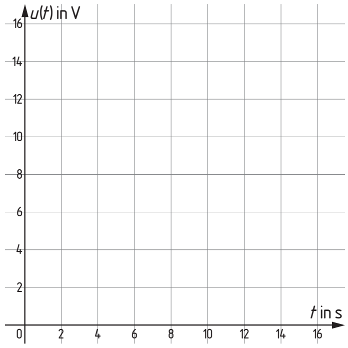
**66 Ladung eines Kondensators**

Ein ungeladener Kondensator wird durch das Anlegen einer Ladespannung $U_0$ in Volt (V) aufgeladen. Der Spannungsverlauf am Kondensator abhängig von der Zeit lässt sich durch die Funktion $u$ beschreiben:

$u(t) = U_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ mit $U_0 = 12$ V, $\tau = 1{,}16$ s … Zeitkonstante

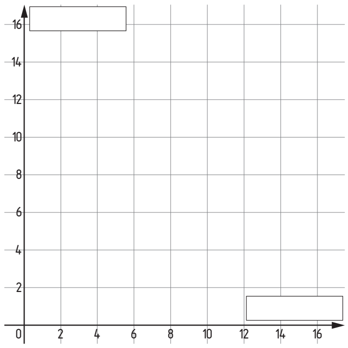
$t$ … Zeit ab Beginn des Ladevorgangs in s
$u(t)$ … Spannung zum Zeitpunkt $t$ in V

***a)*** – Stellen Sie die Funktion $u$ im Intervall [0; 16] in nebenstehendem Koordinatensystem grafisch dar. B




– Argumentieren Sie anhand der Funktionsgleichung, dass sich die Spannung $u$ des Kondensators für $t \longrightarrow \infty$ der angelegten Ladespannung $U_0$ nähert. D

– Skizzieren Sie die Umkehrfunktion der Funktion $u$ in nachfolgendem Koordinatensystem. Ergänzen Sie die fehlende Achsenbeschriftung. A




***b)*** – Ermitteln Sie eine Gleichung der Tangente an den Funktionsgraphen von $u$ an der Stelle $t = 0$ s. B

– Überprüfen Sie nachweislich, dass diese Tangente den Graphen der Funktion $u_0(t) = 12$ an der Stelle $t = \tau$ schneidet. D

***c)*** Es soll ermittelt werden, zu welchem Zeitpunkt der Kondensator 80 % der angelegten Spannung $U_0$ erreicht hat. Dabei wurde folgende Rechnung durchgeführt:

$$0{,}8 \cdot U_0 = U_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$
$$0{,}8 = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}$$
$$\ln(0{,}8) = \ln(1) - \ln\left(e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$
$$\ln(0{,}8) = \ln(1) + \frac{t}{\tau}$$
$$\ln(0{,}8) = \frac{t}{\tau}$$
$$t = \tau \cdot \ln(0{,}8)$$

– Erklären Sie, welcher Fehler gemacht wurde, und stellen Sie die Rechnung richtig. B D

***a)*** B_T2_4.1, B_T2_3.1, B_T2_3.2 ***b)*** A_3.2, B_T2_4.4 ***c)*** A_2.3

**67 Auslaufbecken**

Bei einem Fertigungsprozess werden glühende Metallteile zur Abkühlung über eine steile Rutsche in ein horizontales, mit Wasser gefülltes Auslaufbecken befördert.

***a)*** Es wird davon ausgegangen, dass der Reibungswiderstand, den der Körper im Auslauf erfährt, proportional zu seiner momentanen Geschwindigkeit ist.
Für ein bestimmtes Werkstück wird die Geschwindigkeit durch folgende Differenzialgleichung beschrieben:

$m \cdot \frac{dv}{dt} = -k \cdot v$

$t$ … Zeit in s, $v(t)$ … Geschwindigkeit zur Zeit $t$ in $\frac{m}{s}$

$m$ … Masse in kg, $k$ … Reibungskonstante in $\frac{kg}{s}$

B D – Zeigen Sie mithilfe der Methode *Trennen der Variablen*, dass die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung lautet:
$v(t) = C \cdot e^{-\frac{k}{m} \cdot t}$

Bei einem Metallteil mit einer Masse von $m = 75$ kg wird beim Übergang in die Horizontale zum Zeitpunkt $t = 0$ s eine Geschwindigkeit von $v = 43{,}2\ \frac{km}{h}$ gemessen.
Nach 3 Sekunden geradliniger Bewegung hat das Metallstück eine Geschwindigkeit von $13\ \frac{km}{h}$.

B – Bestimmen Sie die spezielle Lösung der Differenzialgleichung.

***b)*** Für ein weiteres Metallstück kann die Bewegung im Wasser des Auslaufbeckens durch die Funktion $v$ beschrieben werden:

$v(t) = 10 \cdot e^{-0{,}65 \cdot t}$

$t$ … Zeit in s, $v(t)$ … Geschwindigkeit zur Zeit $t$ in $\frac{m}{s}$

D – Begründen Sie mathematisch, warum $v$ für $t \to \infty$ gegen 0 geht.

A – Erstellen Sie eine Formel, mit der der Weg $s$ berechnet werden kann, den das Metallstück im Intervall $[t_0; t_1]$ zurücklegt.

$s =$ ______________________

C – Ergänzen Sie die Textlücken in folgendem Satz durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine korrekte Aussage entsteht.

Erreicht ein gleichartiges Metallstück das Auslaufbecken ____①____ als das erste Metallstück, so wird dessen Geschwindigkeit $w$ durch ____②____ beschrieben.

| ① | |
|---|---|
| um zwei Sekunden früher | A |
| um zwei Sekunden später | B |
| mit doppelter Anfangsgeschwindigkeit | C |

| ② | |
|---|---|
| $w(t) = 10 \cdot e^{-0{,}65 \cdot (t-2)}$ | A |
| $w(t) = 10 \cdot e^{-0{,}65 \cdot t - 2}$ | B |
| $w(t) = 10 \cdot e^{-0{,}65 \cdot t} + 2$ | C |

***a)*** B_T2_4.7[1] ***b)*** B_T2_4.1, B_T2_4.5, B_T2_3.2

[1] Dieser Deskriptor wird mit Einführung des neuen modularen Lehrplans tragend.

**68 Radioaktive Isotope**

Manche Elemente, wie zum Beispiel Kalium, Wasserstoff oder Kohlenstoff, bestehen aus radioaktiven Isotopen.

***a)*** Der Körper eines Menschen mit einer Masse von 75 kg enthält 140 g Kalium.

– Berechnen Sie den Anteil von Kalium an der Gesamtmasse dieses Menschen in Prozent. B

1,17 % der Kaliummasse entfallen auf das radioaktive Kalium-Isotop K-40.

– Geben Sie die Masse in kg an K-40 im Körper dieses Menschen in Gleitkommadarstellung in der Form $a \cdot 10^k$ mit $1 \leq a < 10$ und $a \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$ an. B

***b)*** Der radioaktive Zerfall des Wasserstoff-Isotops Tritium kann durch die Funktion *N* beschrieben werden. Dabei ist $N(t)$ die Masse in Nanogramm (ng) des vorhandenen Tritiums nach *t* Jahren (a). Die erste Ableitung der Funktion *N* ist direkt proportional zu *N*. Die Proportionalitätskonstante $\lambda$ in $a^{-1}$ ($\lambda > 0$) wird als Zerfallskonstante bezeichnet.

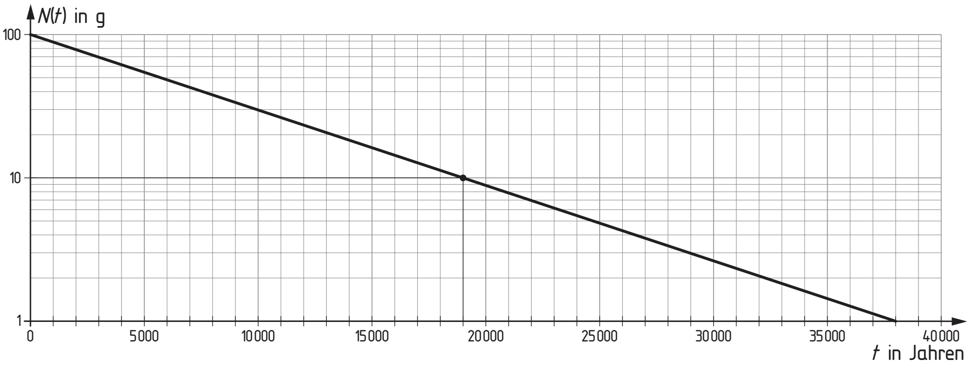
– Stellen Sie die Differenzialgleichung auf, die den radioaktiven Zerfall von Tritium beschreibt. A

– Ermitteln Sie die allgemeine Lösung mithilfe der Methode *Trennen der Variablen*. B

Zu Beginn der Messung sind 10 ng Tritium vorhanden, nach einem halben Jahr sind es noch 9,72 ng.

– Ermitteln Sie die Masse an Tritium, die nach zehn Jahren zerfallen ist. A B

***c)*** Der radioaktive Zerfall des Kohlenstoff-Isotops C-14 kann durch die Funktion *N* beschrieben werden. Die Abbildung zeigt den Graphen dieser Funktion *N*.




– Erklären Sie, warum die Skalierung der senkrechten Achse nicht mit 0 beginnen kann. D

– Erklären Sie mithilfe der Abbildung, warum es sich bei der Funktion *N* um eine Exponentialfunktion handeln muss. D

– Stellen Sie eine Gleichung der Funktion *N* auf. A

– Lesen Sie aus dem abgebildeten Funktionsgraphen die Halbwertszeit des Kohlenstoff-Isotops C-14 ab. C

***a)*** A_1.5, A_1.2 ***b)*** B_T2_4.6, B_T2_4.7[1] ***c)*** B_T2_3.4[1]

[1] Dieser Deskriptor wird mit Einführung des neuen modularen Lehrplans tragend.