6.3 Rechnen mit Bruchtermen

Bei der **Addition und Subtraktion von Bruchtermen** ist zuerst der gemeinsame Nenner zu suchen. Der einfachste gemeinsame Nenner ist das kgV aller Nenner. Erst nach dem Erweitern aller Bruchterme auf den gemeinsamen Nenner kann man die Terme im Zähler vereinfachen, wobei die Rechenreihenfolge, die Klammerauflösungsregeln und die Vorzeichenregeln zu beachten sind. Im Beispiel **6.17 *a)*** wird eine günstige Vorgangsweise im Detail gezeigt.

Bei der **Multiplikation** von Bruchtermen werden die Zähler miteinander multipliziert und durch das Produkt der Nenner dividiert. Meist kann vor dem Ausmultiplizieren gekürzt werden (siehe Beispiel **6.17 *b)***).

Bei der **Division von Bruchtermen** wird der 1. Bruchterm mit dem Kehrwert des 2. Bruchterms multipliziert.

Wenn ein Bruchterm potenziert werden muss, dann sind der Zähler und der Nenner zu potenzieren.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

6.17 Beispiel

AB

a) Addiere die beiden Bruchterme: $\frac{5-2x}{4+4x+x^2} + \frac{8}{4-x^2}$

b) Multipliziere die beiden Bruchterme: $\frac{2x-4}{x+2} \cdot \frac{3x+6}{x-2}$

c) Potenziere und dividiere: $\left(\frac{2a+5}{2a-5}\right)^2 : \frac{(2a)^2}{4a^2-25}$

Lösung

a) Eine empfohlene Vorgangsweise mithilfe einer Tabelle:

Nenner	Faktorenzerlegung	Erweiterungsform auf das kgV
$4+4x+x^2$	$(2+x)^2$	$(2-x)$
$4-x^2$	$(2+x)\cdot(2-x)$	$(2+x)$
gemeinsamer Nenner	$(2+x)^2\cdot(2-x)$	

$$\frac{5-2x}{4+4x+x^2} + \frac{8}{4-x^2} = \frac{(5-2x)\cdot(2-x)+8\cdot(2+x)}{(2+x)^2\cdot(2-x)} =$$

$$= \frac{10-4x-5x+2x^2+16+8x}{(2+x)^2\cdot(2-x)} = \frac{26-x+2x^2}{(2+x^2)\cdot(2-x)}$$

b) Man kann die Zähler und die Nenner ausmultiplizieren. Bei diesem Bruch ist aber zu erkennen, dass man die Zähler zerlegen und dann kürzen kann.
Dies ist hier die günstigste Vorgangsweise.

$$\frac{2x-4}{x+2} \cdot \frac{3x+6}{x-2} = \frac{2\cdot(x-2)\cdot 3\cdot(x+2)}{(x+2)\cdot(x-2)} = 6$$

c) $\left(\frac{2a+5}{2a-5}\right)^2 : \frac{(2a)^2}{4a^2-25} = \frac{(2a+5)^2}{(2a-5)^2} \cdot \frac{(2a-5)\cdot(2a+5)}{4a^2} = \frac{(2a+5)^3}{4a^2\,(2a-5)}$

Übungen

6.18 Gib jeweils die Definitionsmenge der angegebenen Bruchterme in G = ℝ an. Vereinfache die folgenden Additionen bzw. Subtraktionen der Bruchterme, kürze so weit wie möglich. **AB**

a) $\frac{(2x-2y)^2}{3x^2y} - \frac{(2x+3y)^2}{3x^2y}$ **b)** $\frac{4a-9b}{12a^2b} - \frac{3a-5b}{15a^2b}$

c) $\frac{2z+3}{6z-4} + \frac{62-12z^2-7z}{24-54z^2}$ **d)** $\frac{3r}{r^2-2r+1} - \frac{2}{r-1}$

e) $\frac{-n}{2n-4} - \frac{n^2}{n^2-4}$ **f)** $\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1} + 1$

g) $\frac{-6+12a}{9a^2-4} - \frac{-6a}{(3a-2)^2}$ **h)** $\frac{3-3x}{16-8x+x^2} + \frac{12+2x}{16-x^2}$

6.19 Finde heraus, welche von den beiden Rechnungen richtig gelöst ist. Erkläre, welche Fehler vorkommen. **BD**

A:

$$\frac{2x+3y}{2x^2} - \frac{2x-3y}{x^2} =$$
$$\frac{2x+3y-2x-3y}{x^2} = 0$$

B:

$$\frac{2x+3y}{2x^2} - \frac{2x-3y}{x^2} =$$
$$= \frac{2x+3y-2(2x-3y)}{2x^2} = \frac{-2x+9y}{2x^2}$$

6.20 Vereinfache die Bruchterme so weit wie möglich. **AB**

a) $\frac{-(a+1)^2+4a}{9+a^2} : \frac{6a^2-6}{(3+a)^2-6a}$ **b)** $\frac{4x^2-4x+1}{4x^2-1} \cdot \frac{8x}{1-4x^2}$

c) $\frac{(u+2)^2-8u}{u^2+9} : \frac{6u^2-24}{6u-(u+3)^2}$ **d)** $\left(\frac{r}{2}-1\right) \cdot \frac{3}{r} - r$

6.21 Wandle die Doppelbrüche in eine Division von 2 Bruchtermen um, bzw. verwende die Regel für die Umwandlung von Doppelbrüchen. **AB**

a) $\frac{\frac{1+x}{1-x}}{\frac{1+x}{x}}$ **b)** $\frac{\frac{x}{3}-1}{5x}$ **c)** $\frac{\frac{x}{3}\cdot 20}{x^2}$ **d)** $\left(\frac{\frac{4}{x}}{5}\right)^2$ **e)** $\frac{25}{\frac{x}{2}+1}$ **f)** $\frac{\frac{x^2}{2}}{\frac{(x+1)^2}{x^2-1}}$

6.22 Die Lehrperson hat die nebenstehende Rechnung auf die Tafel geschrieben. **BC**

Erkläre diesen Rechenweg.

Finde einen weiteren gültigen Rechenweg.