5 Vektoren

Als Begründer der Vektorrechnung gilt der deutsche Mathematiker und Sprachwissenschafter **Hermann Günther Graßmann** (1809 – 1877). 1844 erschien sein Hauptwerk, die „Ausdehnungslehre“, das die damaligen zeitgenössischen Vorstellungen sprengte und daher zunächst unbeachtet blieb. Erst gegen Ende seines Lebens erhielt Graßmann durch berühmte Mathematiker wie Hermann Hankel (1839 – 1873), Felix Klein (1849 – 1925) und Alfred Clebsch (1833 – 1872), die seiner Theorie zum Durchbruch verhalfen, späte wissenschaftliche Anerkennung.

5.1 Grundlagen der Vektorrechnung

5.1.1 Grundbegriffe

AB **5.1** Ein Dreieck ist mit seinen 3 Eckpunkten gegeben: $A(-1|-1)$; $B(0|4)$ und $C(-4|2)$. Zeichne in ein 2-dimensionales Koordinatensystem jeweils Pfeile von A nach B, von B nach C und von A nach C ein. Schreibe alle 3 Vektoren mit ihren 2 Koordinaten an.

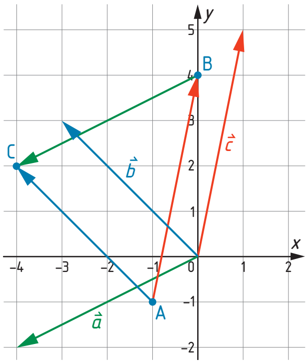
Festlegung: Ein tabellenartiges Zahlenschema heißt **Matrix**. Unter einem Vektor versteht man ein Zahlenschema, das aus einer Zeile oder aus einer Spalte besteht. Ein Vektor ist daher ein Sonderfall einer Matrix – eine Zahlenliste mit nur einer Spalte oder mit nur einer Zeile.
Zur Bezeichnung eines Vektors verwendet man einen Kleinbuchstaben unter einem Pfeil oder 2 Großbuchstaben unter einem Pfeil:

zB $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1{,}5 \end{pmatrix}$ ... 2-dimensionaler Spaltenvektor mit den Koordinaten $a_x = 2$ und $a_y = -1{,}5$

oder $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ ... 3-dimensionaler Zeilenvektor mit den Koordinaten 3; 5 und $-\frac{1}{3}$.

Da bei der Schreibweise als Zeilenvektor Verwechslungen mit Punkten auftreten können, verwenden wir im Folgenden ausschließlich Spaltenvektoren.

Geometrische Veranschaulichung: 2- bzw. 3-dimensionale Vektoren lassen sich geometrisch gut als Pfeile in einem 2- bzw. 3-dimensionalen Koordinatensystem veranschaulichen und sind daher für viele geometrische, naturwissenschaftliche und technische Aufgabenstellungen sehr hilfreich. Zur Vereinfachung beschränken wir uns auf 2-dimensionale Vektoren.
Man kann die Koordinaten des 2-dimensionalen Vektors im ebenen Koordinatensystem als Koordinaten eines Punkts verstehen. In diesem Punkt endet ein vom Ursprung ausgehender Pfeil mit seiner Spitze und gibt somit eine **Richtung**, eine **Orientierung** sowie eine **Länge (= Betrag des Vektors)** vor. Unter der Richtung versteht man den Anstieg k der Geraden, auf dem der Pfeil liegt, unter der Orientierung die Richtung, in die der Pfeil zeigt.
Dieser vom Ursprung ausgehende Pfeil stellt den so genannten **Ortsvektor** dar. Alle gleich langen, gleich gerichteten und gleich orientierten Pfeile in der Ebene repräsentieren den gleichen Vektor. Der Ortsvektor ist daher nur einer von unendlich vielen Repräsentanten eines Vektors.



Die Lösung der eingangs gestellten Aufgabe:

Der rote Vektor von A nach B ... $\overrightarrow{AB} = \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

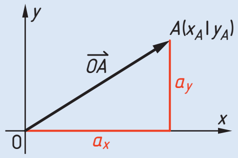
Der blaue Vektor von A nach C ... $\overrightarrow{AC} = \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$

Der grüne Vektor von B nach C ... $\overrightarrow{BC} = \vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$

Ein **Vektor** ist ein geordnetes Zahlenschema mit mehreren Zahlen in einer Zeile oder in einer Spalte. Die Zahlen nennt man **Koordinaten** des Vektors.

Ein Vektor mit 2 **Koordinaten** (a_x und a_y) kann als Menge aller gleich langer, gleich gerichteter und gleichorientierter **Pfeile** in einem ebenen Koordinatensystem interpretiert werden. Ein einzelner Pfeil gilt als Repräsentant des Vektors.

Ist der Anfangspunkt des Vektors $\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ der Koordinatenursprung O, so ist sein Endpunkt der Punkt mit den Koordinaten $A(a_x|a_y)$. Man nennt den Vektor dann den **Ortsvektor** von A und schreibt $\overrightarrow{OA}$.

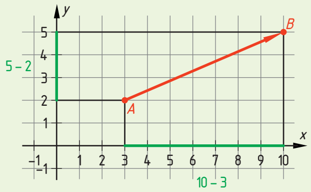


Ein Pfeil zwischen 2 beliebigen Punkten A und B kann parallel verschoben werden, sodass sein Schaft im Ursprung liegt. Die Koordinaten der Pfeilspitzen lassen sich aus den Koordinaten der Punkte A und B berechnen:

Vektor von $A(x_A|y_A)$ nach $B(x_B|y_B)$:

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ Merkhilfe: „Endpunkt – Anfangspunkt“ $\overrightarrow{AB} = B - A$

5.2 Berechne die Koordinaten des Vektors $\overrightarrow{AB}$ und des Vektors $\overrightarrow{BA}$ $A(3|2)$, $B(10|5)$.
Beschreibe den Unterschied mit eigenen Worten.



Lösung:

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 10-3 \\ 5-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 3-10 \\ 2-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \end{pmatrix}$

Wenn man Endpunkt und Anfangspunkt eines Vektors vertauscht, ändern sich die Vorzeichen der Koordinaten, also die Orientierung des Vektors.

BC

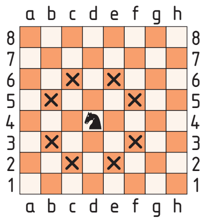
5.3 **a)** Zeichne zwei gleich lange, aber unterschiedlich gerichtete Pfeile.
b) Zeichne zwei gleich gerichtete, aber unterschiedlich orientierte Pfeile.
c) Zeichne zwei gleich lange, aber unterschiedlich orientierte Pfeile.
d) Zeichne zwei gleich orientierte, aber unterschiedlich lange Pfeile.

AB

5.4 Zeichne den Vektor von $A(-1|3)$ nach $B(2|1)$. Zeichne Repräsentanten des Vektors $\overrightarrow{AB}$ mit dem angegebenen Anfangs- bzw. Endpunkt in das gleiche Koordinatensystem. Lies den Anfangs- bzw. Endpunkt der entstandenen Vektoren ab.
a) Anfangspunkt $(3|5)$ **b)** Endpunkt $(2|-1)$

BC

5.5 Steht ein Springer bei einem Schachspiel auf d4, so darf er auf jedes der gekennzeichneten Felder ziehen. Den Weg dabei kann man als Vektor angeben, zum Beipiel $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ für den Zug von d4 auf f3.
a) Beschreibe alle erlaubten Züge als Vektoren.
b) Ein Springer steht auf Position f4.
Bestimme alle Felder, die er im nächsten Zug erreichen kann.
c) Ein Springer steht nach dem Zug auf d5.
Erkläre, wo er vor diesem Zug gestanden sein könnte.



ACD

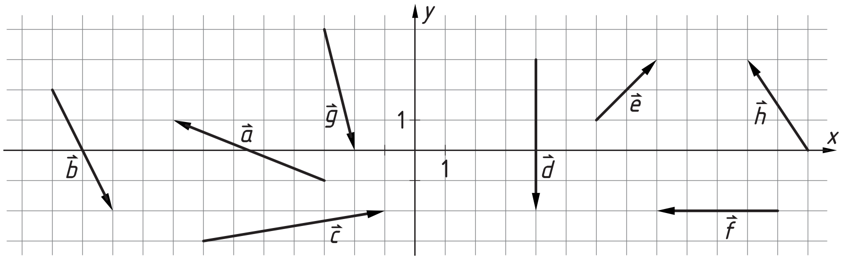
B **5.6** Berechne den Vektor $\overrightarrow{AB}$ und stelle ihn grafisch dar.

a) $A(5|-7)$, $B(3|1)$ **b)** $A(10|0)$, $B(12|-4)$ **c)** $A(-9|3)$, $B(8|11)$ **d)** $A(0|-2)$, $B(14|2)$

BC **5.7** Stellen $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{CD}$ denselben Vektor dar?
Überprüfe grafisch und rechnerisch.

a) $A(2|3)$, $B(7|7)$ und $C(4|8)$, $D(9|12)$ **b)** $A(-6|2)$, $B(-3|0)$ und $C(5|3)$, $D(8|1)$
c) $A(-4|1)$, $B(3|-2)$ und $C(5|8)$, $D(10|5)$ **d)** $A(9|-2)$, $B(6|-5)$ und $C(7|4)$, $D(5|7)$

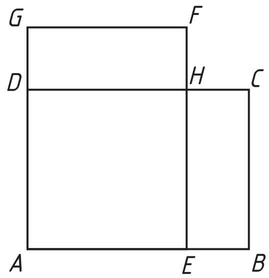
A **5.8** Schreibe die Vektoren jeweils als Spaltenvektor an.



ABC **5.9** Zeichne ein Quadrat in ein Koordinatensystem ein. Beschrifte die Eckpunkte mit A, B, C und D, den Diagonalenschnittpunkt mit M.
Gib fünf verschiedene Vektoren mithilfe der Punkte A, B, C, D und M an.
Gib einen anderen Repräsentanten des Vektors $\overrightarrow{AM}$ an.

ACD **5.10** Gegeben ist die Figur $ABCDEFGH$. $AEHD$ ... Quadrat; $\overline{DG} = \overline{EB}$
Überprüfe anhand der Zeichnung, ob die folgenden Aussagen richtig sind.
Begründe deine Antwort.

a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ **b)** $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{HC}$ **c)** $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{EA}$
d) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{HD}$ **e)** $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AG}$ **f)** $\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{BE}$



CD **5.11** Kreuze die richtigen Aussagen zur Figur in Aufgabe 5.10 an.
Begründe deine Auswahl.

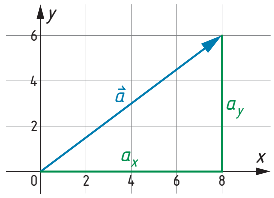
A ☐	Der Vektor $\overrightarrow{AB}$ hat die gleiche Richtung wie der Vektor $\overrightarrow{AE}$.
B ☐	Der Vektor $\overrightarrow{AH}$ hat die gleiche Orientierung wie der Vektor $\overrightarrow{DF}$.
C ☐	Der Vektor $\overrightarrow{CH}$ hat die gleiche Richtung wie der Vektor $\overrightarrow{AB}$.
D ☐	Der Vektor $\overrightarrow{BC}$ hat die gleiche Orientierung wie der Vektor $\overrightarrow{DG}$.
E ☐	Der Vektor $\overrightarrow{DE}$ hat die gleiche Richtung wie der Vektor $\overrightarrow{GB}$.

BCD **5.12** Zeichne das Viereck $ABCD$ mit $A(3|3)$, $B(6|2)$, $C(9|6)$ und $D(4|6)$.
Argumentiere, um welches spezielle Viereck es sich handelt.
Bestimme die Koordinaten des Diagonalenschnittpunkts mithilfe von Vektoren.
Erstelle 3 Vektoren in diesem Viereck, deren Anfangs- oder Endpunkt A ist.

5.1.2 Betrag (Länge) eines Vektors

5.13 Zeichne den Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}$ in ein Koordinatensystem ein und miss seine Länge. **BD**

Erkläre, wie die Länge des Vektorpfeils berechnet werden kann.



Gemessen: 10 Längeneinheiten (LE). Die Länge kann mit dem pythagoreischen Lehrsatz berechnet werden: $\sqrt{64 + 36} = 10$

Der Betrag (die Länge) des Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$: $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$

5.14 Welcher der beiden Vektoren $\vec{a}$ oder $\vec{b}$ ist länger? $\vec{a} = \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -10 \\ 24 \end{pmatrix}$ **BC**

Lösung, angegeben in Längeneinheiten LE:

$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{15^2 + 20^2} = \sqrt{625} = 25$ LE $\quad |\vec{b}| = \sqrt{(-10)^2 + 24^2} = \sqrt{676} = 26$ LE

Der Vektor $\vec{b}$ ist länger als der Vektor $\vec{a}$.

5.15 Berechne den Betrag des folgenden Vektors. **B**

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ **b)** $\vec{b} = \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \end{pmatrix}$ **c)** $\vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \end{pmatrix}$ **d)** $\vec{d} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \end{pmatrix}$

5.16 Berechne den Abstand des Punkts vom Ursprung. **B**

a) $A(-7|4)$ **b)** $B(12|9)$ **c)** $C(8|-3)$ **d)** $D(-5|-12)$

5.17 Berechne den Betrag des durch die beiden Punkte gegebenen Vektors. **B**

a) $A(10|4)$, $B(7|-6)$ **b)** $A(-14|9)$, $B(-3|12)$ **c)** $A(1|3)$, $B(9|4)$

5.18 Berechne den Abstand zwischen den zwei gegebenen Punkten. **B**

a) $A(-4|7)$ und $B(8|3)$ **b)** $G(-3|7)$ und $H(8|-4)$ **c)** $P(8|4)$ und $Q(-3|-4)$

5.19 Berechne den Umfang des Dreiecks *ABC*. **BC**
Gib an, um welches Dreieck es sich handelt.

a) $A(-2|-2)$, $B(3|-1)$, $C(-1|3)$ **b)** $A(3|4)$, $B(-3|4)$, $C(3|-5)$

5.20 Berechne den Umfang und die Länge der Diagonalen des Quadrats. **BD**
Erkläre, wie man erkennt, dass ein Quadrat vorliegt.

a) $A(3|-6)$, $B(7|0)$, $C(1|4)$, $D(-3|-2)$ **b)** $A(-2|-4)$, $B(4|-1)$, $C(1|5)$, $D(-5|2)$

5.21 Zeige mithilfe von Vektoren, ob es sich um ein Parallelogramm, eine Raute oder um keines von beiden handelt. **BD**

a) $A(-1|3)$, $B(-2|1)$, $C(1|0)$, $D(2|3)$ **b)** $A(6|2)$, $B(5|0)$, $C(-2|-1)$, $D(4|-4)$

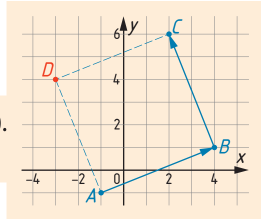
5.22 Weise mithilfe von Vektoren nach, ob die Punkte *A*, *B* und *C* Eckpunkte eines rechtwinkligen Dreiecks sind oder nicht. **BCD**

a) $A(-112|336)$, $B(335|-336)$, $C(448|224)$ **b)** $A(57|-57)$, $B(76|38)$, $C(19|58)$

5.23 Zeige anhand des Dreiecks $A(-12|4)$, $B(0|-7)$, $C(13|0)$ die Gültigkeit der Dreiecksungleichung, wonach jede Seite kürzer als die Summe der Längen der beiden anderen Seiten sein muss. **BD**

5.2 Rechenoperationen mit Vektoren

5.2.1 Addition und Subtraktion von Vektoren

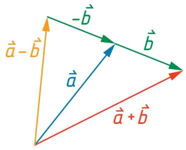


AB **5.24** Das Quadrat *ABCD* hat die Eckpunkte $A(-1|-1)$, $B(4|1)$ und $C(2|6)$. Ermittle die Koordinaten des Punktes *D*.

Vektoren werden koordinatenweise addiert bzw. subtrahiert.

Es gilt: $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \end{pmatrix}$ und $\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x - b_x \\ a_y - b_y \end{pmatrix}$

Geometrisch werden zwei Vektoren addiert, indem man an die Spitze des ersten Vektors den zweiten Vektor anfügt. Die Summe der beiden Vektoren erhält man durch die Verbindung des Anfangspunkts des ersten Vektors mit dem Endpunkt des zweiten Vektors. Dieser Summenvektor liegt in Richtung der Diagonale des durch die beiden Vektoren aufgespannten Parallelogramms. Man spricht daher auch von der „Parallelogrammregel".



Die Differenz erhält man durch die Addition des entgegengesetzt orientierten Vektors von $\vec{b}$ zu $\vec{a}$.

Lösung der eingangs gestellten Aufgabe:

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC};\quad \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2-4 \\ 6-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow D(-3|4)$$

AB **5.25** Das Parallelogramm *ABCD* hat die Koordinaten $A(0|-1)$, $B(7|1)$ und $C(4|5)$. Berechne die Koordinaten des Punkts *D*.

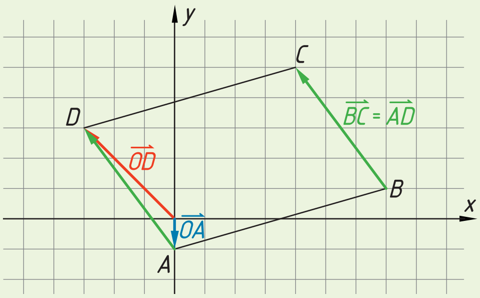
Lösung:

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 4-7 \\ 5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Es gilt: $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Der Punkt hat die Koordinaten $D(-3|3)$.



B **5.26** Ermittle die Summe und die Differenz $\vec{a} - \vec{b}$ der Vektoren rechnerisch und grafisch.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ **b)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ **c)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$

B **5.27** Gegeben sind die Punkte $A(3|5)$, $B(2|-6)$, $C(0|3)$, $D(-7|-3)$, $E(7|0)$ und $F(-1|8)$.
Gib die folgenden Vektoren an: $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{CD}$, $\vec{d} = \overrightarrow{DE}$, $\vec{e} = \overrightarrow{EF}$ und $\vec{f} = \overrightarrow{FA}$
Ermittle rechnerisch und grafisch:

a) $\vec{a} - \vec{e} + \vec{b}$ **b)** $\vec{e} + \vec{c} - \vec{d}$ **c)** $\vec{b} + \vec{f} - \vec{a}$ **d)** $\vec{c} - \vec{d} + \vec{f}$

AB **5.28** Berechne die fehlenden Koordinaten des Punkts und die Längen der Diagonalen des Parallelogramms.

a) $A(-3|-4)$, $B(6|-1)$, C, $D(0|2)$ **b)** A, $B(-4|4)$, $C(4|-2)$, $D(1|5)$

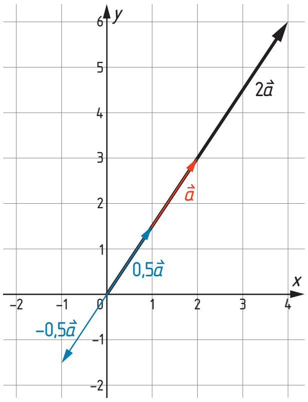
BC **5.29** Gegeben sind die Vektoren: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ und $\vec{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

Zeichne die Vektoren: $\vec{a} + \vec{b}$ und $\vec{b} + \vec{a}$, $\vec{a} + \vec{d}$ und $\vec{d} + \vec{a}$, $\vec{b} + \vec{c}$ und $\vec{c} + \vec{b}$
Beschreibe mit eigenen Worten, was dir beim Vergleich der Ergebnisse auffällt.

5.2.2 Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl

5.30 Multipliziere beide Koordinaten des Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ mit 2, mit 0,5 und mit −0,5. **BC**

Erkläre anhand einer Grafik wie sich der ursprüngliche Vektor dadurch verändert.



Man multipliziert einen Vektor mit einer reellen Zahl, indem man beide Koordinaten des Vektors mit dieser Zahl multipliziert. Die reelle Zahl wird **Skalar** genannt, sie hat im Gegensatz zu einem Vektor keine Richtung.

Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar s:

$$s \cdot \vec{a} = s \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \cdot a_x \\ s \cdot a_y \end{pmatrix}$$

$s > 1 \quad \Rightarrow \quad s \cdot \vec{a}$ ist gleich orientiert und verlängert
$0 < s < 1 \quad \Rightarrow \quad s \cdot \vec{a}$ ist gleich orientiert und verkürzt
$s < 0 \quad \Rightarrow \quad s \cdot \vec{a}$ ist entgegengesetzt orientiert

Spezielle Fälle der Multiplikation eines Vektors $\vec{a}$ mit einem Skalar:

$s = 0$ … Es entsteht der **Nullvektor** $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$s = -1$ … Es entsteht der **Gegenvektor** $-\vec{a} = \begin{pmatrix} -a_x \\ -a_y \end{pmatrix}$, $\vec{a} \neq \vec{0}$

$s = \frac{1}{|\vec{a}|}$ … Es entsteht der **Einheitsvektor** $\vec{a_0}$ mit der Länge 1 in Richtung von $\vec{a}$. ($\vec{a} \neq \vec{0}$)

Bezeichnet man mit $\vec{e_x}$ und $\vec{e_y}$ die Einheitsvektoren in Richtung der positiven Koordinatenachsen, dann lässt sich jeder Vektor als Summe von 2 Vektoren $a_x \cdot \vec{e_x}$ und $a_y \cdot \vec{e_y}$ darstellen. Diese 2 Vektoren nennt man **Komponenten** des Vektors.

Komponentendarstellung eines Vektors: $\vec{a} = a_x \cdot \vec{e_x} + a_y \cdot \vec{e_y}$

Eine einfache Überlegung führt zu einem Vektor, der in Richtung der Winkelsymmetrale von zwei Vektoren liegt. Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ spannen einen Winkel auf. Ihre Einheitsvektoren bilden eine Raute. Der Vektor $\vec{w} = \vec{a_0} + \vec{b_0}$ liegt in der Diagonale der Raute, daher halbiert er den Winkel zwischen den beiden Vektoren.

Vektor in Richtung der Winkelsymmetrale der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$: $\vec{w} = \vec{a_0} + \vec{b_0}$

Zwei Vektoren sind **parallel** zueinander (= **kollinear**), wenn sie in ihrer Richtung übereinstimmen. (Beachte: Sie müssen nicht in ihrer Orientierung übereinstimmen!)

Für parallele Vektoren gilt: $\vec{a} = k \cdot \vec{b}$ mit $k \in \mathbb{R}$

5.31 Bestimme den Einheitsvektor von $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$. $A(12|-5)$ **B**

Lösung: $\vec{a_0} = \frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}92 \\ -0{,}38 \end{pmatrix}$

5.32 Überprüfe, ob $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ zu $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ parallel ist. $A(12|-5)$; $B(-9|3{,}75)$ **BD**

Lösung: $\vec{a}$ ist zu $\vec{b}$ parallel, weil $\begin{pmatrix} 12 \\ -5 \end{pmatrix} = -\frac{4}{3} \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 3{,}75 \end{pmatrix}$

BCD **5.33** Überprüfe, ob die Vektoren zueinander parallel sind. Begründe deine Antwort.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}75 \end{pmatrix}$ **b)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} -4{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0{,}8 \end{pmatrix}$ **c)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 240 \\ -450 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -40 \\ 37{,}5 \end{pmatrix}$

B **5.34** Ermittle den zugehörigen Einheitsvektor.

a) $\begin{pmatrix} -50 \\ 35 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 32 \\ 48 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} -54 \\ -36 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} 0 \\ -28 \end{pmatrix}$ **e)** $\begin{pmatrix} 40 \\ 16 \end{pmatrix}$ **f)** $\begin{pmatrix} -60 \\ 36 \end{pmatrix}$

BCD **5.35** Die Kombination der Vektoren $\vec{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{s} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ der Form $a \cdot \vec{r} + b \cdot \vec{s}$ soll den Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ergeben. Berechne a und b. Erkläre deine Vorgehensweise.

BD **5.36** Begründe, warum es nicht möglich ist, für s eine Zahl so zu finden, dass die Gleichung **a)** $\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix}$, **b)** $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ erfüllt ist.

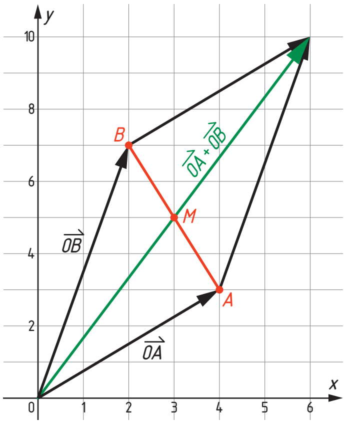
D **5.37** *Wird ein Vektor mit der reellen Zahl k multipliziert, so ändert sich seine Länge um das k-Fache.*
Ist diese Behauptung richtig? Begründe deine Antwort.

BD **5.38** Berechne den Vektor in Richtung der Winkelsymmetralen.
Erkläre, warum man mit der Summe der Einheitsvektoren von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ die Richtung der Winkelsymmetralen findet.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 12 \end{pmatrix}$ **b)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} -60 \\ 40 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 72 \\ -22 \end{pmatrix}$

In der Geometrie erweist sich die Multiplikation des Vektors mit einem Skalar ua. beim Berechnen des **Mittelpunkts einer Strecke** und des **Schwerpunkts eines Dreiecks** als hilfreich.

BD **5.39** Zeichne die beiden Punkte $A(4|3)$ und $B(2|7)$ in ein Koordinatensystem.
Ermittle aus der Zeichnung die Koordinaten des Mittelpunkts der Strecke $\overline{AB}$.
Erkläre, warum mit der Formel $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$ der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ berechnet werden kann.
Berechne die Koordinaten des Mittelpunkts.



Ablesung: $M(3|5)$
Die Summe der beiden Vektoren $\overrightarrow{OA}$ und $\overrightarrow{OB}$ ergeben den Vektor in Richtung der Diagonale des Parallelogramms, das von beiden Vektoren und aufgespannt wird. Der Betrag des Summenvektors entspricht der Länge der Diagonale. Multipliziert man den Summenvektor mit $\frac{1}{2}$, so wird die Länge des Vektors halbiert. Die Spitze trifft genau in der Mitte auf die Strecke $\overline{AB}$.
Der Ortsvektor $\overrightarrow{OM}$ enthält die Koordinaten des Streckenmittelpunkts M.

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow M(3|5)$$

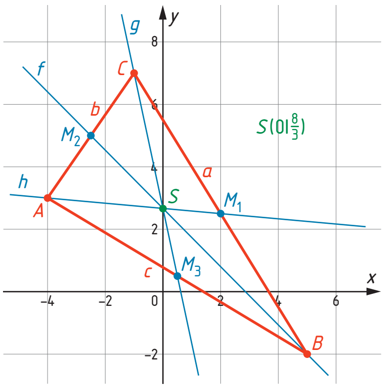
Für den **Mittelpunkt M einer Strecke** zwischen den Punkten A und B gilt:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$$

5.40 Berechne den Mittelpunkt der Seiten der Figur mit den gegebenen Eckpunkten. **B**
a) $A(3|5)$, $B(-7|4)$, $C(-5|0)$, $D(11|-2)$ **b)** $A(0|4)$, $B(-7|-3)$, $C(10|-4)$, $D(6|4)$

5.41 Unter der Schwerlinie eines Dreiecks versteht man die Strecke zwischen dem Mittelpunkt einer Seite und dem gegenüberliegenden Eckpunkt. **BC**
Berechne die Längen der 3 Schwerlinien des Dreiecks $A(5|6)$, $B(-7|3)$ und $C(2|-4)$.
Dokumentiere deine Vorgehensweise.

5.42 Bestimme grafisch den Schnittpunkt der Schwerlinien (= Schwerpunkt) eines Dreiecks mit $A(-4|3)$, $B(5|-2)$, $C(-1|7)$. **BC**
Beschreibe, was dir zur Lage des Schwerpunkts auf den Schwerlinien auffällt.



Der Schwerpunkt teilt die Länge der Schwerlinien vom jeweiligen Eckpunkt aus im Verhältnis 2 : 1.
Der Ortsvektor zum Schwerpunkt eines Dreiecks wird berechnet mit:

$$\overrightarrow{OS} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}$$

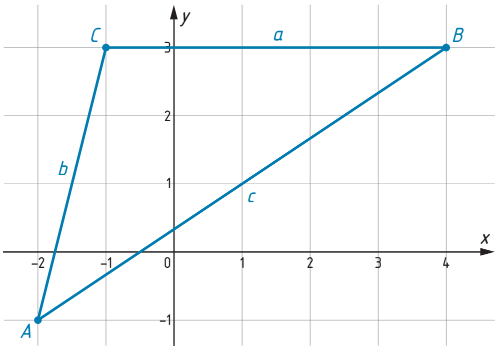
Die Herleitung der Formel kannst du mit den derzeitigen Kenntnissen bereits bewerkstelligen, aber sie erfordert eine große Rechenfertigkeit.
Die Idee, die der Herleitung zugrunde liegt:
Man berechnet den Schnittpunkt der Schwerlinien mithilfe von passenden Vektoren.

5.43 Das Dreieck *ABC* hat die Eckpunkte $A(6|5)$, $B(3|-7)$ und $C(-4|2)$ **BD**
a) Berechne die Mittelpunkte der Seiten.
b) Berechne die Koordinaten des Schwerpunkts.
c) Zeige, dass das Dreieck, das aus den Mittelpunkten der Seiten gebildet wird, denselben Schwerpunkt wie das Dreieck *ABC* hat.

Lösung:
$M_{AB}(4{,}5|-1)$, $M_{BC}(-0{,}5|-2{,}5)$, $M_{AC}\,(1|3{,}5)$

$$S = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 6+3-4 \\ 5-7+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ 0 \end{pmatrix};\quad S_2 = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 4{,}5-0{,}5+1 \\ -1-2{,}5+3{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

5.44 Konstruiere in der gegebenen Grafik den Schwerpunkt des Dreiecks *ABC*. **BC**
Lies die Koordinaten des Schwerpunkts ab.
Überprüfe das Ergebnis durch Berechnung.
Berechne einen Vektor in Richtung der Winkelsymmetrale des Winkels $\sphericalangle ABC$.
Zeichne den Vektor in die Grafik ein.



5.45 Das Dreieck *ABC* hat die Eckpunkte $A(6|3)$, $B(1|-7)$ und $C(-4|2)$. **AB**
Berechne den Schwerpunkt des Dreiecks und die Länge der Schwerlinie s_A.
Bestimme einen Vektor mit dem Anfangspunkt *C* so, dass er die gegenüberliegende Seite *AB* im Verhältnis 1 : 2 teilt.

5.2.3 Das Skalarprodukt von Vektoren

BC **5.46** Du kaufst für deine Klasse 66 Schulhefte zu 40 Blatt und 30 Schulhefte zu 60 Blatt ein. In der Preisliste findest du die zughörigen Stückpreise 2,39 € bzw. 3,39 €. Berechne die Gesamtkosten.
Mit Vektoren wird zur Berechnung der Gesamtkosten der Term $\begin{pmatrix} 66 \\ 30 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2{,}39 \\ 3{,}39 \end{pmatrix}$ verwendet.
Interpretiere, was dieser Term in diesem Sachzusammenhang darstellt.

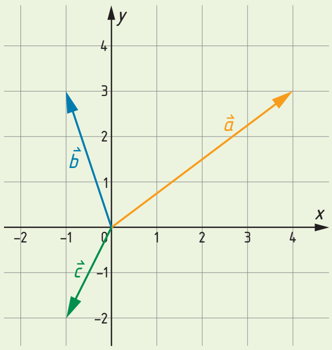
Die Gesamtkosten werden als Summenprodukt berechnet: $66 \cdot 2{,}39 + 30 \cdot 3{,}39 = 259{,}44$
Du musst daher für diesen Einkauf insgesamt 259,44 € bezahlen.

Die Multiplikation der beiden Vektoren sagt dasselbe aus. Der erste Vektor stellt die **Liste der Einkaufsmengen** dar und der zweite Vektor die **Liste der Stückpreise**. Die Multiplikation der beiden „Listen" soll ebenfalls die Gesamtkosten ergeben. Folglich ergibt die Multiplikation von 2 Vektoren keinen Vektor mehr, sondern einen Skalar, nämlich die Zahl 259,44. Daher kommt auch der Name „Skalarprodukt" von Vektoren.
Du kannst die Formel für diese Multiplikation ablesen: Die Koordinaten der Vektoren werden zeilenweise multipliziert und anschließend addiert.

Berechnung des **Skalarprodukts** in Koordinatenschreibweise:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y$$

ABD **5.47** Überprüfe die Richtigkeit der Aussage $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot c = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ anhand der Vektoren, die durch die nebenstehende Grafik gegeben sind.



Lösung:

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\quad (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = -15$

$\vec{a} \cdot \vec{c} = -10$ $\quad \vec{b} \cdot \vec{c} = -5$ $\quad \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} = -15$

Aufgaben 5.48 – 5.49: Berechne jeweils das Skalarprodukt der beiden Vektoren.

B **5.48** **a)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}$ **b)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ **c)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 14 \\ -3 \end{pmatrix}$

B **5.49** **a)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ **b)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} -9 \\ -4 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ **c)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$

BD **5.50** Überprüfe die Richtigkeit der Aussage $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ für die gegebenen Vektoren.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix}$ **b)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ -7 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 14 \\ 4 \end{pmatrix}$ **c)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 12 \\ -4 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ -7 \end{pmatrix}$

BD **5.51** Überprüfe die Richtigkeit der Aussagen anhand der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$.

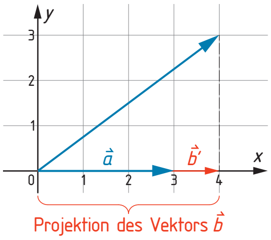
a) $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c})$ für $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -8 \\ 7 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} -5 \\ 17 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ für $\vec{a} = \begin{pmatrix} 13 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 29 \\ -3 \end{pmatrix}$

Grafische Interpretation des Skalarprodukts

5.52 Zeichne die beiden Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ in einem Koordinatensystem. BC

Erkläre anhand der Grafik, wie das Skalarprodukt grafisch zu interpretieren wäre.



Berechne zunächst das Skalarprodukt der beiden Vektoren:

$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 12.$

Projiziere nun den Vektor $\vec{b}$ auf die Richtung von $\vec{a}$. Du erhältst den Vektor $\vec{b'}$. Multiplizierst du die Länge des Vektors $\vec{a}$ mit der Länge des Vektors $\vec{b'}$ so ergibt sich ebenfalls die Zahl 12:

$3 \cdot 4 = 12$

Diese Interpretation des Skalarprodukts ermöglicht es zu entscheiden, ob 2 Vektoren miteinander einen rechten Winkel einschließen oder nicht. Wenn die beiden Vektoren orthogonal sind (dh. normal aufeinander stehen), dann ist die Normalprojektion des zweiten Vektors auf den ersten gleich null, es gilt in diesem Fall, dass $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

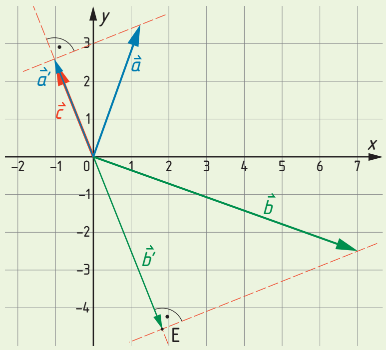
Für alle vom Nullvektor verschiedenen in derselben Ebene liegenden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gilt:
$\vec{b}$ steht normal auf $\vec{a}$, wenn $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

5.53 Die folgenden Vektoren sind gegeben: BCD

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1{,}25 \\ 3{,}5 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2{,}5 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$

Zeichne alle 3 Vektoren in ein Koordinatensystem.
Überprüfe, ob die beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ orthogonal sind.
Markiere die Projektionen der Vektoren $\vec{a}$ bzw. $\vec{b}$ auf die Richtung von $\vec{c}$.

Lösung: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1{,}25 \cdot 7 - 2{,}5 \cdot 3{,}5 = 0$
$\Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$



5.54 Ermittle, ob die Vektoren aufeinander normal stehen. ABD

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 10 \\ -6 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ **b)** $\vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \end{pmatrix}, \vec{d} = \begin{pmatrix} -14 \\ -8 \end{pmatrix}$ **c)** $\vec{e} = \begin{pmatrix} -3 \\ 11 \end{pmatrix}, \vec{f} = \begin{pmatrix} 121 \\ 33 \end{pmatrix}$

5.55 Begründe, warum das Skalarprodukt für mehr als zwei Vektoren nicht definiert ist. D

5.56 Überprüfe mithilfe von Skalarprodukten, ob das Viereck *ABCD* ein Rechteck ist. BD
a) $A(1|1)$; $B(4|5)$; $C(7|4)$; $D(4|0)$
b) $A(0|-4)$; $B(-4|0)$; $C(4|6)$; $D(6|4)$
c) $A(-3|-3)$; $B(-2|6)$; $C(2|5)$; $D(1|-4)$

5.57 Beweise mithilfe von Skalarprodukten den Satz von Thales: BD
Alle Dreiecke im Halbkreis sind rechtwinklig.

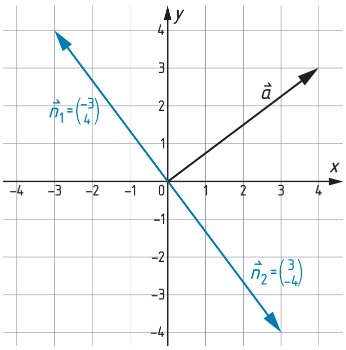
5.58 Beweise mithilfe von Skalarprodukten den Satz von Pythagoras: BD
In einem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten *a* und *b* gilt für die Hypotenuse *c*:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Normalvektoren eines 2-dimensionalen Vektors

BC **5.59** Zeichne den Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ in das Koordinatensystem.

Zeichne durch den Ursprung die beiden möglichen Normalvektoren ein, die die gleiche Länge haben. Lies die Koordinaten der Normalvektoren ab.
Beschreibe, was dir auffällt.



Jeder 2-dimensionale Vektor hat 2 Vektoren, die normal auf ihm stehen, die sogenannten **Normalvektoren $\vec{n_1}$ und $\vec{n_2}$**, die jeweils voneinander Gegenvektoren sind.
Aus der Zeichnung liest man ab:

$\vec{n_1} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{n_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

Die Koordinaten der beiden Normalvektoren unterscheiden sich im Vorzeichen.
Man erhält sie, wenn man die Koordinaten des Vektors $\vec{a}$ vertauscht und eine der Koordinaten mit (-1) multipliziert.
In diesem Fall sind die Skalarprodukte $\vec{a} \cdot \vec{n_1}$ und $\vec{a} \cdot \vec{n_2}$ gleich null: $4 \cdot (-3) + 3 \cdot 4 = 0$ und $3 \cdot 4 - 4 \cdot 3 = 0$.

Normalvektoren

$\vec{n_L} = \begin{pmatrix} -a_y \\ a_x \end{pmatrix}$ ... der durch Linksdrehung entstandene Normalvektor von $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$

$\vec{n_R} = \begin{pmatrix} a_y \\ -a_x \end{pmatrix}$ ... der durch Rechtsdrehung entstandene Normalvektor von $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$

AB **5.60** Ist der gegebene Normalvektor durch eine Rechts- oder durch eine Linksdrehung entstanden? Begründe deine Antwort.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{n_a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \end{pmatrix}$ **b)** $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\vec{n_b} = \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \end{pmatrix}$ **c)** $\vec{c} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{n_c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$

ABD **5.61** Gib die Koordinaten beider Normalvektoren des Vektors $\overrightarrow{AB}$ an.
a) $A(6|-1)$, $B(11|-13)$ **b)** $A(3|-1)$, $B(3|4)$ **c)** $A(-4|-10)$, $B(2|-4)$ **d)** $A(7|8)$, $B(4|8)$

BD **5.62** Die Strecke BC mit $B(-3|-3)$ und $C(4|-2)$ ist eine Kathete eines gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks (4 Lösungen).
Berechne die Koordinaten der fehlenden Paare von Eckpunkten A und A'.
Überprüfe die Rechnung durch eine Zeichnung.

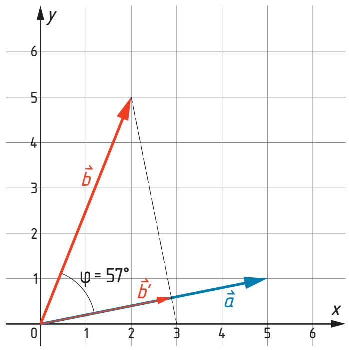
AB **5.63** Über der Strecke AB mit $A(0|2)$ und $B(4|-2)$ wird zum Punkt C eine Strecke mit der Länge 3 Längeneinheiten (LE) in B normal zu AB aufgetragen.
Zeichne die beschriebene Situation.
Berechne die Koordinaten des Punkts C.

AB **5.64** Von einem Quadrat kennt man die beiden Eckpunkte einer Seite: $A(1|3)$ und $B(3|2)$.
Berechne die Koordinaten der anderen Eckpunkte.

5.2.4 Der Winkel zwischen zwei Vektoren

5.65 Zeichne die beiden Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ in ein Koordinatensystem. BC

Miss den Winkel φ zwischen beiden Vektoren.
Dokumentiere Möglichkeiten, wie man den Winkel berechnen kann. Berechne φ!
Berechne einen Vektor in Richtung der Winkelsymmetralen.



Der Winkel zwischen den Vektoren kann im rechtwinkligen Dreieck mit den Seiten $|\vec{b}|$; und $|\vec{b'}|$ mithilfe des Cosinus berechnet werden:

$\cos(\varphi) = \frac{|\vec{b'}|}{|\vec{b}|}$

Da $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b'}|$ ist, erhalten wir nach Umformungen:

Formel, mit deren Hilfe der Winkel φ zwischen 2 Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ berechnet werden kann:

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \vec{a_0} \cdot \vec{b_0}$$

Eine weitere Möglichkeit, den Winkel φ zu berechnen, ergibt sich aus der Richtung der Vektoren. Der „Richtungswinkel" eines Vektors in Bezug auf die positive x-Achse entspricht dem Arkustangens des Geradenanstiegs, der mithilfe der Koordinaten von Spitze E und Schaft A des Pfeils berechnet wird.

$$\alpha = \arctan\left(\frac{y_E - y_A}{x_E - x_A}\right)$$

Der Winkel zwischen den beiden Vektoren entspricht der Differenz der beiden Richtungswinkel.

1. Variante: $\cos(\varphi) = \frac{\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{29}} = 0{,}546... \Rightarrow \varphi \approx 56{,}89°$

2. Variante: $\alpha_1 = 11{,}309...$, $\alpha_2 = 68{,}198... \Rightarrow \varphi \approx 56{,}89°$

Der gemessene Winkel stimmt innerhalb der Messgenauigkeit mit dem berechneten überein.
Die Winkelsymmetrale halbiert den Winkel. Einen Vektor in Richtung der Winkelsymmetralen erhalten wir durch: $\vec{w} = \vec{a_0} + \vec{b_0}$ (siehe Abschnitt 5.2.2).

Im Beispiel: $\vec{w} = \frac{1}{\sqrt{26}} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{29}} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}351... \\ 1{,}124... \end{pmatrix}$

5.66 Berechne den Winkel zwischen dem Vektor und der x-Achse. B

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 17 \\ 7 \end{pmatrix}$ **b)** $\vec{b} = \begin{pmatrix} 29 \\ 3 \end{pmatrix}$ **c)** $\vec{c} = \begin{pmatrix} 11 \\ 8 \end{pmatrix}$ **d)** $\vec{d} = \begin{pmatrix} 5 \\ 34 \end{pmatrix}$

5.67 Berechne **1)** den Winkel zwischen den gegebenen Vektoren AB
2) den Vektor in Richtung der Winkelsymmetralen.

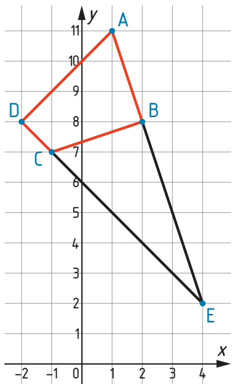
a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 24 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ **b)** $\vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}$, $\vec{d} = \begin{pmatrix} 12 \\ 35 \end{pmatrix}$ **c)** $\vec{e} = \begin{pmatrix} 120 \\ 35 \end{pmatrix}$, $\vec{f} = \begin{pmatrix} 7 \\ 24 \end{pmatrix}$

5.68 Wenn die Koordinaten der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ natürliche Zahlen sind, sind $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ sowie $\cos(\varphi)$ im Allgemeinen irrationale Zahlen. Das Produkt dieser drei Zahlen ist aber stets eine natürliche Zahl. D
Überprüfe diesen Sachverhalt exemplarisch mit $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

ABD **5.69** Die Punkte A, B, C, D und E in der nebenstehenden Skizze haben die folgenden Ortsvektoren:

$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{OE} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

Zeige, dass das Dreieck ADE rechtwinklig ist.
Erkläre, wo in diesem Fall der Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks ADE liegen muss.
Zeige, dass im Viereck $ABCD$ ein weiterer rechter Winkel zu finden ist.
Berechne mithilfe des Skalarproduktes den Winkel $\sphericalangle DEA$.



Das Skalarprodukt von 2 ebenen Vektoren wird auch durch die folgende Formel ausgedrückt:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$$

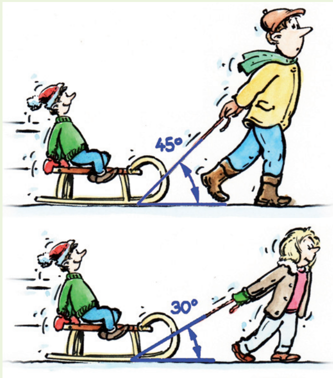
Diese Beziehung ist für einige Aufgabenstellungen sehr nützlich. Erinnere dich an den physikalischen Begriff „Arbeit W = Kraft F mal Wegkomponente in Richtung der Kraft $s_{||}$."

Die Definition der Arbeit entspricht dem Skalarprodukt $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$.

BD **5.70** Zwei Rodeln mit gleicher Masse werden entlang einer geraden Schneebahn eine gleich lange Strecke gezogen.

a) Argumentiere, welche der beiden in der Skizze dargestellten Personen einen geringeren Arbeitsaufwand ($W = \vec{F} \cdot \vec{s}$) hat.

b) Das Gewicht der Rodel mit der darauf befindlichen Person beträgt 500 Newton (N). Die erste Person zieht die Rodel so, dass der Winkel des Zugseils zum Boden 45° beträgt, während die kleinere Person das Seil nur auf 30° bequem spannen kann.
Berechne den Unterschied der verrichteten Arbeit in Newtonmeter (Nm) auf einer Strecke von 300 Meter.



Lösung:

a) Der Winkel der Zugkraft zur Straße bestimmt die Größe der Arbeit.
Der Wert des Cosinus nimmt mit steigendem Winkel ab. Das bedeutet, dass das Ziehen am Zugseil, das einen größeren Winkel zum Boden aufweist, weniger Arbeit erfordert.

b) $W_1 = 500 \cdot 300 \cdot \cos(45°) \approx 106\,066$ Nm; $W_2 = 500 \cdot 300 \cdot \cos(30°) \approx 129\,904$ Nm
Die zweite Person verrichtet eine um ca. 23 838 Nm größere Arbeit.

B **5.71** Ein Schlitten wird an einem Seil mit einer konstanten Kraft $\vec{F}$ gezogen, das mit dem waagrechten Untergrund einen Winkel φ einschließt. Es wird eine Strecke s zurückgelegt. Berechne, wie viel Arbeit dabei verrichtet wird.

a) $s = 1{,}8$ km; $F = 45$ N; $\varphi = 37°$ **b)** $s = 2{,}3$ km; $F = 55$ N; $\varphi = 32°$

AB **5.72** Berechne den Winkel, unter dem ein Objekt auf einer ebenen Straße gezogen wird, wenn ein Weg s zurückgelegt wird. Das Gewicht F_G des Objekts und die benötigte Arbeit W in Joule (J) sind bekannt. (1 J = 1 Nm)

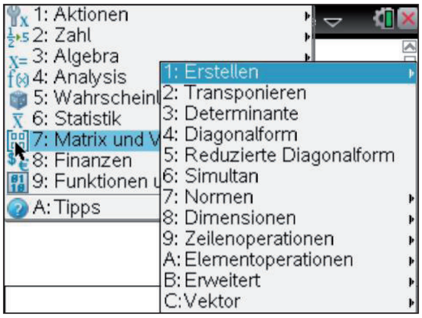
a) $F_G = 3\,620$ N; $s = 435$ m; $W = 1\,522\,500$ J
b) $F_G = 7\,980$ N; $s = 1\,050$ m; $W = 7\,875\,000$ J
c) $F_G = 40\,620$ N; $s = 750$ m; $W = 30\,000\,000$ J

5.2.5 Technologieeinsatz bei Vektoren

5.73 Berechne die fehlenden Koordinaten des Punkts D des Paralellogramms $ABCD$ mit $A(-4|-1)$, $B(-1|-2)$, $C(3|1)$. (Einheit: Zentimeter)
Berechne den Umfang des Parallelogramms.
Ermittle einen Vektor in Richtung der Winkelsymmetralen des Winkels $\sphericalangle ABC$.
Weise nach, dass $\overrightarrow{AB}$ nicht normal auf $\overrightarrow{BC}$ steht.

AB

TI-Nspire:
Die Befehle für die Vektorrechnung findet man im Menü
Calculator/7: Matrix und Vektor/C: Vektor
Man kann aber auch direkt eingeben oder Vorlagen benützen.
Definition der Vektoren:
a:=[[−4][−1]] mit Klammern (Jede Zeile in eigener Klammer eingeben!) oder mit Vorlagen



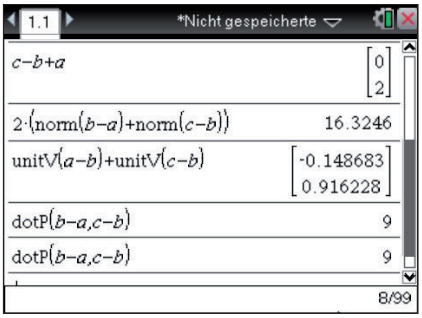
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow \vec{b} - \vec{a} = \vec{c} - \vec{d} \Rightarrow \vec{d} = \vec{c} - \vec{b} + \vec{a}$
Summen oder Differerenzen von Vektoren werden normal mit + bzw. – eingegeben.

Umfang: $2\,(|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}|) = 2\,(|\vec{b} - \vec{a}| + |\vec{c} - \vec{b}|)$
Der **Betrag des Vektors**: Über **menu 7: Matrix und Vektor|7: Normen|1: Norm**
oder direkt **norm(Vektor)**
Mit CTRL = erhält man das Ergebnis in Dezimalzahlen.

Für die Winkelsymmetrale benötigen wir die Einheitsvektoren in Richtung $\overrightarrow{BA}$ und $\overrightarrow{BC}$.
Der Summenvektor der beiden Einheitsvektoren liegt in Richtung der Winkelsymmetrale.
Einheitsvektor: unitV(Vektor).

Mit CTRL = erhält man das Ergebnis in Dezimalzahlen.

Skalarprodukt $(\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{c} - \vec{b})$ müsste 0 sein, wenn die beiden Vektoren normal aufeinander stehen.
Skalarprodukt: dotP(Vektor1,Vektor2)
Das Skalarprodukt ist ungleich null, daher liegt kein rechter Winkel vor.



Technologieeinsatz zu diesem Thema für TI 82-84, EXCEL und Geogebra-CAS siehe www.hpt.at (Schulbuch Plus für Schüler/innen)

Vektoren

Zusammenfassung

Ein Vektor ist die Menge aller gleich langen, gleich gerichteten und gleich orientierten Pfeile.

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_x - a_x \\ b_y - a_y \end{pmatrix}$ ... Koordinaten des Endpunkts minus Koordinaten des Anfangspunkts

Betrag (Länge) des Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$: $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$

Addition bzw. Subtraktion von Vektoren: $\vec{a} \pm \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \pm b_x \\ a_y \pm b_y \end{pmatrix}$

Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl (einem Skalar): $s \cdot \vec{a} = s \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \cdot a_x \\ s \cdot a_y \end{pmatrix}$

Einheitsvektor: $\overrightarrow{a_0} = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$ mit $|\overrightarrow{a_0}| = 1$

Normalvektor von $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$: $\overrightarrow{n_L} = \begin{pmatrix} -a_y \\ a_x \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{n_R} = \begin{pmatrix} a_y \\ -a_x \end{pmatrix}$

Skalarprodukt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$ bzw. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y$

Winkel α zwischen dem Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ und der x-Achse: $\tan(\alpha) = \frac{a_y}{a_x}$

Winkel φ zwischen zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$: $\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

Vektor in Richtung der Winkelsymmetralen von $\vec{a}$ und $\vec{b}$: $\vec{w} = \overrightarrow{a_0} + \overrightarrow{b_0}$

Ortsvektor zum Mittelpunkt einer Strecke AB: $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$

Ortsvektor zum Schwerpunkt eines Dreiecks ABC: $\overrightarrow{OS} = \frac{1}{3} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$

Vermischte Aufgaben zur Vertiefung[1]

AB **5.74** Berechne die Koordinaten des fehlenden Eckpunkts des Parallelogramms *ABCD*.
a) $A(2|-7)$, $B(5|3)$, $C(-2|6)$, D **b)** $A(5|2)$, B, $C(1|-5)$, $D(7|-2)$

AB **5.75** Gegeben ist das Deltoid $A(2|7)$, $B(1|2)$, $C(9|0)$ und $D(7|8)$.
Berechne die Längen der Seiten, den Umfang und den Schnittpunkt der Diagonalen.

AB **5.76** Die Strecke *CD* mit $C(3|4)$ und $D(7|6)$ ist die Seitenkante eines in mathematisch positiver Richtung beschrifteten Rechtecks.
Berechne die Koordinaten der fehlenden Eckpunkte.
a) Die zweite Seite ist fünfmal so lang wie die gegebene Seite.
b) Die Länge der zweiten Seite ist ein Viertel der Länge der gegebenen Seite.

AB **5.77** Die Strecke *AC* mit $A(-6|5)$ und $C(3|-7)$ ist die Diagonale e einer Raute.
Berechne die Koordinaten der fehlenden Eckpunkte.
a) Die Diagonale f ist doppelt so lang wie die Diagonale e.
b) Die Länge der Diagonale f ist ein Drittel der Länge der Diagonale e.

AB **5.78** Berechne die Koordinaten des fehlenden Eckpunkts des Trapezes *ABCD*. Erkläre, wie man mithilfe des Einheitsvektors einen Vektor in einer gegebenen Länge erzeugen kann.
a) A, $B(7|0)$, $C(1|4)$, $D(-3|1)$; $a = 10$ LE **b)** $A(-1|-3)$, $B(4|9)$, C, $D(-4|2)$; $c = 6{,}5$ LE

[1] Technologieeinsatz ist nicht erforderlich, aber möglich.

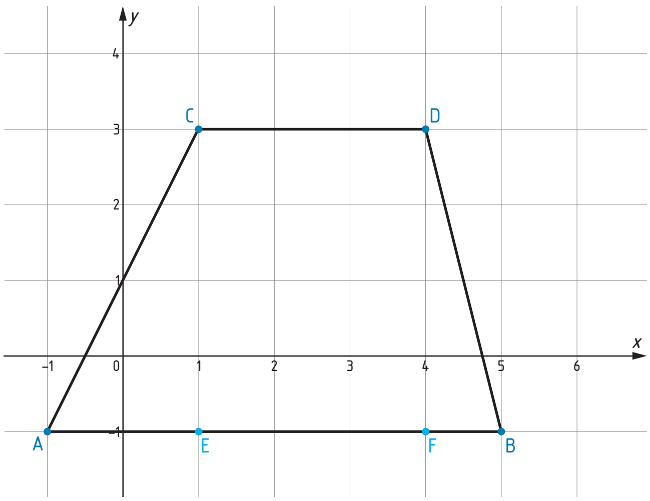
5.79 Die angegebenen Punkte sind Eckpunkte einer geometrischen Figur. **B**
Berechne die Größe der Innenwinkel dieser Figur.
Berechne jeweils einen Vektor, der auf den Winkelsymmetralen liegt.
a) $A(2|3)$, $B(-5|4)$, $C(-7|-3)$, $D(9|0)$ **b)** $A(0|4)$, $B(-3|-6)$, $C(2|-4)$, $D(7|1)$

5.80 Zeichne die beiden Punkte $A(4|3)$ und $B(2|7)$ in ein Koordinatensystem ein. **ABC**
Lies aus der Zeichnung die Koordinaten des Mittelpunkts der Strecke AB ab.
Erstelle eine Formel, mit der mithilfe der Vektoren der Mittelpunkt einer Strecke berechnet werden kann.

5.81 Berechne die Mittelpunkte der Seiten der Figur mit den gegebenen Eckpunkten. **AB**
a) $A(3|5)$, $B(-7|4)$, $C(-5|0)$, $D(11|-2)$ **b)** $A(-8|1)$, $B(-7|-3)$, $C(10|-4)$, $D(6|4)$

5.82 Zeichne das gleichschenklige Dreieck ABC (im Gegenuhrzeigersinn) mithilfe der gegebenen Größen. **ABD**
Berechne die Koordinaten des Eckpunkts C. Runde auf eine Nachkommastelle.
Überprüfe das Ergebnis anhand der Konstruktion.
Einheit im Koordinatensystem: Zentimeter
a) $A(-1|-1)$, $B(4|3)$, $h_c = 5$ cm
b) $A(-3|1)$, $B(4|-2)$, $h_c = 4{,}5$ cm
c) $A(2|4)$, $B(3|-2)$, $h_c = 7$ cm

5.83 In einem Trapez sind die Punkte A, B, C, D, E und F eingezeichnet. **ABCD**



a) Ergänze in der Grafik den Schnittpunkt der Strecken $\overline{ED}$ und $\overline{FC}$.
Berechne die Koordinaten des Schnittpunkts.
Berechne den Schnittwinkel.

b) Lege eine Gerade g durch diesen Schnittpunkt und durch den Halbierungspunkt M_1 der Seite $\overline{AC}$.
Lies die Geradengleichung aus der Zeichnung ab.
Bestimme den Halbierungspunkt M_2 der Seite $\overline{BD}$.

c) Zeige durch eine entsprechende Rechnung, dass auf der Geraden g eine Strecke mit der Länge $\frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2}$ durch die Seiten $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ ausgeschnitten wird.

ABD **5.84** Vier Punkte eines Vierecks sind bekannt.
Erkläre, wie man mithilfe von Vektorrechnung nachweisen kann, ob es sich bei diesem Viereck um ein Trapez oder um ein Parallelogramm handeln könnte.
Führe die Berechnung durch. (Einheit: Zentimeter)
Berechne die Länge der beiden Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$.
Hat das Viereck einen rechten Winkel?

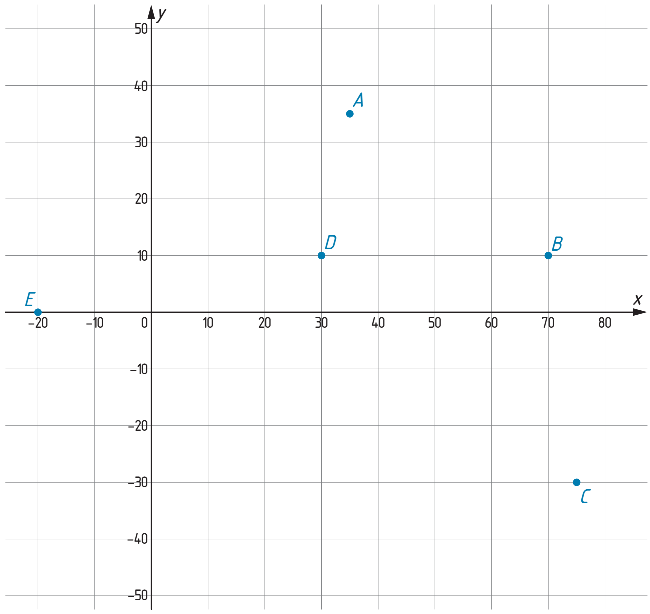
a) $A(-1{,}5|-1)$, $B(3|0{,}5)$, $C(1{,}5|2{,}5)$, $D(0|2)$

b) $A(-1|-1)$, $B(2|-2)$, $C\left(3\middle|\frac{1}{3}\right)$, $D\left(1\middle|\frac{2}{3}\right)$

c) $A(-2|-3)$, $B(4|-1)$, $C(3|4)$, $D(-2|3)$

ABC **5.85** Im nachstehenden Koordinatensystem sind Positionen eingezeichnet, die durch eine Kameradrohne angesteuert werden sollen.

Bei der Darstellung entspricht eine Einheit im Koordinatensystem einer Strecke von 1 Meter.



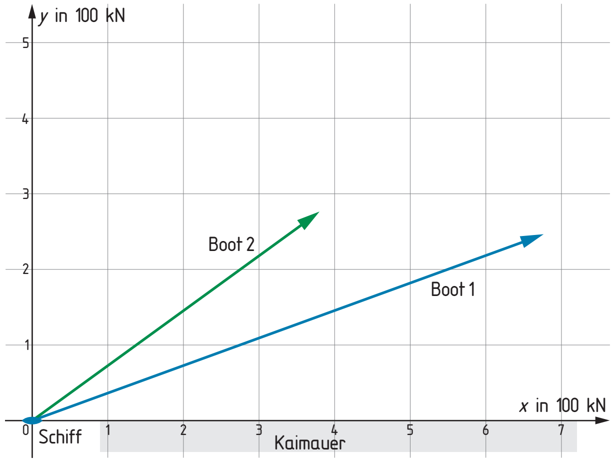
a) Lies aus der Abbildung die Koordinaten der Position A ab.
Stelle denjenigen Vektor auf, der den geradlinigen Flug einer Drohne von der Position A zur Position B beschreibt.

b) Eine Drohne startet von der Position C. Der Flug wird durch die folgenden Vektoren beschrieben: $\vec{a} = \begin{pmatrix} -35 \\ -20 \end{pmatrix}$ dann $\vec{b} = \begin{pmatrix} -45 \\ 10 \end{pmatrix}$ dann $\vec{c} = \begin{pmatrix} -10 \\ 45 \end{pmatrix}$.
Zeichne den Weg der Drohne in die obige Grafik ein.
Berechne die Länge dieses Flugs.

c) Eine Drohne fliegt von D Richtung E.
Zeichne den entsprechenden auf das 10-Fache verlängerten Einheitsvektor dieser Richtung ausgehend von D in die obige Abbildung ein.
Dokumentiere, wie man den Einheitsvektor berechnen kann.

5.86 Ein Schiff wird von 2 Schleppbooten (Boot 1 und Boot 2) aus dem Hafen gezogen. Boot 1 zieht mit einer Kraft $\vec{F_1}$ = 720 kN unter einem Winkel von 20° – bezogen auf die Kaimauer.
Boot 2 zieht mit einer Kraft von $\vec{F_2}$ = 470 kN unter einem Winkel von 36°.
(Siehe Skizze der Draufsicht.)

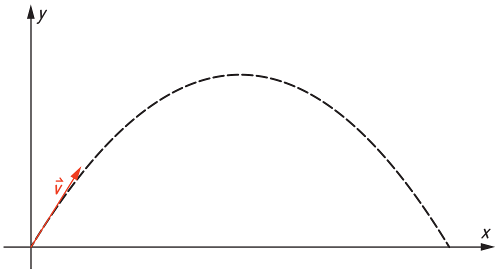
AB



Zeichne ein, in welche Richtung und mit welcher Kraft das Schiff in Summe gezogen wird.
Berechne die gesamt wirkende Kraft auf das Schiff.
Berechne den Richtungswinkel des Schiffs bezogen auf die Kaimauer.

5.87 Ein Ball wird mit einer Anfangsgeschwindigkeit von 20 m/s unter einem Winkel von 58° schräg nach oben geschossen. (Siehe nebenstehende nicht maßstabsgetreue Skizze.)

BC



Die Vektorgleichung für den schrägen Wurf lautet:

$\vec{s} = \vec{v} \cdot t + \frac{1}{2}\,\vec{g} \cdot t^2 \qquad \vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ -9{,}81 \end{pmatrix}$, t in Sekunden

Zeichne die Ortsvektoren $\vec{s}$ der Flugbahn in Zeitabständen von einer Sekunde im Intervall [0; 4].
Verbinde die Spitzen der Pfeile. Interpretiere das Ergebnis für t = 4 s.
Lies die Flugweite und die maximale Höhe des Balls aus der Zeichnung ab.

5.88 Beim Bogenschießen wird ein Pfeil mit der Anfangsgeschwindigkeit von 60 m/s im Winkel von 25° abgeschossen.
Stelle die einzelnen Punkte der Flugbahn mithilfe von Ortsvektoren grafisch dar.
Die Vektorgleichung des Wurfs lautet:

BC

$\vec{s} = \vec{v} \cdot t + \frac{1}{2}\,\vec{g} \cdot t^2 \qquad \vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ -9{,}81 \end{pmatrix}$, t in Sekunden

Lies aus der Zeichnung die maximale Flughöhe und die Flugweite ab.

Vektoren

Wissens-Check

Bearbeite die Aufgaben. **Begründe** jeweils deine Auswahl.

		gelöst

1

Kreuze an, um welche ebene Figur es sich handelt, die durch die folgenden Ortsvektoren beschrieben wird:

$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$

Begründe anhand einer Berechnung.

A	☐	Die Vektoren beschreiben die Eckpunkte eines Quadrats.
B	☐	Die Vektoren beschreiben die Eckpunkte eines Rechtecks.
C	☐	Die Vektoren beschreiben die Eckpunkte eines Deltoids.
D	☐	Die Vektoren beschreiben die Eckpunkte eines Trapezes.
E	☐	Die Vektoren beschreiben die Eckpunkte eines Parallelogramms.

2

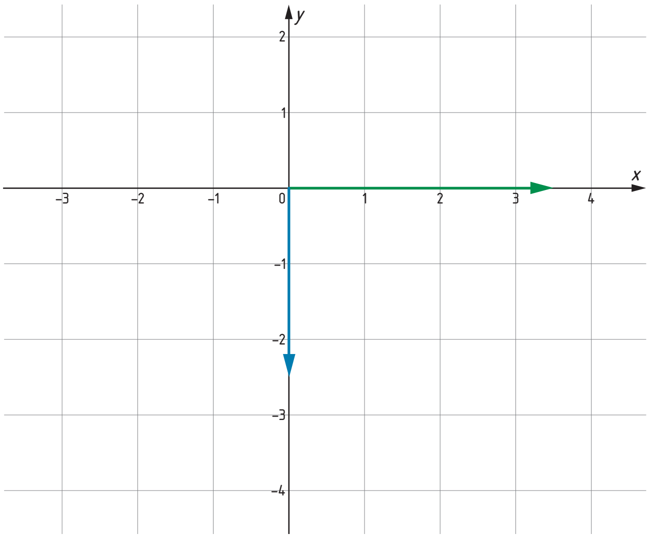
Drei Punkte *A*, *B* und *C* sind die Eckpunkte eines Dreiecks.
Ordne den Aussagen 1 und 2 jeweils die richtige Aussage aus A bis D zu.

1	$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$	☐	2	$\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \lvert\overrightarrow{AC}\rvert$	☐

A	☐	Das Dreieck ist aufgrund der Aussage gleichseitig.
B	☐	Das Dreieck hat einen rechten Winkel bei *A*.
C	☐	Das Dreieck hat einen rechten Winkel bei *B*.
D	☐	Das Dreieck ist aufgrund der Aussage gleichschenklig.

3

Von einem Vektor $\vec{a}$ sind die 2-dimensionalen Komponenten gezeichnet.
Zeichne den dazugehörigen Vektor ein.
Kreuze die auf eine ganze Zahl gerundete Länge des Vektors an.

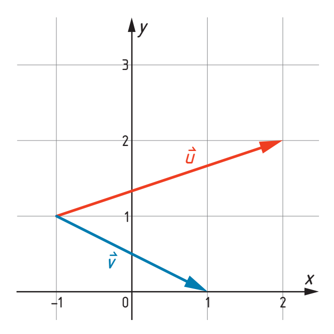
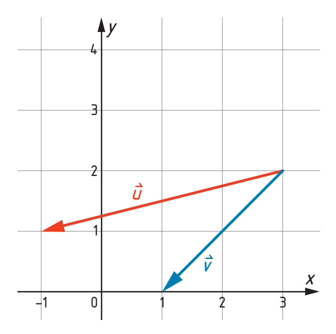


A	☐	2 LE
B	☐	3 LE
C	☐	4 LE
D	☐	5 LE
E	☐	6 LE

		gelöst
4	Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ y \end{pmatrix}$. Kreuze den richtigen y-Wert von $\vec{b}$ an, so dass beide Vektoren parallel (= kollinear) sind.	

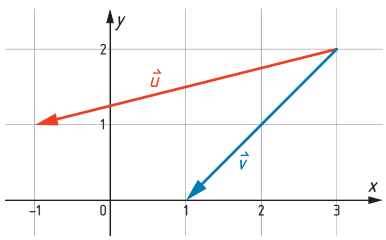
A ☐	**B** ☐	**C** ☐	**D** ☐	**E** ☐
$\frac{4}{9}$	$-\frac{4}{9}$	$\frac{27}{4}$	$-\frac{27}{4}$	6,5

5 Ordne den Grafiken 1 und 2 jeweils den richtigen Differenzvektor aus A bis D zu.
Zeichne den Differenzvektor $\vec{u} - \vec{v}$ in beiden Grafiken ein.

1 ☐		**2** ☐	

A	$\vec{u} - \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$	**C**	$\vec{u} - \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$
B	$\vec{u} - \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$	**D**	$\vec{u} - \vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

6 Ergänze die Textlücken durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine korrekte Aussage entsteht:
Das Skalarprodukt der beiden Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ in der nebenstehenden Abbildung lässt sich durch ____①____ ermitteln, und beträgt gerundet auf ganze Zahlen ____②____.



①		②	
das Ablesen der Projektion von $\vec{u}$ auf $\vec{v}$ und Multiplikation mit dem Betrag von $\vec{u}$	**A** ☐	4	**A** ☐
das Ablesen der Projektion von $\vec{v}$ auf $\vec{u}$ und Multiplikation mit dem Betrag von $\vec{u}$	**B** ☐	8	**B** ☐
das Ablesen der Projektion von $\vec{v}$ auf $\vec{u}$ und Multiplikation mit dem Betrag von $\vec{v}$	**C** ☐	10	**C** ☐

Lösung:
1) D 2) 1 → B; 2 → D 3) Grafik im Lösungsheft; C 4) C 5) Grafik im Lösungsheft; 1 → A; 2 → D 6) 1 → B; 2 → C

CLIL-Review: Vectors

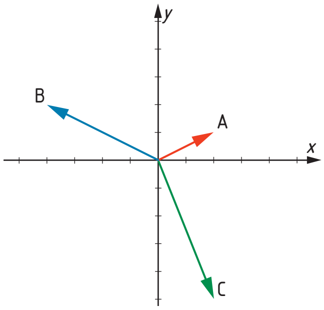
Get in pairs and work on the following tasks (5.E1, 5.E2). You may use your formula collection and an online dictionary.

Please find important vocabulary and other supporting material to these tasks as well as solutions and example answers in the solutions book. For further information have a look at page 2 of this book.

BCD **5.E1** First read the text about vectors and get familiar with the new mathematical concepts:

A **vector** is a phenomenon that has two independent properties: **magnitude** and **direction**. Examples of vectors in nature are velocity, force, fields and weight. A phenomenon that exhibits magnitude only, with no specific direction, is called a **scalar**. Examples of scalars include mass, electrical resistance and hard-drive storage capacity.

In print the vector is denoted by letters and an arrow, e.g.: $\vec{a}$ or $\overrightarrow{AB}$.



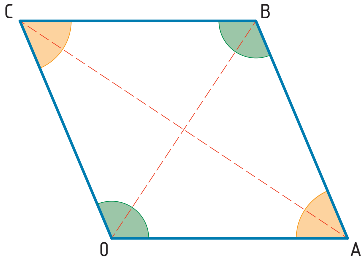
In 2 or 3 dimensions vectors can be depicted graphically. Magnitude is shown as the length of a line segment. Direction is shown by the orientation of the line segment, and by an arrow at one end. The illustration shows three vectors in 2-dimensional rectangular coordinates.
The positon of a point $P(x|y)$ in the plane can be given by the vector $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix}$ – the so-called "**position vector**".
In 2 dimensions each vector can be represented by a positon vector in the coordinates of the arrowhead by $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$, or in components in directions of the unit vectors of both axes by
$\vec{a} = a_x \cdot \vec{e_x} + a_y \cdot \vec{e_y}$.

Solve the following task on your own.
Then compare your solution with your partner.
Prepare this topic for a presentation in class.

$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ and $\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$ represent two positon vectors.

Show that $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OC}|$

Given that $\overrightarrow{OA}$ and $\overrightarrow{OC}$ are 2 adjacent sides of the rhombus $OABC$ find the vectors represented by the 2 diagonals $\overrightarrow{OB}$ and $\overrightarrow{AC}$.



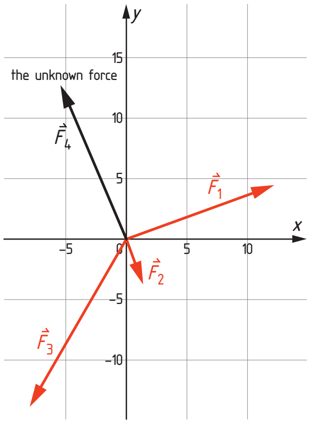
5.E2 Read the text about the equilibrium of forces.
Have a look at the worked example.

When a particle is in equilibrium under a system of coplanar concurrent forces the resultant of all forces must be zero. So a particle is in equilibrium if ...
... it is at rest and remains at rest.
... it remains moving with constant velocity.

When solving problems about particles in equilibrium first draw a force diagram, then find the coordinates of all vectors and finally equate the resultant to zero.

Worked example
Four forces are in equilibrium.
$\vec{F_1}$ with magnitude 13 Newton (N) and direction 20° to the positive x-axis.
$\vec{F_2}$ with magnitude 4 N and direction −70°.
$\vec{F_3}$ with magnitude 16 N and direction 240 °.
What are the values of magnitude and direction of $\vec{F_4}$?

Solution:
The diagram:



The forces' coordinates:
We get them with the help of trigonometry

$$\vec{F_1} = \begin{pmatrix} 13\cos(20°) \\ 13\sin(20°) \end{pmatrix}$$

$$\vec{F_2} = \begin{pmatrix} 4\cos(-70°) \\ 4\sin(-70°) \end{pmatrix}$$

$$\vec{F_3} = \begin{pmatrix} 16\cos(240°) \\ 16\sin(240°) \end{pmatrix}$$

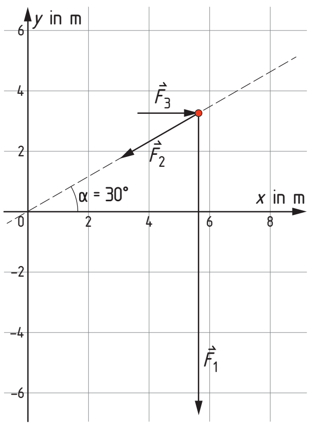
The equation:

$$\begin{pmatrix} 13\cos(20°) \\ 13\sin(20°) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4\cos(-70°) \\ 4\sin(-70°) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 16\cos(240°) \\ 16\sin(240°) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solving the equation: $x = -5.5841$; $y = 13.1689$

Magnitude: ca. 14,3 N; Direction: $\tan\varphi = \frac{13.1689}{-5.5841} \Rightarrow \varphi \approx 112{,}98°$

First solve the following problem on your own.
Then compare your solution with your partner.
Finally discuss your findings with your classmates.



A particle is subject of the three forces $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$ and $\vec{F_3}$ in Newton (N) shown in the diagram.
The magnitudes of these forces are 10 N, 3 N and 2N.

Find magnitude and direction of the unknown force $\vec{F_4}$, which keeps the particle in equilibrium.