeiten eingeführt. Er soll an dieser Stelle wiederholt werden.

Additionssatz für unvereinbare Ereignisse

Zwei Ereignisse A und B sind unvereinbar, wenn $A \cap B = \{\,\}$. Dann gilt für die Wahrscheinlichkeit, dass A ODER B eintreten:

$$P(\text{„}A \text{ oder } B\text{“}) = P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Dieses ODER versteht sich als „und/oder“, nicht als „entweder/oder“.

Analog wird der Multiplikationssatz für **unabhängige** Ereignisse definiert. In diesem Kapitel begnügen wir uns mit einer intuitiven Definition der Unabhängigkeit.

Multiplikationssatz für unabhängige Ereignisse

Zwei Ereignisse A und B sind unabhängig, wenn die Wahrscheinlichkeit des Eintretens des einen Ereignisses nicht beeinflusst wird vom Eintreten (oder Nicht-Eintreten) des anderen Ereignisses. Dann gilt für die Wahrscheinlichkeit, dass A UND B eintreten:

$$P(\text{„}A \text{ und } B\text{“}) = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Dieses UND versteht sich als „sowohl/als auch“.

Bei mehrstufigen Zufallsexperimenten muss in der Regel grundsätzlich zwischen zwei Fällen unterschieden werden, die am besten mit dem Bild des Ziehens von Kugeln aus einer Urne veranschaulicht werden.

Ziehen mit Zurücklegen (mit Wiederholung): Ein bereits gezogenes Element kann im nächsten Versuch wieder gezogen werden. Damit ändert sich die Ausgangssituation nicht, und die einzelnen Versuche sind voneinander unabhängig.

Ziehen ohne Zurücklegen (ohne Wiederholung): Ein bereits gezogenes Element wird nicht mehr in die Urne zurückgelegt. Dadurch wird die Wahrscheinlichkeit im nächsten Versuch beeinflusst, es handelt sich um abhängige Versuche.

Ziehen mit Zurücklegen:

a) Zuerst wird die Angabe mathematisch korrekt mit UND/ODER formuliert:

„1. Kugel schwarz UND 2. Kugel schwarz ODER 1. Kugel rot UND 2. Kugel rot“

$P(\text{gleichfarbig}) = \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{10} + \frac{7}{10} \cdot \frac{7}{10} = \frac{9}{100} + \frac{49}{100} = \frac{58}{100} = 58\ \%$

b) „1. Kugel schwarz UND 2. Kugel rot ODER 1. Kugel rot UND 2. Kugel schwarz“

$P(\text{verschieden}) = \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{10} + \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{3 \cdot 7}{10 \cdot 10} \cdot 2 = \frac{42}{100} = 42\ \%$

Ziehen ohne Zurücklegen: Im zweiten Versuch verringert sich die Anzahl der Möglichen, gegebenenfalls auch der Günstigen.

a) $P(\text{gleichfarbig}) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} + \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{6}{90} + \frac{42}{90} = \frac{48}{90} = 53{,}3\ \%$

b) $P(\text{verschieden}) = \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9} + \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{3 \cdot 7}{10 \cdot 9} \cdot 2 = 46{,}7\ \%$

Anmerkung zu ***b)***: Wie im vorigen Kapitel erwähnt, muss bei verschiedenen Typen von Elementen (hier: rot/schwarz) entweder jeder Fall einzeln angeschrieben werden (siehe erster Rechenschritt) oder die Reihenfolge nach dem „Mississippi-Prinzip" berücksichtigt werden, hier durch die Multiplikation mit $2 = \binom{2}{1} = \frac{2!}{1! \cdot 1!}$.

BC **1.42** Zwei Ereignisse E_1 und E_2 treten unabhängig voneinander einzeln mit den Wahrscheinlichkeiten $P(E_1) = 0{,}6$ und $P(E_2) = 0{,}8$ ein.

a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass beide Ereignisse eintreten.

b) Beschreibe in Worten die Situation, wann genau ein Ereignis eintritt.

c) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass genau ein Ereignis eintritt.

d) Interpretiere, was mit $1 - 0{,}4 \cdot 0{,}2$ berechnet wird.

Lösung:

a) $P(\text{beide Ereignisse treten ein}) = 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 0{,}48$

b) Genau 1 Ereignis tritt ein, wenn ENTWEDER E_1 eintritt UND E_2 nicht ODER E_1 nicht eintritt UND E_2 schon.

c) $P(\text{ein Ereignis tritt ein}) = 0{,}6 \cdot 0{,}2 + 0{,}4 \cdot 0{,}8 = 0{,}44$

d) Es wird die Wahrscheinlichkeit berechnet, dass MINDESTENS ein Ereignis eintritt (Gegenwahrscheinlichkeit zum Nicht-Eintreten beider Ereignisse).

B **1.43** Aus einem Kartenspiel mit 32 Karten, ein Viertel davon in Herz, werden hintereinander 4 Karten gezogen.
Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass von diesen 4 Karten ...

a) ... alle in Herz sind (Ziehen mit Zurücklegen).

b) ... mindestens 1 in Herz ist (Ziehen mit Zurücklegen).

c) ... höchstens 1 in Herz ist (Ziehen mit Zurücklegen).

d) ... keine in Herz ist (Ziehen ohne Zurücklegen).

e) ... höchstens 3 in Herz sind (Ziehen ohne Zurücklegen).

f) ... genau 2 in Herz sind (Ziehen ohne Zurücklegen).

B **1.44** Frau M. weiß, dass sie beim Shoppen mit einer Wahrscheinlichkeit von 40 % sofort etwas kauft. Muss sie hingegen länger überlegen, sinkt die Wahrscheinlichkeit für einen Kauf auf 15 %.
Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass Frau M. in einem Geschäft etwas kauft.

1.45 Eine Stadt bietet eine Mitfahrbörse via Internet an. Die Wahrscheinlichkeit, eine Mitfahrgelegenheit tatsächlich zu erwischen, beträgt für eine bestimmte Strecke 47 % und unabhängig davon für eine andere Strecke 33 %. Ein Pensionist möchte für beide Strecken diesen Service nutzen. **B**
Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass ***a)*** ihm dies gelingt, ***b)*** er nur 1 Mitfahrgelegenheit bekommt, ***c)*** er höchstens 1 Strecke auf diese Art zurücklegen kann.

1.46 Zu einer Kinderfaschingsparty nimmt ein Elternteil 20 Faschingskrapfen mit, 3 davon sind als Gag mit Senf statt Marmelade gefüllt. Ein Kind nimmt zufällig die ersten drei Krapfen aus dem Karton. **BCD**

a) Interpretiere die Rechnung $\frac{17}{20} \cdot \frac{16}{19} \cdot \frac{15}{18}$ im Sachzusammenhang.
b) Der Ansatz $\frac{3 \cdot 17 \cdot 16}{20 \cdot 19 \cdot 18}$ zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit für genau 1 Senfkrapfen bei der zufälligen Wahl von 3 Krapfen ist unvollständig. Erkläre den Fehler.
c) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass das Kind mindestens 1 Senfkrapfen zieht.
d) Erkläre, wie man die Wahrscheinlichkeit berechnet, höchstens 1 Senfkrapfen zu erwischen.

1.47 Der Onkel und der Opa eines Kinds versuchen, am Schießstand für ihre Nichte bzw. Enkelin ein Plüschtier zu ergattern. Die Trefferwahrscheinlichkeit beträgt für den Onkel 35 % und für den Opa 20 %. Beide schießen unabhängig voneinander je einmal. **BD**

a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass das Kind zumindest ein Plüschtier bekommt.
b) Ermittle die Wahrscheinlichkeit, dass es genau ein Plüschtier bekommt.
c) An einem anderen Tag lautet die Rechnung für zwei Treffer $0{,}35^2$. Argumentiere, was sich geändert hat.

1.48 Drei Jäger A, B und C gehen auf die Pirsch und entdecken gleichzeitig ein Reh, alle drei setzen sofort einen Schuss ab. Die Trefferwahrscheinlichkeiten lauten $P(A) = 65\ \%$, $P(B) = 72\ \%$, $P(C) = 84\ \%$. **BC**
a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass das Wild unverletzt davonkommt.
b) Beschreibe das Ereignis zur Gegenwahrscheinlichkeit in ***a)***.
c) Bestimme die Wahrscheinlichkeit für genau einen Treffer.

1.49 Ein U-Bahn-Kontrollor steigt in einen Waggon ein, in dem sich 10 Passagiere befinden, wovon 2 keinen gültigen Fahrausweis haben. Bis zur nächsten Station können nur noch 5 Passagiere kontrolliert werden, diese werden zufällig und unabhängig voneinander ausgewählt. **ABD**

a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass alle kontrollierten Tickets gültig sind.
b) Erkläre, warum $0{,}8^5$ der falsche Ansatz für ***a)*** ist.
c) Erstelle in diesem Sachzusammenhang einen Text für die Angabe, für den $0{,}8^5$ den richtigen Ansatz für ***a)*** darstellt.
d) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass in diesem Waggon beide Passagiere ohne gültigen Fahrausweis erwischt werden.

BD **1.50** Ein Hausbesitzer baut zwei unabhängig voneinander arbeitende Alarmsysteme in seinem Grundstück ein. Deren Ausfallwahrscheinlichkeiten betragen 2 % bzw. 5 %.

a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem Einbruch Alarm geschlagen wird.
b) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass nur eine Alarmanlage den Einbruch meldet.
c) Erkläre, was das Gegenereignis zu „Beide Anlagen funktionieren" ist.
d) Begründe, warum die Wahrscheinlichkeit, dass beide Systeme bei einem Einbruch versagen, jedenfalls unter 2 % liegen muss.

B **1.51** Zwei Freundinnen unterhalten sich über den Wochentag ihres 20. Geburtstags. Von einer Gleichverteilung der Wochentage darf hier ausgegangen werden.

Berechne die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse:
a) Beide können an einem Samstag Geburtstag feiern.
b) Beide haben ihren Geburtstag im Bereich Freitag bis inklusive Sonntag.
c) Zumindest eine der Freundinnen feiert Geburtstag im Bereich Freitag bis Sonntag.
d) Eine Freundin hat am Freitag, eine am Samstag 20. Geburtstag.

B **1.52** In einem Betrieb gibt es nur drei Techniker, die eine bestimmte Maschine bedienen können. Von 225 Werktagen fehlt Techniker A im Schnitt an 18, Techniker B an 12 und Techniker C an 7 Tagen. Die Abwesenheiten seien unabhängig voneinander.
a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass an einem Tag alle 3 Techniker fehlen.
b) Ermittle die Wahrscheinlichkeit, dass an einem Tag nur 1 Techniker anwesend ist.

D **1.53** 3 Personen aus 12 Senioren, 25 Erwachsenen und 8 Jugendlichen werden ausgewählt. Erläutere den Unterschied zwischen den Ansätzen $\frac{12}{45} \cdot \frac{25}{44} \cdot \frac{8}{43}$ und $\frac{12}{45} \cdot \frac{25}{44} \cdot \frac{8}{43} \cdot 3!$

BD **1.54** Ein Statistiker hat ausgewertet, dass bei einem bekannten Freistoßschützen von 3 Versuchen mit einer Wahrscheinlichkeit von 48,8 % mindestens einmal ein Tor fällt.

a) Ermittle die Wahrscheinlichkeit, dass bei 3 Versuchen kein Treffer fällt.
b) Zeige, dass die Wahrscheinlichkeit für ein Tor bei einem Versuch 0,2 ist.

A **1.55** Ein Immobilienmakler weiß aus Erfahrung, dass bei jedem Kunden die Wahrscheinlichkeit für einen Verkaufserfolg p ist. An einem Tag fallen n Kunden an. Erstelle eine Formel für die Wahrscheinlichkeit, …

a) … dass bei jedem Kunden Erfolg eintritt.
b) … dass mindestens 1 Verkauf gelingt.
c) … dass genau 1-mal verkauft wird.
d) … dass genau k Erfolge eintreten ($0 \leq k \leq n$).

ABC **1.56** „Geburtstagsparadoxon": Die Geburtstage von einer zufälligen ausgewählten Gruppe von Personen (ohne Mehrlinge) wird analysiert, ein Jahr mit 365 Tagen angesetzt.
a) Ermittle die Wahrscheinlichkeit, dass 2 Personen verschiedene Geburtstage haben.
b) Stelle eine Tabelle auf, in der du die Wahrscheinlichkeit für alles verschiedene Geburtstage für Gruppen der Größe von 2 bis 50 Personen darstellst.
Lies aus der Tabelle ab, ab welcher Gruppengröße die Wahrscheinlichkeit über 50 % liegt, dass mindestens zwei Personen am selben Tag Geburtstag haben.

1.3.2 Baumdiagramme

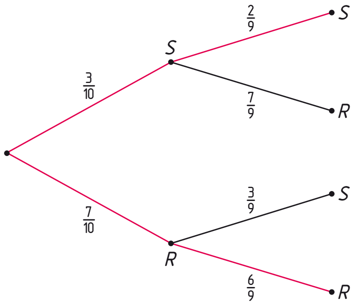
1.57 In einer Urne befinden sich 3 schwarze und 7 rote Kugeln, es werden 2 Kugeln hintereinander gezogen, und zwar ohne Zurücklegen.

a) Modelliere das Experiment mithilfe eines Baumdiagramms.
b) Markiere die Pfade für das Ereignis: „Zwei gleichfarbige Kugeln werden gezogen."
c) Berechne die Wahrscheinlichkeit für das markierte Ereignis.
d) Erkläre, wie mit Wahrscheinlichkeiten in Baumdiagrammen gerechnet wird.

ABCD

Mehrstufige Zufallsexperimente können mit sogenannten **Baumdiagrammen** veranschaulicht werden. Die von einem Punkt ausgehenden Äste stellen eine Stufe des Experiments dar, müssen also in Summe immer 100 % ergeben. Mehrere Äste hintereinander vom Ausgangspunkt ganz links (bzw. oben) bis zu einem Endpunkt rechts (bzw. unten) ergeben einen **Pfad** oder **Weg**.

a) b)



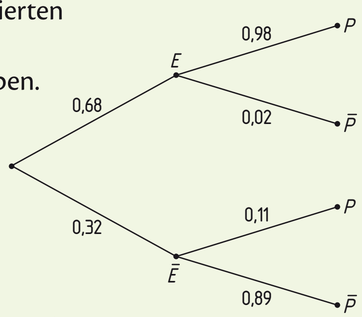
c) $\frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} + \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{48}{90} = 53{,}3\ \%$

Wahrscheinlichkeiten auf Baumdiagrammen können über das richtige Verknüpfen mit „UND" bzw. „ODER" berechnet werden. Als Antwort zu ***d)*** dienen folgende Merkregeln:

Multiplikations-/Additionssatz	**Veranschaulichung am Baumdiagramm**
Sprich UND → schreib MAL (·)	Pfadregel 1: Wahrscheinlichkeiten entlang eines Pfads werden multipliziert.
Sprich ODER → schreib PLUS (+)	Pfadregel 2: Wahrscheinlichkeiten mehrerer Pfade werden addiert.

1.58 Die Korrektur einer bestimmten Aufgabe der standardisierten Mathematikmatura wird im Nachhinein überprüft.
E ... Kompetenz erfüllt; *P* ... Punkt von Lehrperson vergeben.

CD



a) Interpretiere das Ereignis zur Rechnung $0{,}32 \cdot 0{,}89$.
b) Erkläre den Fehler in der Rechnung $(0{,}68 + 0{,}98) \cdot (0{,}32 + 0{,}11)$.
c) Beschreibe das Ereignis zur Wahrscheinlichkeit $0{,}68 \cdot 0{,}02 + 0{,}32 \cdot 0{,}11 = 0{,}0488$.
d) Im Diagramm ist ein Tippfehler passiert: 0,11 sollte 0,12 sein. Argumentiere, was zusätzlich ausgebessert werden muss.

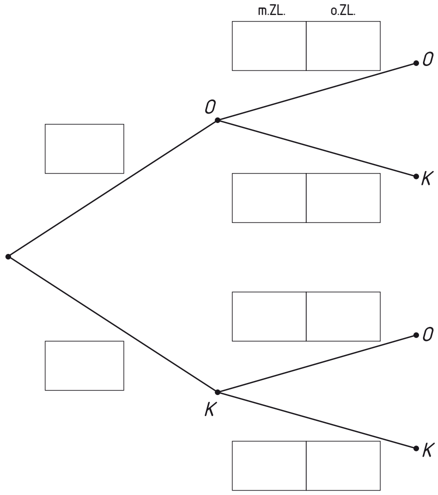
Lösung:
a) Die Kompetenz wurde nicht erfüllt und der Punkt dafür auch nicht vergeben.
b) Die Pfadregeln bzw. Multiplikations- und Additionssatz wurden verwechselt.
c) Die Kompetenz wurde erfüllt und der Punkt nicht gegeben oder die Kompetenz wurde nicht erfüllt und der Punkt vergeben, kurz: Die Lehrperson hat mit einer Wahrscheinlichkeit von knapp 5 % falsch entschieden.
d) Äste, die von einem Punkt ausgehen, ergeben in Summe 100 %: 0,89 wird zu 0,88.

ABCD **1.59** Ein Spieler wettet bei Pferderennen auf den Sieger. Aus Gründen der Selbstdisziplin beschließt er für sich folgende Regeln: Nach der zweiten Niederlage (dh. Siegertipp gewinnt nicht) oder spätestens nach vier Rennen verlässt er die Pferderennbahn.

a) Modelliere ein Baumdiagramm zu diesen Vorgaben.
b) Lies aus dem Baum ab, wie viele Pfade (mögliche Abläufe) es gibt.
c) Erkläre wie man die Äste des Baumdiagramms mit den Wahrscheinlichkeiten beschriftet, wenn bei jedem Rennen 1 von 8 Pferden zufällig gewinnt.
d) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass die Wettserie vor dem vierten Rennen beendet wird.

ABCD **1.60** Aus einem Kartenspiel mit 52 Karten, 4 davon Asse, werden hintereinander ohne Zurücklegen 2 Karten gezogen. Beachtet werden nur die Ass-Karten.
a) Erstelle ein mit den Wahrscheinlichkeiten beschriftetes Baumdiagramm.
b) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass genau 1 Ass gezogen wird.
c) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 1 Ass gezogen wird.
d) Interpretiere das Ereignis zum Rechenansatz $\frac{4}{52} + \frac{48}{52} \cdot \frac{4}{51}$.
e) Erläutere, was sich an der Beschriftung der Äste ändert, wenn das Ziehen mit Zurücklegen erfolgt.

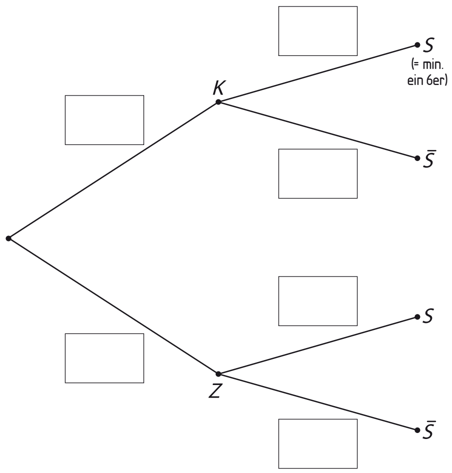
BCD **1.61** Eintrittskarten für einen VIP-Bereich werden durch das Ziehen von zwei Zetteln nacheinander verlost. In der Urne befinden sich 2 „O" und 5 „K". Ergibt sich beim Ziehen das Wort „OK", ist man VIP.
a) Kennzeichne die Äste mit den Wahrscheinlichkeiten für das Ziehen mit bzw. ohne Zurücklegen.
b) Berechne die Wahrscheinlichkeit für den VIP-Eintritt.
c) Ermittle die Wahrscheinlichkeit für ein Wort mit Doppelbuchstaben.
d) Erkläre, was die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller vier Pfade ergibt.



ABD **1.62** Als Geburtsstunde der Wahrscheinlichkeitsrechnung wird ein Briefwechsel zwischen Pascal und Fermat im Jahre 1654 angesehen. Darin ging es unter anderem um die Wahrscheinlichkeit, in 4 Versuchen mit einem normalen Würfel mindestens einmal einen Sechser zu würfeln.
a) Begründe, warum dieses Spiel nach dem Werfen des ersten Sechsers auch vorzeitig abgebrochen werden kann.
b) Modelliere ein Baumdiagramm, wenn nach dem ersten Sechser abgebrochen wird.
c) Berechne die Wahrscheinlichkeit für zumindest einen Sechser in 4 Versuchen. Beurteile, ob du auf die Wette, zumindest einen Sechser in 4 Versuchen zu würfeln, eingehen solltest.

1.63 In einem Glücksspiel geht es darum, (zumindest) einen 6er (S) zu würfeln. Dabei entscheidet ein Münzwurf, mit wie vielen Würfeln gespielt wird. Bei Kopf (K) wird mit 2 Würfeln, bei Zahl (Z) nur mit 1 Würfel geworfen. Die Münze ist allerdings so gezinkt, dass Z doppelt so wahrscheinlich ist wie K.

BCD



a) Kennzeichne die Äste mit den Wahrscheinlichkeiten.
b) Berechne die Wahrscheinlichkeit für (mindestens) einen Sechser.
c) Erkläre, warum das Würfeln mit 2 Würfeln erfolgversprechender ist als mit 1 Würfel.
d) Argumentiere, welcher der Pfade für einen Erfolg wahrscheinlicher ist.

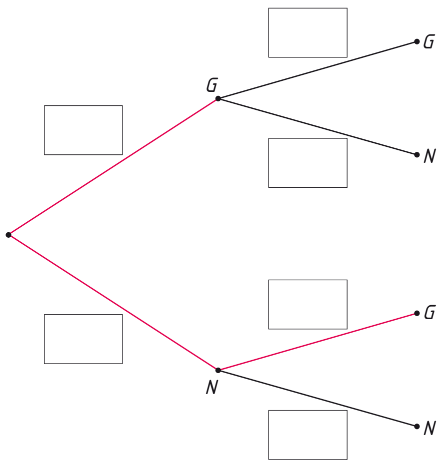
1.64 Ein Einzelhändler bezieht Smartphones von drei Herstellern A, B, C im Verhältnis 6 : 2 : 1. Die Wahrscheinlichkeit für einen Defekt liegt für A bei 0,05, für B bei 0,02 und für C bei 0,09.

ABCD

a) Modelliere diese Angaben mit einem Baumdiagramm.
b) Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewähltes Smartphone vom Hersteller A stammt und einwandfrei funktioniert.
c) Markiere diejenigen Pfade, die zum Ereignis „Defekt“ führen.
d) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass ein Smartphone einen Defekt aufweist.
e) Jemand kauft bei diesem Händler ein defektes Smartphone.
Erkläre, wie man beurteilen kann, mit welcher Wahrscheinlichkeit es von einem bestimmten Händler hergestellt wurde.

1.65 In einer Tombola liegen m Lose, davon g Gewinne ($m, g \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 2$, $g < m$). Zwei Lose (G ... Gewinn, N ... Niete) werden nacheinander ohne Zurücklegen gezogen.

CD



a) Beschreibe in möglichst kurzen Worten, welches Ereignis mit den roten Ästen markiert ist.
b) Kennzeichne die Äste mit den Wahrscheinlichkeiten.
c) Argumentiere, warum das zweite Ziehen als ein vom ersten Ziehen abhängiges Ereignis bezeichnet wird.

1.3.3 Bedingte Wahrscheinlichkeit und Unabhängigkeit von Ereignissen

Wahrscheinlichkeiten hängen oft von bestimmten Voraussetzungen ab. In diesem Fall sprechen wir von „Bedingter Wahrscheinlichkeit". Wir wenden sie in vielen Fällen unbewusst richtig an. So geht es bei manchen Aufgaben aus den vorigen Kapiteln eigentlich bereits um bedingte Wahrscheinlichkeiten, etwa beim Ziehen ohne Zurücklegen oder beim Ablesen von Tabellenwerten einer bestimmten Unterkategorie. An dieser Stelle wollen wir dieses Thema auch formal korrekt einführen.

ABCD **1.66** Beim Würfelspiel „Siedler von Catan" wird die Augensumme von 2 Würfeln betrachtet. Ist diese 7, tritt eine bestimmte Figur – der „Räuber" – in Aktion.

a) Erstelle mithilfe einer Tabelle den Ergebnisraum Ω für das Werfen von 2 Würfeln.
Markiere darin das Ereignis A, dass die Augensumme 7 ist, und das Ereignis B, dass eine 6 gewürfelt wird.

b) Berechne die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten des „Räubers", wenn bekannt ist, dass ein Würfel die 6 anzeigt.

c) Berechne die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten des „Räubers" und für das Werfen eines 6ers auf einem der Würfel.

d) Beurteile, ob die beiden Ereignisse A und B unabhängig sind.

a) $A \subset \Omega$ mit roter Schrift,
$B \subset \Omega$ mit blauer Füllung markiert:

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	**(1,6)**
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	**(2,5)**	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	**(3,4)**	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	**(4,3)**	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	**(5,2)**	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

b) Wir berechnen die Wahrscheinlichkeit mit dem Prinzip „Günstige durch Mögliche".
Möglich: B („Würfel zeigt 6 an") $\Rightarrow P(B) = \frac{11}{36}$
Bei der bedingten Wahrscheinlichkeit wird also Ω auf eine Teilmenge eingeschränkt.
Günstig: $A \cap B$ („6 wird angezeigt UND die Summe ist 7") $\Rightarrow P(A \cap B) = \frac{2}{36}$
$P(A$, wenn B bekannt$) = \frac{2}{36} : \frac{11}{36} = \frac{2}{11}$
Dies entspricht den 2 roten Ereignissen innerhalb der 11 blauen Ereignisse.

Bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{mit } P(B) > 0$$

Sprechweise: „Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung (wenn bekannt ist/wenn Voraussetzung ist), dass B bereits eingetreten ist."
Durch Umformen dieser Formel ergibt sich direkt der **allgemeine Multiplikationssatz**.

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B) \quad \text{bzw. auch} \quad P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

Anmerkung: Ist $P(A|B) = P(A)$ bzw. $P(B|A) = P(B)$, dann sieht man, dass daraus der Multiplikationssatz für unabhängige Ereignisse resultiert: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

c) Wir verwenden den allgemeinen Multiplikationssatz:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(A) \cdot \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{6}{36} \cdot \frac{\frac{2}{36}}{\frac{6}{36}} = \frac{2}{36}$$

Anmerkung: Sowohl sprachlich als auch mathematisch muss also sehr genau zwischen „A und B" bzw. „A unter der Bedingung B" unterschieden werden.

d) Wie bereits erwähnt sind zwei Ereignisse unabhängig, wenn die Wahrscheinlichkeit des Eintretens des einen Ereignisses nicht beeinflusst wird vom Eintreten des anderen Ereignisses. Hier gilt aber $P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ und $P(A|B) = \frac{2}{11}$. Die Bedingung B beeinflusst (verändert) die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis A eintritt. A und B sind also (stochastisch) abhängig.

Die Unabhängigkeit kann sowohl über den Multiplikationssatz als auch über die bedingte Wahrscheinlichkeit definiert werden.

Unabhängigkeit
Zwei Ereignisse A und B sind (stochastisch) unabhängig, wenn gilt:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \text{ bzw. } P(A|B) = P(A) \text{ bzw. } P(B|A) = P(B)$$

Urnenmodell: Beim Ziehen mit Zurücklegen sind die Ziehungen unabhängig voneinander, beim Ziehen ohne Zurücklegen abhängig.

Anmerkung: Unvereinbarkeit vs. Unabhängigkeit
Diese Begriffe werden gerne verwechselt oder fälschlicherweise überhaupt gleichgesetzt. Es handelt sich aber um zwei grundlegend unterschiedliche Konzepte. Die Unvereinbarkeit $A \cap B = \{\}$ bezieht sich auf die Ereignisse selbst und ist meist unmittelbar zu erkennen, die (stochastische!) Unabhängigkeit $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ bezieht sich auf die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse. Mit der Unabhängigkeit wird keinerlei Aussage über einen möglichen kausalen Zusammenhang getätigt[1)].

1.67 Zwei Ereignisse beim Würfeln mit 2 Würfeln werden betrachtet: **BD**
A ... Augensumme ist ungerade
B ... Paschwurf (zwei gleiche Zahlen).
Berechne die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von A bzw. von B.
Ermittle die Wahrscheinlichkeit für $A \cap B$.
Prüfe, ob die beiden Ereignisse (stochastisch) unabhängig sind.

Lösung:
$P(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$, denn die Hälfte der möglichen Augensummen ist ungerade.
$P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$, denn es gibt nur 6 Paschwürfe: (1, 1), (2, 2), ...
$P(A \cap B) = \frac{0}{36} = 0$, denn alle Paschwürfe ergeben eine gerade Augensumme.
$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$, aber $P(A \cap B) = 0$, also sind die Ereignisse abhängig.

1.68 Für zwei Ereignisse A, B ist gegeben: $P(A) = 0{,}2$; $P(B) = 0{,}3$; $P(A \cap B) = 0{,}1$. **BD**
a) Zeige, dass die beiden Ereignisse A und B (stochastisch) abhängig sind.
b) Berechne $P(A|B)$ und $P(B|A)$.
c) Für ein drittes Ereignis C, das unabhängig von B ist, gilt $P(B \cap C) = 0{,}18$.
Bestimme die Einzelwahrscheinlichkeit für C.
Weise nach, dass $P(B) = P(B|C)$ gilt.

---
1) Mathematisch beweisbar sind nur folgende Zusammenhänge:
(1) A, B unvereinbar $\Rightarrow$ A, B abhängig; (2) A, B unabhängig $\Rightarrow$ A, B vereinbar.

ABC **1.69** Die Gemeinderatswahl in einem Dorf brachte die in der Tabelle dargestellten (gültigen) Stimmen für die beiden Parteien *A* und *B*, aufgeteilt auf die Wahlsprengel *S*1 bis *S*3.

Stimmen	A	B	Σ
S1	325	267	592
S2	159	123	282
S3	210	230	440
Σ	694	620	1 314

a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass eine gültige Stimme aus dem 3. Sprengel stammte und der Partei *B* zufiel.
b) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass eine gültige Stimme aus dem 3. Sprengel der Partei *B* zufiel.
c) Beschreibe das Ereignis, das zur Wahrscheinlichkeit $\frac{159}{694}$ passt.
d) Stelle einen Ausdruck in der Form der bedingten Wahrscheinlichkeit $P(\ldots|\ldots)$ zum Term $\frac{267}{592}$ auf.

BD **1.70** Eine Münze zeigt entweder Zahl oder Kopf. Sie wird 3-mal geworfen.
a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass 1-mal Zahl erscheint.
b) Erkläre, welchen Wert *P*(Zahl im 3. Wurf|Kopf im 1. und im 2 Wurf) hat.
c) Argumentiere, warum das mehrmalige Werfen einer Münze dem Ziehen mit Zurücklegen entspricht.

BD **1.71** Eine Frau hat zwei Kinder, deren Geschlecht (*B* ... Bube, *M* ... Mädchen) du nicht kennst. Ω ist durch $\{BB, BM, MB, MM\}$ gegeben, eine Gleichverteilung wird angenommen.
a) Du besuchst diese Frau und siehst ein Mädchen.
Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass das andere Kind auch ein Mädchen ist.
b) „Du besuchst eine Frau und siehst ein Mädchen, ...“
Erläutere, wie dieser Satz vervollständigt werden muss, damit die Wahrscheinlichkeit in Aufgabe **a)** 50 % beträgt.

BD **1.72** „Ziegenproblem“: Für eine alte Fernsehshow aus den 1970er Jahren wurde dieses Spiel erfunden und Anfang der 1990er Jahre dann heiß diskutiert. Worum geht's? Du stehst als Kandidat/in vor drei verschlossenen Türen, zwei davon verdecken eine Ziege, eine den Hauptpreis, ein Auto. In der ersten Runde kannst du eine Tür wählen. Daraufhin öffnet der Moderator, der als Einziger weiß, wo das Auto steckt, eine der beiden anderen Türen, jedenfalls aber eine mit einer Ziege dahinter. In der zweiten Runde fragt der Moderator dich, ob du bei deiner ursprünglich gewählten Tür bleiben oder zur anderen noch verschlossenen Tür wechseln willst.

Tür 1	Tür 2	Tür 3
		

a) Schätze die Erfolgswahrscheinlichkeit für die beiden Strategien Bleiben/Wechseln.
b) Beurteile nun die Chancen exakter, indem du alle Fälle durchspielst, die sich aus dem Beispiel in der Abbildung ergeben.
c) Erkläre, warum den meisten Menschen hier ein Trugschluss unterläuft.

1.3.4 Bedingte Wahrscheinlichkeit und Baumdiagramme

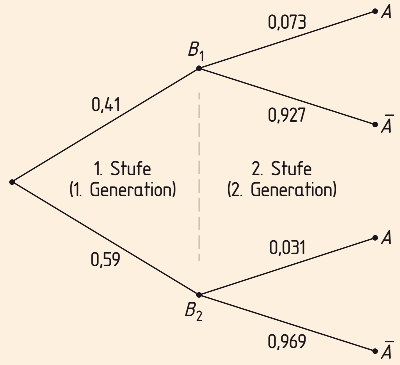
1.73 Eine Firma erzeugt ein Produkt zu 41 % in ihrem Betrieb B_1 und den Rest im zweiten Betrieb B_2. Die Betriebe weisen einen Ausschussanteil (A) von 7,3 % bzw. 3,1 % auf.

a) Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass ein Stück Ausschussware ist, wenn es von B_1 produziert wurde.

b) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass ein beliebiges Stück Ausschussware ist.

c) Ermittle die Wahrscheinlichkeit, dass ein Stück von B_1 produziert wurde, wenn man weiß, dass es Ausschussware ist.

B



a) Diese Wahrscheinlichkeit kann direkt abgelesen werden. Die Wahrscheinlichkeiten der Äste der zweiten Stufe sind von denen der ersten Stufe abhängig: $P(A|B_1) = 7{,}3\ \%$.

b) Alle Pfade, die zum Ereignis „Ausschussware" führen, müssen laut Pfadregel 2 addiert werden: $P(A) = 0{,}41 \cdot 0{,}073 + 0{,}59 \cdot 0{,}031 \approx 4{,}8\ \%$.

Totale Wahrscheinlichkeit

$B_1, B_2, \ldots$ sind paarweise unvereinbare Ereignisse mit $B_1 \cup B_2 \cup \ldots = \Omega$. Dann gilt für ein Ereignis A

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2) + \ldots$$

Veranschaulichung am Baumdiagramm: Die totale Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis A entspricht der Summe der Wahrscheinlichkeiten für alle Pfade, die zum Ereignis A führen.

c) Wenn man schon weiß, dass das Stück Ausschussware ist, dann reduziert sich das Baumdiagramm auf genau diese Pfade als mögliche Wege. Einer davon ist nun günstig im Sinne der Fragestellung: $P(B_1|A) = \frac{P(B_1 \cap A)}{P(A)} = \frac{0{,}41 \cdot 0{,}073}{0{,}41 \cdot 0{,}073 + 0{,}59 \cdot 0{,}031} \approx 62{,}1\ \%$

Satz von Bayes

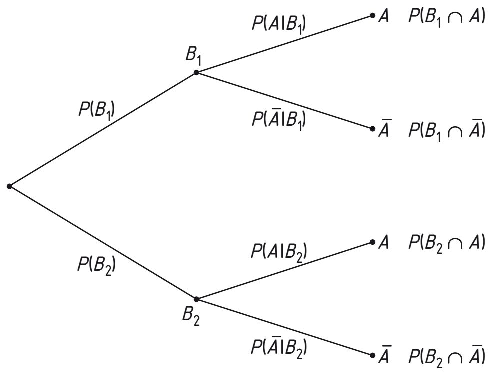
$B_1, B_2, \ldots$ sind wie oben. Dann gilt für ein Ereignis A und ein beliebiges B_i aus $B_1, B_2, \ldots$

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i) \cdot P(A|B_i)}{P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2) + \ldots} = \frac{P(B_i) \cdot P(A|B_i)}{P(A)}$$

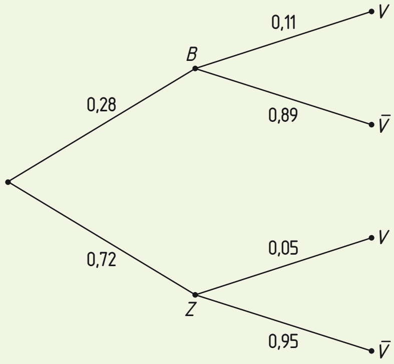
Veranschaulichung am Baumdiagramm: Die Wahrscheinlichkeit für den günstigen Pfad zu A wird dividiert durch die totale Wahrscheinlichkeit für alle möglichen Pfade zu A.

Zur besseren Veranschaulichung der Formeln ist hier das formal korrekt beschriftete Baumdiagramm angeführt.
In der Regel ist es nicht notwendig, sich die Formeln zu merken, wenn man die Merkregeln für das Baumdiagramm versteht:

- Totale Wahrscheinlichkeit: „alle möglichen Pfade"
- Bedingte Wahrscheinlichkeit (Bayes): „günstige durch mögliche Pfade"



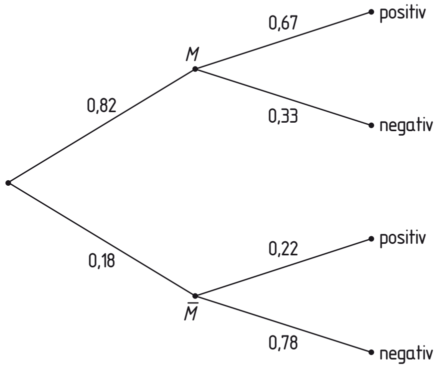
BD **1.74** Ein Pendler legt den Weg zum Arbeitsplatz manchmal mit dem Bus (B), sonst mit dem Zug (Z) zurück. Beide Verkehrsmittel weisen unterschiedliche Verspätungsraten (V) auf. Die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten können dem Baumdiagramm entnommen werden.
Berechne die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse.
Erkläre jeweils, welche Rechenregel zum Einsatz kommt.



a) Der Pendler fährt mit dem Bus und kommt pünktlich an.
b) Der Pendler kommt verspätet an.
c) Der Pendler ist mit dem Zug gefahren, wenn man weiß, dass er pünktlich ist.

Lösung:
a) $P(B \cap \overline{V}) = 0{,}28 \cdot 0{,}89 \approx 24{,}9\ \%$
Regeln: Multiplikationssatz (Pfadregel 1)
b) $P(V) = 0{,}28 \cdot 0{,}11 + 0{,}72 \cdot 0{,}05 \approx 6{,}7\ \%$
Regeln: wie **a)** und Additionssatz (Pfadregel 2) bzw. totale Wahrscheinlichkeit
c) $P(Z|\overline{V}) = \frac{P(Z \cap \overline{V})}{P(\overline{V})} = \frac{0{,}72 \cdot 0{,}95}{0{,}28 \cdot 0{,}89 + 0{,}72 \cdot 0{,}95} \approx 73{,}3\ \%$
Regeln: wie **a)** und **b)** und bedingte Wahrscheinlichkeit bzw. Satz von Bayes

C **1.75** Von den Schülerinnen und Schülern einer BHS schafft ein großer Prozentsatz die Matura (M). Untersucht wird, ob die Schülerinnen und Schüler seinerzeit im 1. Jahrgang im Diagnose-Check positiv (*pos*) oder negativ (*neg*) abgeschnitten haben. Die Ergebnisse sind im Baumdiagramm dargestellt.
Interpretiere die folgenden Ausdrücke:

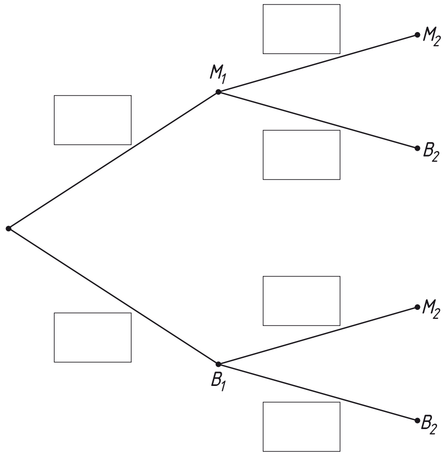


a) 0,67
b) $0{,}82 \cdot 0{,}67 + 0{,}18 \cdot 0{,}22 = 0{,}589$
c) $\frac{0{,}82 \cdot 0{,}33}{0{,}82 \cdot 0{,}33 + 0{,}18 \cdot 0{,}78} \approx 0{,}658$
d) $0{,}82 \cdot 0{,}33 \approx 0{,}271$

ABC **1.76** Eine Fastfood-Kette untersucht drei ihrer Filialen auf Kundenzufriedenheit. Die Anzahl der Befragten verteilt sich im Verhältnis 3 : 4 : 5 auf die Filialen F_1, F_2, F_3. In der ersten Filiale ist jeder 4., in der zweiten jeder 7. und in der dritten jeder 8. Kunde unzufrieden, der Rest jeweils zumindest eher zufrieden (Z).
a) Erstelle ein Baumdiagramm zu diesen Zahlen.
b) Ermittle die Wahrscheinlichkeit, dass ein Befragter unzufrieden ist.
c) Interpretiere den Ausdruck $P(F_1|\overline{Z})$ im Sachzusammenhang.
Markiere die günstigen und möglichen Pfade für diesen Ausdruck.
Berechne $P(F_1|\overline{Z})$.

1.77 In einer Klasse mit 11 Mädchen und 5 Burschen werden zuerst Klassenkassier/in (M_1 oder B_1) und danach Stellvertreter/in (M_2 oder B_2) per Los bestimmt.

BCD



a) Kennzeichne die Äste des Baumdiagramms mit den Wahrscheinlichkeiten.

b) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass beide Ausgewählten gleichen Geschlechts sind.

c) Vergleiche $P(M_1|M_2)$ mit $P(M_2|M_1)$ in Hinblick auf den Rechenansatz.

d) Erkläre, warum die beiden Ziehungen voneinander abhängig sind.

1.78 In einem Konzern wird die Frauenquote analysiert. 2,1 % der Frauen sind in Führungspositionen, von den Männern 5,8 %. Der Frauenanteil insgesamt liegt bei 73 %.

ABD

a) Erstelle ein Baumdiagramm zu diesen Zahlen.

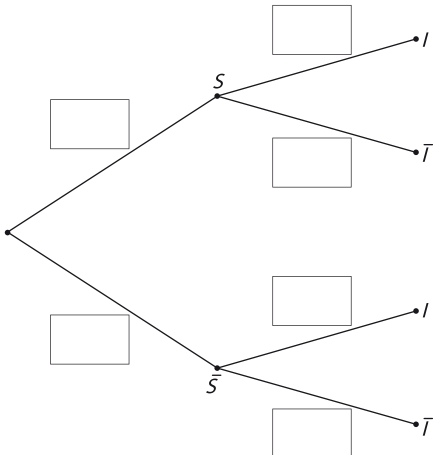
b) Ermittle die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person in diesem Konzern in einer Führungsposition arbeitet.

c) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person in Führungsposition weiblich ist.

d) Der Vorstand veröffentlich via Presseabteilung die Mitteilung, dass der Betrieb erfreulicherweise die Führungspositionen zur Hälfte mit weiblichen Mitarbeiterinnen besetzt habe.
Beurteile, ob diese Aussage stimmt.

1.79 Der Spam-Filter eines bestimmten E-Mail-Diensts identifiziert einen gewissen Anteil der Spams (S) tatsächlich als solche (I), aber auch normale Mails werden zum Teil als Spam eingestuft:
$P(S) = 0{,}59$; $P(I|S) = 0{,}96$; $P(\bar{I}|\bar{S}) = 0{,}91$.

BC



a) Kennzeichne die Äste des Baumdiagramms mit den Wahrscheinlichkeiten.

b) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass ein als Spam identifiziertes Mail in Wirklichkeit ein normales Mail ist.

c) Beschreibe, welches Ereignis zur Gegenwahrscheinlichkeit von ***b)*** passt.

d) Ermittle die Wahrscheinlichkeit für S unter der Bedingung $\bar{I}$.

ABD **1.80** Vorsorgeuntersuchungen sind in der Regel äußerst sinnvoll, weil viele Erkrankungen im Frühstadium gut behandelt werden können. Aber in manchen Bereichen, wenn Tests wenig ausgereift und unzuverlässig sind, entsteht ein hohes Risiko für falsche Befunde.

An einer bestimmten Krankheit zum Beispiel erkranken 2,2 % der Menschen einer Risiko-Altersgruppe, von diesen werden 99,1 % in der Vorsorge richtig diagnostiziert. Von den Gesunden bekommen aber auch 7 Promille eine Diagnose, dass sie krank seien (Anmerkung: Diagnose „krank" = Test „positiv").

a) Erstelle zu diesen Daten ein Baumdiagramm.
b) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass jemand krank ist, obwohl die Vorsorgeuntersuchung keinen Krankheitsbefund ergibt (falscher Negativbefund).
c) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass jemand gesund ist, obwohl durch die Vorsorgeuntersuchung eine Krankheit diagnostiziert wird (falscher Positivbefund).
d) Beurteile die beiden Risiken für falsche Befunde aus ***b)*** und ***c)***.

AB **1.81** Ein Problem der Terrorbekämpfung stellt die große Zahl an Fehlmeldungen und Gerüchten in der direkten Folge eines Anschlags dar. Dies geschieht etwa aus Panik, Unwissenheit, aber auch aus politischen Gründen oder einfach nur aus Boshaftigkeit. Nehmen wir modellhaft an, dass sich $p = 95\,\%$ der Meldungen an die Polizei in den ersten Stunden nach einem Anschlag später als falsch entpuppen. Da die Polizei ein Gespür für solche Meldungen hat, geht sie nur 60 % davon aus Sicherheitsgründen nach. Bei den richtigen Meldungen rückt sie zu 99 % aus.

a) Modelliere diese Annahmen mit einem Baumdiagramm.
b) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass es sich um eine Falschmeldung handelt, wenn die Polizei ausrückt.
c) Stelle eine Gleichung für einen neuen Wert p (Anteil der Falschmeldungen) auf, dass sich die Wahrscheinlichkeit in ***b)*** auf 50 % verbessert.
Löse diese Gleichung.

AB **1.82** Eine Restaurant-Kritikerin weiß aus Erfahrung, dass sie in 23 % der Fälle nach einem Restaurantbesuch eine positive Kritik schreibt, in 48 % der Fälle eine negative. In den restlichen Fällen ist sie unentschlossen und besucht das Restaurant noch einmal. Beim zweiten Versuch ändern sich ihre Quoten zwar nicht, aber falls sie immer noch unentschlossen ist, schreibt sie jedenfalls auch eine negative Kritik.

a) Modelliere den Sachverhalt mit einem Baumdiagramm.
b) Berechne die Wahrscheinlichkeit für eine negative Kritik.
c) Ermittle die Wahrscheinlichkeit, dass eine Kritik erst im zweiten Anlauf erfolgt, wenn sie positiv ist.

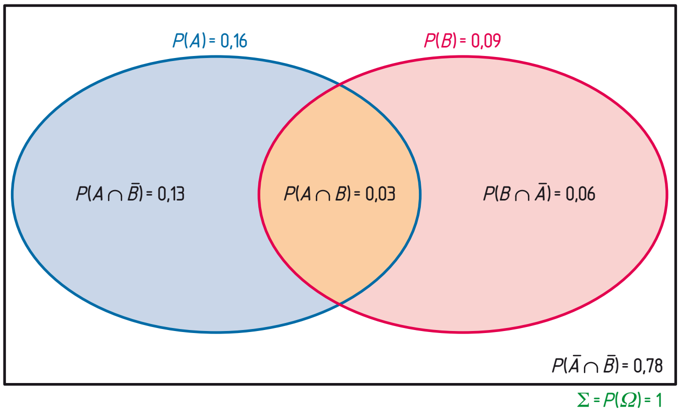
1.3.5 Bedingte Wahrscheinlichkeit und Vierfeldertafeln

ABD

1.83 Ein Zeitungsverlag verkauft zwei Zeitungen A und B. In einer Umfrage geben 16 % an, Zeitung A zu lesen, 9 % B und 3 % lesen beide Publikationen.

a) Erstelle ein Venn-Diagramm mit den Lesewahrscheinlichkeiten.
b) Übertrage das Diagramm in eine Vierfeldertafel.
c) Ermittle die Wahrscheinlichkeit, dass jemand A oder B liest.
d) Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass jemand A liest, wenn er B liest.
e) Prüfe, ob A und B unabhängig sind.

a) Bei der Erstellung des Diagramms gilt es zu beachten, dass hier offensichtlich eine Überschneidung (Vereinbarkeit) gegeben ist, das heißt, $A \cap B \neq \{\}$.
Die 16 % von A teilen sich also auf, 3 % lesen auch B, 13 % nur A, analog für B.
Die Wahrscheinlichkeit, keine der beiden Zeitungen zu lesen, ist $P(\overline{A} \cap \overline{B}) =$
$= 1 - (0{,}13 + 0{,}03 + 0{,}06) = 0{,}78$.



b) Die Vierfeldertafel erklärt sich im Wesentlichen von selbst. Sie ist auf den ersten Blick nicht ganz so anschaulich wie das Venn-Diagramm, aber dafür systematischer und vollständig, da im Unterschied zum Mengendiagramm alle Werte dargestellt sind.

	B	$\overline{B}$	Σ
A	$P(A \cap B)$ 0,03	$P(A \cap \overline{B})$ 0,13	$P(A)$ **0,16**
$\overline{A}$	$P(\overline{A} \cap B)$ 0,06	$P(\overline{A} \cap \overline{B})$ 0,78	$P(\overline{A})$ **0,84**
Σ	$P(B)$ **0,09**	$P(\overline{B})$ **0,91**	**1**

Die **Vierfeldertafel** ist eine tabellarische Darstellung der Wahrscheinlichkeiten aller möglichen UND-Verknüpfungen zweier Ereignisse A und B (entspricht einer 2 x 2-Matrix). Zusätzlich werden die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse A und B selbst als Zeilen- bzw. Spaltensummen (Σ) angegeben.

	B	$\overline{B}$	Σ
A	$P(A \cap B)$	$P(A \cap \overline{B})$	$P(A)$
$\overline{A}$	$P(\overline{A} \cap B)$	$P(\overline{A} \cap \overline{B})$	$P(\overline{A})$
Σ	$P(B)$	$P(\overline{B})$	1

Formelschreibweise einer Vierfeldertafel

	B	$\overline{B}$	Σ
A	+	+ +	$P(A)$
$\overline{A}$		+	+ $P(\overline{A})$
Σ	$P(B)$	+ $P(\overline{B})$	1

Summenbildung in einer Vierfeldertafel

c) Für die Wahrscheinlichkeit, dass jemand A oder B liest, dürfen wegen der gegebenen Vereinbarkeit nicht einfach die Einzelwahrscheinlichkeiten addiert werden. Damit würden die Personen, die beide Zeitungen lesen, doppelt gezählt werden. Damit ergibt sich $P(A \cup B) = 0{,}16 + 0{,}09 - 0{,}03 = 22\,\%$ oder auch $P(A \cup B) = 1 - 0{,}78 = 22\,\%$.

Allgemeiner Additionssatz

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Anmerkung: Ist $P(A \cap B) = 0$, weil A und B unvereinbar sind, dann sieht man, dass daraus der Additionssatz für unvereinbare Ereignisse folgt: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

d) Die bedingte Wahrscheinlichkeit vermindert in Baumdiagrammen die Anzahl der möglichen Äste. Analog werden in der Vierfeldertafel die in Frage kommenden Tabellenzellen auf zumeist eine Zeile oder Spalte eingeschränkt. In diesem Beispiel ist B Bedingung, womit nur noch die erste Spalte der Vierfeldertafel möglich ist. Günstig ist ein Teil davon, in diesem Fall die erste Zelle: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}03}{0{,}09} \approx 33{,}3\,\%$

e) Die (stochastische) Unabhängigkeit kann in Vierfeldertafeln schnell überprüft werden: Die vier Wahrscheinlichkeiten „innen“ müssen sich durch Multiplikation der entsprechenden Randwahrscheinlichkeiten ergeben. Dies ist hier nicht der Fall:

Sonderfall Unabhängigkeit	B	$\overline{B}$	Σ
A	$P(A) \cdot P(B)$	$P(A) \cdot P(\overline{B})$	$P(A)$
$\overline{A}$	$P(\overline{A}) \cdot P(B)$	$P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B})$	$P(\overline{A})$
Σ	$P(B)$	$P(\overline{B})$	1

$P(A) \cdot P(B) = 0{,}16 \cdot 0{,}09 = 0{,}0144$, aber $P(A \cap B) = 0{,}03$, also A und B abhängig.

Anmerkung zur Wahl des Diagrammtyps: Prinzipiell lassen sich alle zweistufigen Baumdiagramme mit zwei Ereignissen pro Stufe in Vierfeldertafeln umschreiben oder umgekehrt. Naheliegend ist aber folgende Wahl:
Baumdiagramme werden hauptsächlich bei mehrstufigen Prozessen mit gegebenen bedingten Wahrscheinlichkeiten gewählt.
Vierfeldertafeln eignen sich besser bei gegebener UND-Wahrscheinlichkeit („gleichzeitiges“ Eintreten zweier Ereignisse).

AB **1.84** In einem Kochkurs kommt es bei der Zubereitung eines komplexen Gerichts mit 32 %iger Wahrscheinlichkeit zu Fehlern bei der Kochzeit (T), zu 25 % bei den Zutatenmengen (M). Mit einer Wahrscheinlichkeit von 60 % passiert keiner dieser beiden Fehler.

a) Modelliere diese Daten mit einer Vierfeldertafel.
b) Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens einer der beiden Fehler passiert.
c) Berechne $P(T|\overline{M})$.

Lösung:

a)

	M	$\overline{M}$	Σ
T	0,17	0,15	**0,32**
$\overline{T}$	0,08	0,60	**0,68**
Σ	**0,25**	**0,75**	**1**

b) $P(\text{max. 1 Fehler}) = 0{,}08 + 0{,}15 + 0{,}6 =$
$= 1 - 0{,}17 = 83\,\%$

c) $P(T|\overline{M}) = \frac{P(T \cap \overline{M})}{P(\overline{M})} = \frac{0{,}15}{0{,}75} = 20\,\%$

1.85 Berechne die fehlenden Zellen in der Vierfeldertafel der absoluten Häufigkeiten. Übertrage die Ergebnisse in eine Vierfeldertafel der relativen Häufigkeiten (Wahrscheinlichkeiten). **AB**

	B	$\overline{B}$	Σ
A	91		**166**
$\overline{A}$			
Σ	**312**		**504**

	B	$\overline{B}$	Σ
A			
$\overline{A}$			
Σ			

1.86 **a)** Erstelle ein Venn-Diagramm für M und N mit $P(M) = 0{,}78$; $P(N) = 0{,}51$ und $P(\overline{M} \cap \overline{N}) = 0{,}14$. **A**
Übertrage das Venn-Diagramm in eine Vierfeldertafel.
b) Erstelle eine Vierfeldertafel für R und S mit $P(\overline{R}) = 0{,}62$; $P(\overline{S}) = 0{,}28$ und $P(R \cap S) = 0{,}21$.
Übertrage die Vier-Felder-Tafel in ein Venn-Diagramm.

1.87 Für zwei Ereignisse X und Y sind $P(X) = 0{,}54$ und $P(Y) = 0{,}31$ gegeben. **A**
a) Erstelle eine Vierfeldertafel, wenn $P(X \cap Y) = 0{,}2$.
b) Erstelle eine Vierfeldertafel, wenn X und Y voneinander unabhängig sind.
c) Erstelle eine Vierfeldertafel für unabhängige Ereignisse X und Y mit unbekannten Wahrscheinlichkeiten $P(X) = x$ und $P(Y) = y$.

1.88 **C**

	B	$\overline{B}$	Σ
S	0,04	0,49	**0,53**
$\overline{S}$	0,12	0,35	**0,47**
Σ	**0,16**	**0,84**	**1**

Der Tourismusverband startet eine Umfrage unter Einheimischen und Gästen, ob sie das Schigebiet zum Schifahren (S) und/oder zum Snowboarden (B) nutzen.

a) Beschreibe das Ereignis zu den Wahrscheinlichkeiten 0,84; 0,12; 0,35 aus der Vierfeldertafel.
b) Interpretiere das Ereignis zu den bedingten Wahrscheinlichkeiten $\frac{0{,}04}{0{,}53}$ und $\frac{0{,}49}{0{,}84}$.

1.89 Ein Kartenspiel besteht aus 32 Karten mit 4 Farben (darunter Herz). Jede Farbe hat 8 Ränge (darunter den König). **ABD**
a) Erstelle eine Vierfeldertafel für die Ereignisse H (Herz) und K (König).
b) Prüfe die Ereignisse auf Unabhängigkeit.
c) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass eine Karte Herz ist, wenn sie König ist.
d) Ermittle die Wahrscheinlichkeit, dass eine Karte nicht König ist, wenn sie Herz ist.

1.90 Ein Mitschüler von dir schreibt bei einer Rechnung zu der gegeben Vierfeldertafel $\frac{0{,}08}{0{,}89}$. Erkläre ihm, warum das jedenfalls keine bedingte Wahrscheinlichkeit sein kann. **D**

	B	$\overline{B}$	Σ
A	0,82	0,07	**0,89**
$\overline{A}$	0,08	0,03	**0,11**
Σ	**0,90**	**0,10**	**1**

ABD **1.91** In einer Schulbibliothek sind 82 % der Bücher digital erfasst, 46 % der Bücher wurden schon einmal verliehen. Auf 41 % der Bücher trifft beides zu.

a) Erkläre, wie groß die Wahrscheinlichkeit im Falle der Unabhängigkeit wäre, dass auf ein Buch beides zutrifft.
b) Berechne, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, ein Buch zu finden, das weder digital erfasst ist noch verliehen wurde.
c) Erstelle eine Vierfeldertafel für diese beiden Merkmale.
d) Ermittle die Wahrscheinlichkeit, dass ein Buch verliehen wurde, obwohl es nicht digital erfasst ist.

ABCD **1.92** Der Betreiber eines Pubs befragt seine Gäste durch Ankreuzen auf Bierdeckeln nach ihrer musikalischen Vorliebe. Die Gäste können S für Schlager/Pop oder R für Rock wählen. 36 % kreuzen S, 47 % R an. 21 % aber wählen gar nicht.

a) Begründe, warum es Gäste geben muss, die beides angekreuzt haben.
b) Erstelle eine Vierfeldertafel für diese Umfrage.
c) Übertrage die Daten in ein Mengendiagramm.
d) Berechne $P(S|R)$.
Beschreibe das Ereignis für diese Wahrscheinlichkeit.

BCD **1.93** Ein Prominenter bekommt in einem sozialen Netzwerk von Leuten, die seine Seite anschauen, mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit eine Kontaktanfrage (K) und/oder eine persönliche Nachricht (N).

	N	$\overline{N}$	Σ
K			
$\overline{K}$		0,54	**0,59**
Σ		**0,81**	**1**

a) Berechne die restlichen Zellen der Vierfeldertafel.
b) Interpretiere die Bedeutung von 0,54.
c) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass ein Besucher der Seite eine Nachricht schreibt, wenn er keine Kontaktanfrage stellt.
d) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass ein Besucher der Seite nur genau eine der beiden Aktionen vollführt.
e) Prüfe, ob die beiden Aktionen stochastisch unabhängig sind.

AB **1.94** Du bist in einem Dorf gestrandet, in dem es nur zwei Taxis gibt, ein modernes und ein eher altes Auto. Das moderne Taxi ist mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{5}{8}$, das alte mit $\frac{1}{4}$ besetzt, beide gleichzeitig mit $\frac{1}{8}$.

a) Modelliere die Situation in einer Vierfeldertafel.
b) Als du gerade das moderne Taxi rufen willst, fährt es vor deiner Nase mit einem Gast davon.
Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass nun das alte Taxi frei ist.

Zusammenfassung

Wahrscheinlichkeiten von 0 % (unmögliches Ereignis) bis 100 % (sicheres Ereignis) werden unterschiedlich definiert.

Klassische Definition: Für gleichwahrscheinliche Elementarereignisse gilt

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{Anzahl der für } A \text{ günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl aller möglichen Ergebnisse}} = \frac{\text{„Günstige"}}{\text{„Mögliche"}}$$

Axiomatische Definition:

(1) $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$

(2) sicheres Ereignis: $P(\Omega) = 1$ $\Rightarrow$ unmögliches Ereignis: $P(\{\,\}) = 0$
$\Rightarrow$ Gegenereignis: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

(3) Additionssatz für unvereinbare Ereignisse ($A \cap B = \{\,\}$): $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
$\Rightarrow$ allgemeiner Additionssatz: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Statistische Definition: Die relative Häufigkeit h_A des Ereignisses A ist ein ungefähres Maß für die Wahrscheinlichkeit $P(A)$. Gesetz der großen Zahlen: Die relative Häufigkeit stabilisiert sich bei sehr vielen Versuchen um die tatsächliche Wahrscheinlichkeit.

In der **Kombinatorik** wird wie folgt kategorisiert, benannt und verallgemeinert.

Permutationen (n aus n Elementen **mit** Berücksichtigung der **Reihenfolge**)	
ohne sich wiederholende Elemente	$n_1, n_2, \ldots$ sich wiederholende Elemente
$n!$	$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots}$
Variationen (k aus n Elementen **mit** Berücksichtigung der **Reihenfolge**)	
ohne Wiederholung/Zurücklegen	mit Wiederholung/Zurücklegen
$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$	n^k
Kombinationen (k aus n Elementen **ohne** Berücksichtigung der **Reihenfolge**)	
ohne Wiederholung/Zurücklegen	mit Wiederholung/Zurücklegen
$\binom{n}{k}$	$\binom{n+k-1}{k}$

Multiplikationssatz für unabhängige Ereignisse: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Baumdiagramm:
Wahrscheinlichkeiten entlang eines Pfads werden multipliziert: Pfadregel 1 (UND $\rightarrow$ mal).
Wahrscheinlichkeiten mehrerer Pfade werden addiert: Pfadregel 2 (ODER $\rightarrow$ plus).

Bedingte Wahrscheinlichkeit: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ bzw. $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

Allgemeiner Multiplikationssatz: $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$ bzw.
$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$

Unabhängigkeit von A und B liegt vor, wenn $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ bzw.
wenn $P(A|B) = P(A)$ bzw. $P(B|A) = P(B)$

Totale Wahrscheinlichkeit: $P(A) = P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2) + \ldots$

Satz von Bayes: $P(B_i|A) = \frac{P(B_i) \cdot P(A|B_i)}{P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2) + \ldots} = \frac{P(B_i) \cdot P(A|B_i)}{P(A)}$

Vermischte Aufgaben zur Vertiefung

ABCD **1.95 Auch mit Babys muss man rechnen**

a) Die Wahrscheinlichkeit für ein Sonntagskind (Geburt am Sonntag) liege bei 12 %.
- Interpretiere die folgenden Rechnungen im Sachzusammenhang:
  (1) $0{,}12^4$
  (2) $0{,}12 \cdot 0{,}88 \cdot 2$
  (3) $1 - 0{,}88^3$

b) In einer Box liegen 4 blaue und 7 rosafarbene Schnuller.
Ein Baby greift in die Box und zieht zufällig drei Schnuller heraus.
- Vergleiche die Anzahl der möglichen Ziehungen bei diesem Zufallsexperiment, wenn das Baby entweder auf einen Griff oder hintereinander ohne Zurücklegen zieht.
- Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass jeder Schnuller rosa ist.
- Modelliere das Zufallsexperiment mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten als Baumdiagramm.
  Markiere alle Pfade für das Ereignis, dass genau 1 Schnuller rosa ist.

c) Nach gut einem Lebensjahr können Kinder mit einer Wahrscheinlichkeit von 75 % frei gehen und zu 55 % schön und selbstständig aus einem Glas trinken. Die beiden Ereignisse sind (stochastisch) unabhängig.
- Ermittle die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewähltes Kind dieses Alters genau eine bzw. höchstens eine der beschriebenen Fähigkeiten aufweist.

d) Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kleinkind die Krabbelstube (K) besucht, beträgt in einem bestimmten Ort 31 %, diejenige für einen privaten Babysitter (B) daheim 8 %. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 3 % kommt ein Kleinkind in den Genuss beider Betreuungsvarianten.
- Prüfe, ob die beiden Ereignisse K und B abhängig sind.
- Erstelle eine vollständige Vierfeldertafel für diese Angaben.
- Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass in diesem Ort ein Kleinkind zumindest auf eine der angesprochenen Varianten betreut wird.
- Ermittle die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kleinkind in diesem Ort von einem privaten Babysitter betreut wird, wenn es nicht die Krabbelstube besucht.
- Ordne den beiden Rechnungen 1 und 2 jeweils die richtige bedingte Wahrscheinlichkeit aus A bis D zu.

1	$\frac{0{,}03}{0{,}08}$	☐
2	$\frac{0{,}28}{0{,}31}$	☐

A	$P(\overline{B} \mid K)$
B	$P(B \mid K)$
C	$P(\overline{K} \mid B)$
D	$P(K \mid B)$

1.96 **Projekt „Resort Einstein“** ABD

Im Zuge dieses Projekts sollen für das Seminarhotel „Resort Einstein“ Entscheidungen und Bewertungen mithilfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung getroffen werden.

a) Aus 8 Männern und 4 Frauen sollen für die Chefetage des Resorts 4 verschiedene Führungsjobs vergeben werden. Jede Person wird mit gleicher Wahrscheinlichkeit zufällig ausgewählt.
- Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine Frau gewählt wird.
- Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass die Hälfte der Jobs von Frauen besetzt wird.

b) Jede Buchung in diesem Resort wird erfahrungsgemäß mit einer Wahrscheinlichkeit von 14 % storniert.
- Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass von 3 unabhängig voneinander durchgeführten Buchungen höchstens eine storniert wird.
- Erkläre, was mit der Gleichung $0{,}86^n = 0{,}5$ berechnet wird.

c) Das Tourismusangebot konzentriert sich hauptsächlich auf den Winter. Die neue Chefetage denkt an eine Erweiterung in Richtung Sommer und führt dazu eine Umfrage unter den Gästen durch: 68 % würden im Winter abermals kommen, 42 % im Sommer. 18 % würden nicht noch einmal im Resort buchen.
- Erkläre, wie viel Prozent der Gäste sich sowohl im Winter als auch im Sommer einen erneuten Besuch überlegen.
- Erstelle eine Vierfeldertafel für diese Umfrage.
- Berechne, mit welcher Wahrscheinlichkeit eine befragte Person im Sommer kommen würde, wenn bekannt ist, dass sie im Winter nicht mehr kommt.
- Übertrage die Vierfeldertafel in ein Venn-Diagramm.

d) Die Umfrage aus ***c)*** soll nun auch noch geschlechtsspezifisch ausgewertet werden.
18 % kommen nicht wieder (davon 57 % weiblich),
der Rest könnte Stammgast werden (davon 38 % weiblich).
- Erstelle ein Baumdiagramm mit allen Wahrscheinlichkeiten.
- Prüfe, ob mehr als die Hälfte der Befragten weiblich ist.
- Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass eine weibliche Person das Resort nicht wieder besuchen will.

e) Einer weiteren Umfrage kann entnommen werden, dass 52 % aus rein touristischen Gründen (T) und 77 % aus beruflichen Gründen (B) in das Resort reisen.
Es wird eine (stochastische) Unabhängigkeit angenommen.
- Berechne $P(\overline{T} \cap \overline{B})$
  Beschreibe das Ereignis zu dieser Wahrscheinlichkeit.
- Zeige, dass in diesem Fall $P(T|B) = P(T)$ gilt.
- Erkläre, welche Wahrscheinlichkeit zusätzlich gegeben sein muss, wenn T und B voneinander abhängig sind.

Wissens-Check

Bearbeite die Aufgaben. **Begründe** jeweils deine Auswahl.

		gelöst
1	Ergänze die Textlücken durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine korrekte Aussage entsteht. Das Gesetz der großen Zahlen wird häufig vereinfacht so interpretiert, dass bei ___①___ unabhängigen Wiederholungen eines Zufallsexperiments die relative Häufigkeit eines Zufallsergebnisses ___②___ .	

①		②	
einer bestimmten Anzahl von	A ☐	der theoretischen Wahrscheinlichkeit entspricht	A ☐
mindestens zehn	B ☐	sich um die theoretische Wahrscheinlichkeit stabilisiert	B ☐
ausreichend vielen	C ☐	sich der theoretischen Wahrscheinlichkeit ohne weitere Ausreißer immer mehr nähert	C ☐

2 Zwei Würfel werden geworfen. Ordne den in 1 und 2 beschriebenen Zufallsexperimenten das jeweils wahrscheinlichste Ereignis aus A bis D zu.

1	Die Augensumme der beiden Würfel wird notiert.	☐	
2	Die höchste der beiden geworfenen Augenzahlen wird notiert.	☐	

A	1
B	6
C	7
D	12

3 Ordne den kombinatorischen Ausdrücken 1 und 2 jeweils den äquivalenten Term aus A bis D zu.

1	$\frac{6!}{4! \cdot 2!}$	☐
2	$\frac{6!}{3!}$	☐

A	$\binom{6}{4}$
B	$6!$
C	$6 \cdot 5 \cdot 4$
D	$\binom{6}{3}$

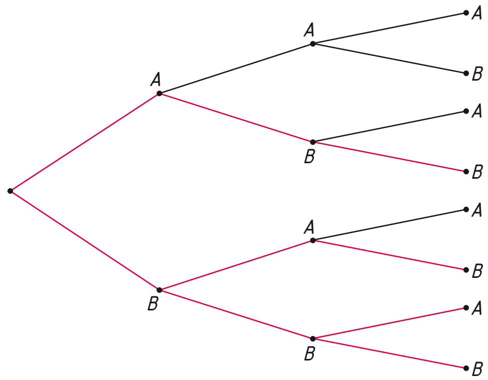
4 In einer Urne befinden sich 10 rote und 6 schwarze Kugeln, 5 Kugeln werden hintereinander ohne Zurücklegen gezogen. Es ist die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, dass 3 Kugeln rot sind. Der Beginn der Rechnung lautet:

$\frac{10}{16} \cdot \frac{9}{15} \cdot \frac{8}{14} \cdot \frac{6}{13} \cdot \frac{5}{12}$

Kreuze an, wie dieser Ansatz richtig fortgesetzt wird.

A ☐	$\cdot 1$	D ☐	$\cdot 5!$
B ☐	$\cdot \binom{5}{2}$	E ☐	$\cdot \frac{5!}{3!}$
C ☐	$\cdot 5$		

		gelöst
5	In einer Getränkekiste befinden sich bunt gemischt Flaschen mit Apfelsaft (A) und Flaschen mit Birnensaft (B), und zwar zumindest je 3 Flaschen. Drei Flaschen werden zufällig hintereinander gezogen. Ordne dem rot markierten Ereignis jeweils die richtige Beschreibung A bis D zu.	



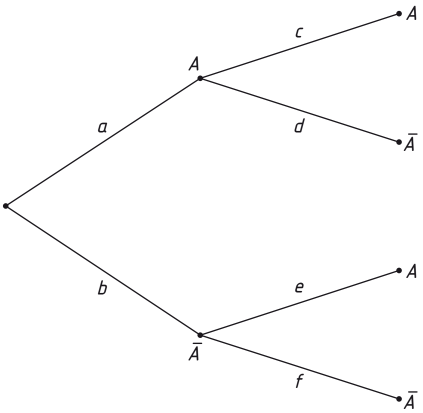
1	Die rot markierten Pfade beschreiben, dass ...	☐
2	Das Gegenereignis zu den rot markierten Pfaden beschreibt, dass ...	☐

A	... mindestens 1 A gezogen wird.
B	... höchstens 1 A gezogen wird.
C	... genau 1 A gezogen wird.
D	... mehr als 1 A gezogen wird.

6 Ein Baumdiagramm mit den unbekannten Wahrscheinlichkeiten a bis f ist gegeben.

a) Aus einem Kartenspiel mit 20 Karten, darunter 4 Asse (A), werden 2 Karten ohne Zurücklegen gezogen. Bestimme die Wahrscheinlichkeiten a bis f.

b) Kreuze die für das Baumdiagramm richtige Aussage an.



A	☐	$a \cdot c = a \cdot d$
B	☐	$a + b + c + d + e + f = 3$
C	☐	$a \cdot c + a \cdot d = 1$
D	☐	$a < c$
E	☐	$b < a$

Lösung:
1) 1 → C; 2 → B   2) 1 → C; 2 → B   3) 1 → A; 2 → C   4) B   5) 1 → B; 2 → D
6) $a = \frac{4}{20}$; $b = \frac{16}{20}$; $c = \frac{3}{19}$; $d = \frac{16}{19}$; $e = \frac{4}{19}$; $f = \frac{15}{19}$; B

CLIL-Review: Probability

Get in pairs and work on the following tasks (1.E1, 1.E2).
You may use your formula collection and an online dictionary.
Please find important vocabulary and other supporting material to these tasks as well as solutions and example answers in the solutions book. For further information have a look at page 2 of this book.

BCD **1.E1** First read the text about probability and get familiar with the new terms.

An experiment has a finite number of outcomes. They are all summarized in the outcome set Ω.
One single event E of this experiment defines a subset of Ω.
The complement $\overline{E}$ of the event E is the subset of Ω, where E does not occur.

Two events of the same experiment are **independent** if the occurrence of one event has no effect on the occurrence of the other one.

They are **mutually exclusive** if they cannot occur simultaneously.
We call $P(E)$ the (theoretical) probability of the event E if the experiment has $n(\Omega)$ outcomes, all **equally likely**, and $n(E)$ of them are the event E.

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = \frac{\text{possible outcomes of } E}{\text{possible outcomes at all}} \quad \text{for } 0 \leqslant P(E) \leqslant 1$$

$$P(E) = 0 \text{ ... impossibility; } P(E) = 1 \text{ ... certainty}$$

If Ω has only n different possible events (E_1 to E_n), then the sum of all the probabilities is:

$$\sum_{i=1}^{n} P(E_i) = 1$$

The probability of the complement event is: $P(\overline{E}) = 1 - P(E)$

Take a well-shuffled standard deck of 52 cards – among them 4 aces and 4 queens – and let your partner draw one single card out of the deck.
Note down which card has been drawn.
After that the card is returned and the deck is reshuffled. Draw the next card.

Answer the following questions using mathematical calculations:
a) What is the probability of drawing an ace?
b) What is the probability of drawing a queen?
c) What is the probability of not drawing an ace?
d) What is the probability of drawing an ace or a queen?
e) If you draw 2 cards at the same time, argue if the 2 drawings are independent. Are they mutually exclusive?

Compare your calculations with those of your partner.
Discuss your solutions.
Prepare a presentation in class.

1.E2 Read the text about the visualization of probability with the help of a **tree diagram** and get familiar with this model.

ABD

A tree diagram can be used to find probabilities for combined events more conveniently. The tree is built up in stages. Each stage symbolizes one certain activity.
The probability for the activity is written on the branch of the tree, the end of the branch denotes one possible outcome.

Look at the following example:

Two cards are dealt from a well-shuffled deck of 52 cards. (There are 13 hearts in the deck.)
Draw the tree diagram for the possible outcomes and ...

a) find the probability that 0, 1 or 2 hearts appear.

b) find the probability that the second card is a heart.

Solution:

Each route along the branches leads to a combined event. To find its probability, we have to multiply the probabilities along the route.
To find the probability for one or the other of the combined events, we have to add their probabilities.

a) 0 heart: We find one branch with 2 green points ("no heart"):

$\frac{39}{52} \cdot \frac{38}{51} = 0{,}5588... \approx 55{,}9\ \%$

1 heart: we find 2 branches with one red and one green point ("exactly one heart"):

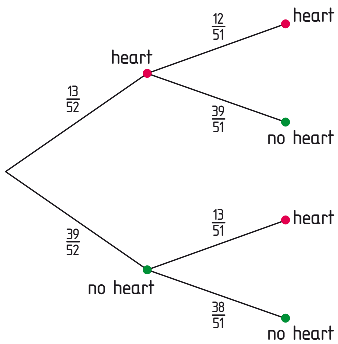
$\frac{13}{52} \cdot \frac{39}{51} + \frac{39}{52} \cdot \frac{13}{51} = 0{,}3823... \approx 38{,}2\ \%$

2 hearts: we find one branch with 2 red points:

$\frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51} = 0{,}0588 \approx 5{,}9\ \%$

b) There are two routes for the 2^{nd} card to be a heart:

$\frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51} + \frac{39}{51} \cdot \frac{13}{51} = 0{,}25 = 25\ \%$



Solve the following task.
Discuss your solutions with your partner and prepare for a presentation in class.

A fair coin ("head" on one side of the coin and "number" on the other side) and a fair die are tossed at the same time.
Draw the tree diagram for the combined event.

a) Find the probability of getting "head" and "6".

b) Find the probability of getting "head" and "not 6".
Argue if the value of the probability changes, when we ask for the combination "number" and "not 6".