

Taschenrechner ermöglichen Berechnungen wie $\sin(20^\circ)$ oder e^5 rasch und unkompliziert. Doch auch schon zu Zeiten, in denen lediglich einfache Rechenhilfsmittel zu Verfügung standen, konnten – aus heutiger Sicht – erstaunlich genaue Berechnungen durchgeführt werden. So gelang es dem schottischen Mathematiker James Gregory (1638 – 1675), neue Methoden für die Berechnung der Kreiszahl π zu entwickeln. Er verwendete dafür spezielle unendliche Reihen, um $\frac{\pi}{4}$ zu approximieren.

Im folgenden Abschnitt werden unendliche Reihen untersucht, die zur Berechnung von Funktionswerten verwendet werden können bzw. solche, die Funktionen annähern.



3.1 Wiederholung

A ● C D

- 3.1** 1) Veranschauliche die unendliche Reihe $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots$ mithilfe eines Kreisdiagramms und gib ihre Summe an.
 2) Schreibe die Reihe $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \frac{1}{17} + \frac{1}{33} + \dots$ mithilfe des Summenzeichens an.
 3) Argumentiere, warum die Summe aus 2) kleiner sein muss als jene aus 1). Gib ein Intervall an, in dem die Summe aus 2) daher liegen muss.

Bevor die Konvergenz von beliebigen Reihen untersucht wird, werden einige Grundbegriffe wiederholt.

Die **angeschriebene Summe einer (Zahlen-)Folge** nennt man **Reihe**.

Folge: $a_n = \langle a_1, a_2, a_3, a_4, \dots \rangle$

Reihe: $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots$

Die Summe einer Reihe mit endlich vielen Gliedern kann durch Addition ermittelt werden. Hat die Reihe unendlich viele Glieder, so ist die Berechnung der Summe durch Addition nicht möglich. Die Summe wird deshalb mithilfe der Folge der Partialsummen s_n ermittelt. Es gilt:

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

Existiert der **Grenzwert der Partialsummenfolge**, so bezeichnet man ihn als **Summe S der unendlichen Reihe** und nennt die Reihe **konvergent**, zum Beispiel eine geometrische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = b_1 \cdot q^{n-1} \text{ mit } |q| < 1 \text{ (siehe Band 3, Abschnitt 1.7.4). Existiert dieser Grenzwert nicht,}$$

nennt man die Reihe **divergent**.

A ● C D

- 3.2** Schreibe die Reihen mithilfe des Summenzeichens an. Welche ist konvergent, welche divergent? Begründe deine Antwort, ohne den Grenzwert zu berechnen.

1) $1 + 2 + 3 + 4 + \dots$ 2) $1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots$ 3) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} \pm \dots$

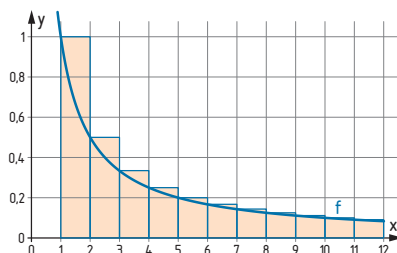
● B ● D

- 3.3** Die harmonische Reihe lautet: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$

- 1) Gib die Gleichung der dargestellten Funktion f an. Erkläre, wie die Summanden dieser Reihe in der Abbildung veranschaulicht werden.
 2) Vergleiche die Fläche der ersten 4 Rechtecke mit der Fläche unter der Kurve im Intervall $[1; 5]$.

- 3) Ermittle $\lim_{b \rightarrow \infty} \left(\int_1^b \frac{1}{x} dx \right)$. Begründe damit die

Divergenz der harmonischen Reihe.



3.2 Konvergenz

Für viele mathematische Argumentationen ist es oft ausreichend zu wissen, ob eine Reihe konvergent, also ob ihre Summe eine reelle Zahl ist. Da das Ermitteln dieser Summe oft sehr aufwändig ist, werden Kriterien entwickelt, um die Konvergenz bzw. die Divergenz beurteilen zu können, ohne dabei diese Summe zu berechnen.

3.2.1 Notwendige Konvergenzbedingung

- 3.4** 1) Ermittle für die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \dots$ die Summanden a_0, a_1, a_{10}, a_{50} und a_{100} .
Welchem Wert nähern sich die Summanden für $n \rightarrow \infty$? Ermittle die Teilsummen s_{10}, s_{50} und s_{100} . Welchem Wert nähern sich diese Teilsummen?
- 2) Gib an, welchem Wert sich die Glieder der Reihe $1, 1 + 1, 01 + 1, 001 + \dots$ nähern. Berechne weiters die Teilsummen s_2, s_3 und s_4 .
Erkläre mithilfe der Reihenglieder, warum diese unendliche Reihe divergent ist.



Anhand der folgenden Reihen wird zunächst ein Kriterium erläutert, welches die Entscheidung ermöglicht, ob eine Reihe divergent sein muss oder konvergent sein kann.

- $0,1 + 0,1 + 0,1 + 0,1 + \dots$
Bildet man die Teilsummenfolge s_n , so erkennt man: $s_{n+1} = s_n + 0,1$
Der Zuwachs beträgt konstant 0,1. Die Partialsummenfolge kann daher nicht konvergent sein. Die Reihe ist also divergent.
- $1 + 0,1 + 0,01 + 0,001 + \dots$
Die Reihenglieder nähern sich dem Wert 0, die Partialsummen s_n nähern sich dem Wert 1,1.
Die Reihe ist daher konvergent.
- $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$
Auch für diese Reihenglieder gilt $a_n \rightarrow 0$. In Band 3, Abschnitt 1.4.7, wurde bereits gezeigt, dass diese Reihe, die **harmonische Reihe**, divergent ist.

Allgemein kann man feststellen:

Bilden die Glieder einer Reihe keine Nullfolge, so ist die Reihe sicher divergent.

Bilden die Glieder der Reihe eine Nullfolge, so **kann** die Reihe konvergent sein. Bei der Bedingung „Reihenglieder bilden eine Nullfolge“ handelt es sich also um eine Voraussetzung für die Konvergenz, also eine **notwendige Bedingung**. Ist sie nicht erfüllt, ist die Reihe nicht konvergent. Ist die Bedingung erfüllt, folgt daraus aber noch nicht, dass die Reihe tatsächlich konvergiert. Die Bedingung ist daher **keine hinreichende Bedingung**.

Notwendige Konvergenzbedingung für unendliche Reihen

Die Glieder jeder konvergenten unendlichen Reihe bilden eine **Nullfolge**. Es gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = 0$
Der Umkehrschluss gilt nicht. Ist $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = 0$, so kann die Reihe auch divergent sein.
Ist jedoch $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) \neq 0$, so ist die Reihe sicher divergent.

- 3.5** Überprüfe, ob die folgenden Reihen konvergent sein können. Erkläre, welche Reihen divergent sein müssen.



1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} 0,1^n$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)$

4) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}$

3.2.2 Hinreichende Konvergenzkriterien

Um die Konvergenz einer Reihe zu beweisen, deren Glieder eine Nullfolge bilden, werden zusätzliche, so genannte **hinreichende Bedingungen** benötigt.

Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen

Haben die Glieder einer Folge abwechselnd positives und negatives Vorzeichen, so bezeichnet man eine solche Folge als alternierende Folge, die zugehörige Reihe als **alternierende Reihe**. Gottfried Wilhelm Leibniz (deutscher Mathematiker, 1646 – 1716) stellte für die Konvergenz von alternierenden Reihen das nach ihm benannte **Leibniz-Kriterium** auf.

Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen

Eine alternierende Reihe $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 \pm \dots$ mit $a_n > 0$ ist konvergent mit dem Grenzwert S , wenn die Folge $(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots)$ eine monoton fallende Nullfolge ist. Es gilt: $0 < S < a_1$

Beweis:

$$S = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_7 - a_8 \pm \dots$$

• $a_n > a_{n+1}$, da monoton fallend

$$S = \underbrace{(a_1 - a_2)}_{>0} + \underbrace{(a_3 - a_4)}_{>0} + \underbrace{(a_5 - a_6)}_{>0} + \underbrace{(a_7 - a_8)}_{>0} + \dots \quad S > 0$$

$$S = a_1 - \underbrace{(a_2 - a_3)}_{>0} - \underbrace{(a_4 - a_5)}_{>0} - \underbrace{(a_6 - a_7)}_{>0} - \dots \quad S < a_1$$

Damit gilt: $0 < S < a_1 \dots$ Die Reihe konvergiert. q. e. d.



ZB: Die alternierende harmonische Reihe $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \pm \dots$ wird auf Konvergenz geprüft.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \right) = 0$$

• Die Glieder bilden eine Nullfolge.

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \Rightarrow n+1 > n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

• Die Glieder sind monoton fallend.

Die alternierende harmonische Reihe ist konvergent.

Vergleichskriterien – Majorantenkriterium und Minorantenkriterium

Um über Konvergenz bzw. Divergenz entscheiden zu können, können Reihen auch mit anderen Reihen verglichen werden, von denen man bereits weiß, ob sie konvergent oder divergent sind.

Soll zum Beispiel die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 + \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 2^2} + \frac{1}{4 \cdot 2^3} + \dots$ bestimmt werden,

so werden die einzelnen Glieder mit jenen der konvergenten Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots$ verglichen. Dabei kann man folgendes Bild verwenden:

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n =$		$= 2 \dots$ konvergent
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n =$		≤ 2

Da fast alle Glieder a_n kleinergleich als die jeweiligen Vergleichsglieder b_n sind, gilt auch:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Da die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent ist, muss auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent sein.

Dieses Vergleichskriterium nennt man **Majorantenkriterium** (latein: „maior“ = größer). Dabei genügt es, wenn fast alle, also alle bis auf endlich viele, Glieder die Bedingung $a_n \leq b_n$ erfüllen. Endlich viele Glieder, die diese Bedingung nicht erfüllen, haben keinen Einfluss darauf, ob eine Reihe konvergent oder divergent ist.

Eine Reihe heißt **absolut konvergent**, wenn die Reihe der Absolutbeträge konvergiert. Jede absolut konvergente Reihe ist auch konvergent, der Umkehrschluss gilt jedoch nicht.

Majorantenkriterium

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ist konvergent. Gilt für fast alle Glieder der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, dass $|a_n| \leq b_n$ ist, so ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (absolut) konvergent. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ nennt man **konvergente Majorante**.

In ähnlicher Weise kann die **Divergenz** einer Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ gezeigt werden, indem die Glieder mit jenen einer divergenten Reihe verglichen werden. Dieses Kriterium nennt man **Minorantenkriterium** (latein: „minor“ = kleiner).

Minorantenkriterium

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ist divergent. Gilt für fast alle Glieder der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, dass $a_n \geq b_n \geq 0$ ist, so ist auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ nennt man **divergente Minorante**.

Nicht immer kann mithilfe des Majoranten- bzw. Minorantenkriteriums über die Konvergenz bzw. Divergenz einer Reihe entschieden werden.

Quotientenkriterium und Wurzelkriterium

In vielen Fällen ist es möglich, die Konvergenz einer Reihe mithilfe des Verhältnisses zweier aufeinander folgender Glieder zu berechnen. Das so genannte **Quotientenkriterium** (Konvergenzkriterium von d'Alembert) wurde von Jean-Baptiste le Rond d'Alembert (französischer Mathematiker, 1717 – 1783) aufgestellt.

Beim **Wurzelkriterium** wird statt des Quotienten die n-te Wurzel zur Prüfung auf Konvergenz verwendet.

Gegeben ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und es existiert der Grenzwert g.

Quotientenkriterium

$$g = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

Ist $g < 1$, so konvergiert die Reihe absolut.

Ist $g > 1$, so divergiert die Reihe.

Ist $g = 1$, so ist eine Entscheidung über die Konvergenz oder Divergenz nicht möglich.

Wurzelkriterium

$$g = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

Funktionenreihen

●●●D

3.6 Zeige mithilfe des Minorantenkriteriums, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$ divergent ist.

Lösung:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)} = \frac{1}{\ln(2)} + \frac{1}{\ln(3)} + \frac{1}{\ln(4)} + \dots \text{ wird verglichen mit } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} :$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

• Divergent, da die harmonische Reihe divergent ist.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln(n+1)} = 0$$

• Nullfolge

$$\frac{1}{\ln(n+1)} > \frac{1}{n+1} \quad n > 1 \quad \bullet$$

$$\ln(n+1) < (n+1)$$

Die Reihe divergiert, weil die harmonische Reihe divergiert.

●●●D

3.7 Zeige mithilfe des Quotientenkriteriums, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^n}{n!}$ ($c \in \mathbb{R}$) konvergiert.

Lösung:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{c^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{c^{n+1} \cdot n!}{c^n \cdot (n+1)!} = \frac{c}{n+1} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c}{n+1} \right| = 0 < 1, \text{ die Reihe ist konvergent.}$$

Aufgaben 3.8 – 3.9: Berechne die Summen s_{10} und s_{100} der angegebenen Reihen. Argumentiere, weshalb du Konvergenz bzw. Divergenz vermutest. Überprüfe deine Vermutung mithilfe eines geeigneten Vergleichskriteriums.

TF ●●●D

3.8 a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 + \frac{1}{\sqrt[4]{2}} + \frac{1}{\sqrt[4]{3}} + \frac{1}{\sqrt[4]{4}} + \dots$

TF ●●●D

3.9 a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 + \frac{2!}{4} + \frac{3!}{27} + \frac{4!}{256} + \frac{5!}{3 \cdot 125} + \dots$

●●●D

3.10 Prüfe die angegebene Reihe mithilfe des Leibniz-Kriteriums auf Konvergenz.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n^2}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{2n-1}$

c) $\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^3} - \frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^2} - \frac{1}{7^2} + \frac{1}{8^3} - \frac{1}{9^3} \pm \dots$

●●●D

3.11 Prüfe die angegebene Reihe mithilfe des Quotientenkriteriums auf Konvergenz.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{10^n}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{10^n}{n!}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+3n}{5^n}$

●●●D

3.12 Prüfe die angegebene Reihe mithilfe des Wurzelkriteriums auf Konvergenz.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{1+2n} \right)^n$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2}{1+2n} \right)^n$

c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln(n))^n}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{1+2n^2} \right)^n$

Aufgaben 3.13 – 3.14: Prüfe auf Konvergenz. Wähle ein geeignetes Verfahren.

●●●D

3.13 a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)}$

b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^n}{n^{100}}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 2 + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \frac{5}{4} + \dots$

●●●D

3.14 a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} \cdot n$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n \cdot \frac{1}{n!}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}$

d) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n \cdot (n-1)}}$

●●●D

3.15 Prüfe, ob $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} \pm \dots$ konvergent ist.

3.3 Taylor-Reihe

3.3.1 Potenzreihe

3.16 Für sehr kleine Winkel x (in rad) kann man für $\sin(x)$ folgende Näherungen verwenden:

$$1) \sin(x) \approx x \quad 2) \sin(x) \approx x - \frac{x^3}{6}$$

Berechne jeweils $\sin(x)$ für $x = 0,05$; $x = 0,1$ und $x = 0,5$ mit dem Taschenrechner sowie mithilfe der beiden angegebenen Näherungen. Vergleiche die Ergebnisse.

Die näherungsweise Berechnung von Funktionswerten kann mithilfe von **Potenzreihen** erfolgen. Unter einer Potenzreihe versteht man ein „unendlich langes Polynom“.

Eine **Potenzreihe** P ist eine Reihe der Form

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot x^n = c_0 + c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^2 + c_3 \cdot x^3 + \dots \text{ mit } c_n \in \mathbb{R}.$$

$c_0, c_1, c_2, \dots$ sind dabei die Koeffizienten der Potenzreihe.

Zu jeder beliebig oft differenzierbaren Funktion existiert eine solche Potenzreihe. Zum Beispiel lautet für die Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ die zugehörige Potenzreihe:

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!} \cdot x + \frac{1}{2!} \cdot x^2 + \frac{1}{3!} \cdot x^3 + \frac{1}{4!} \cdot x^4 + \frac{1}{5!} \cdot x^5 + \frac{1}{6!} \cdot x^6 + \dots$$

Bei der näherungsweisen Berechnung eines bestimmten Funktionswerts wird nach endlich vielen Gliedern abgebrochen, zB für $x = 3$ und $n = 4$ ergibt sich:

$$e^3 \approx 1 + \frac{1}{1!} \cdot 3 + \frac{1}{2!} \cdot 3^2 + \frac{1}{3!} \cdot 3^3 + \frac{1}{4!} \cdot 3^4 \approx 16,375$$

Eine höhere Genauigkeit wird erzielt, indem man mehr Glieder der Reihe zur Berechnung heranzieht. Taschenrechner geben für e^3 den Wert 20,0855... aus. Auch dabei handelt es sich um eine – allerdings sehr genaue – Näherung.

Da der Wert der einzelnen Reihenglieder von x abhängt, **hängt** auch das **Konvergenzverhalten** bzw. die Summe der Potenzreihe **von x** ab.

ZB: Vergleicht man die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ für $x = 0,1$ und $x = 2$, so sieht man:

$$\bullet \sum_{n=0}^{\infty} 0,1^n = 1 + 0,1 + 0,01 + 0,001 + \dots$$

Die Reihe konvergiert.

$$\bullet \sum_{n=0}^{\infty} 2^n = 1 + 2 + 4 + 8 + \dots$$

Die Reihe divergiert.

Jene Werte von x , für die die Potenzreihe konvergiert, bilden den **Konvergenzbereich** der Reihe. Dieser kann mithilfe des **Quotientenkriteriums** ermittelt werden.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1} \cdot x^{n+1}}{c_n \cdot x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \cdot x \right| < 1 \quad \bullet \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \cdot x \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| \cdot |x| < 1 \Rightarrow |x| < \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$$

Man bezeichnet $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = r$ als **Konvergenzradius**. Die Potenzreihe konvergiert für $|x| < r$.

Die Konvergenz für $|x| = r$ wird anhand der Potenzreihen $P(r)$ bzw. $P(-r)$ entschieden.

Funktionenreihen

Konvergenzbereich einer Potenzreihe

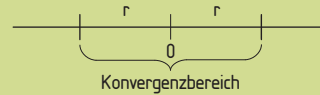
Wenn der Grenzwert $r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$ einer Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot x^n$ existiert, konvergiert

die Reihe für $|x| < r$, sie divergiert für $|x| > r$. Für die Randstellen $|x| = r$ kann man nur mithilfe weiterer Untersuchungen Aussagen über das Konvergenzverhalten treffen.

Die Menge aller x -Werte, für die eine

Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot x^n$ konvergiert,

bezeichnet man als Konvergenzbereich der Potenzreihe.



Für Potenzreihen gelten innerhalb des (gemeinsamen) Konvergenzbereichs die gleichen Rechenregeln wie für Polynomfunktionen.

● B ● ● ●

3.17 Ermittle den Konvergenzbereich der Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

Lösung:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$c_n = \frac{1}{n} \text{ und } c_{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

● c_n und c_{n+1} bestimmen

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{n} \right| = 1$$

● Für $-1 < x < 1$ ist die Reihe konvergent.

Überprüfen der Randstellen

$$x = -1: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \pm \dots$$

● Die alternierende harmonische Reihe konvergiert, $x = -1$ gehört daher zum Konvergenzbereich.

$$x = 1: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^n}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

● Die harmonische Reihe divergiert, $x = 1$ gehört daher nicht zum Konvergenzbereich.

Die Reihe konvergiert im Intervall $[-1; 1[$.

Aufgaben 3.18 – 3.19: Ermittle jeweils den Konvergenzbereich der Potenzreihe.

● B ● ● ●

3.18 a) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} n! \cdot x^n$

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$

● B ● ● ●

3.19 a) $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 \cdot x^n$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{10^{n+1}}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 5^n}$

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

TE ● B ● C ● ●

3.20 Die Funktion $y = \ln(x)$ kann durch die Potenzreihe $\ln(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{(x-1)^n}{n}$ in einem bestimmten Bereich dargestellt werden.

1) Stelle die Funktion $y = \ln(x)$ und die Potenzreihe für $n = 7$, $n = 8$ und $n = 10$ in einem gemeinsamen Koordinatensystem grafisch dar.

2) In welchem Bereich wird die Funktion $y = \ln(x)$ durch die Potenzreihe genähert?

3.3.2 Entwicklung einer Taylor-Reihe

3.21 Differenziere die Funktion $y = x^5$ so oft, bis die Ableitung erstmals eine konstante Funktion ist. Schreibe diese Konstante mithilfe der Fakultät an.

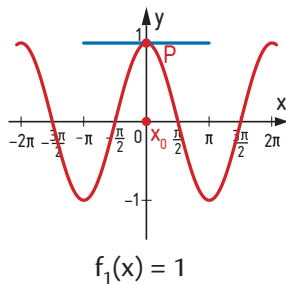


Im folgenden Abschnitt wird gezeigt, wie die Koeffizienten einer Potenzreihe bestimmt werden, damit die Potenzreihe einer gegebenen Funktion entspricht. Eine Methode zur Ermittlung solcher Potenzreihen stammt von Brook Taylor (englischer Mathematiker, 1685 – 1731) und Colin MacLaurin (schottischer Mathematiker, 1698 – 1746). Dabei werden Funktionen in einem bestimmten Punkt in eine Potenzreihe „entwickelt“.

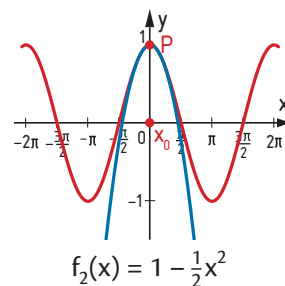
ZB: Die Funktion $y = \cos(x)$ soll ausgehend von $x_0 = 0$ durch eine Polynomfunktion angenähert werden. Die gewählte Stelle x_0 nennt man **Entwicklungsstelle**.

Zunächst betrachtet man die Näherung durch die Tangente im Punkt $P(0|1)$. An der Stelle x_0 stimmen der Funktionswert und die erste Ableitung überein. Diese Näherung ist jedoch nur in der unmittelbaren Umgebung der Entwicklungsstelle „brauchbar“. Verwendet man für die Näherung eine Funktion 2. Grads, so kann diese so gewählt werden, dass zusätzlich auch die zweite Ableitung, also die Krümmung, an der Stelle x_0 übereinstimmt.

Lineare Funktion

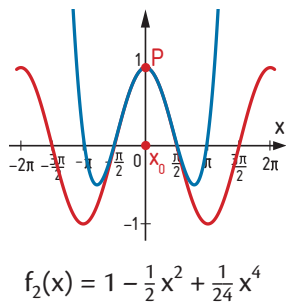


Polynomfunktion 2. Grads

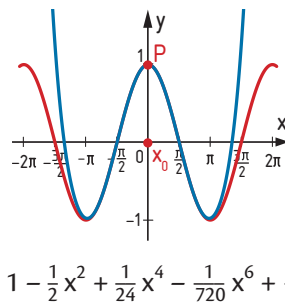


Taylor und MacLaurin bauten diese Idee aus, indem sie Polynome höheren Grads verwendeten, die an der Entwicklungsstelle in allen Ableitungen mit der gegebenen Funktion übereinstimmen. Je höher der Grad des gewählten Polynoms ist, umso größer ist die Anzahl der übereinstimmenden Ableitungen und umso besser nähert die Polynomfunktion die Cosinus-Funktion an.

Polynomfunktion 4. Grads



Polynomfunktion 8. Grads



Es lässt sich zeigen, dass eine Potenzreihe, deren Ableitungen mit jenen der ursprünglichen Funktion f an der Stelle x_0 übereinstimmen, gegen die Funktion f konvergiert. Diese Potenzreihe wird **Taylor-Reihe** genannt.

Funktionenreihen

Die Bestimmung der Koeffizienten der Taylor-Reihe erfolgt nach folgenden Überlegungen:

Eine Funktion $f(x)$ soll durch die Potenzreihe $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ mit $a_n \in \mathbb{R}$ so angenähert

werden, dass an der Stelle x_0 die Funktionswerte und die jeweiligen Ableitungen von f und P übereinstimmen.

$$f(x_0) = P(x_0) \Rightarrow f(x_0) = a_0 + a_1 \cdot x_0 + a_2 \cdot x_0^2 + a_3 \cdot x_0^3 + a_4 \cdot x_0^4 + \dots$$

$$f'(x_0) = P'(x_0) \Rightarrow f'(x_0) = a_1 + 2 \cdot a_2 \cdot x_0 + 3 \cdot a_3 \cdot x_0^2 + 4 \cdot a_4 \cdot x_0^3 + \dots$$

$$f''(x_0) = P''(x_0) \Rightarrow f''(x_0) = 2 \cdot a_2 + 3 \cdot 2 \cdot a_3 \cdot x_0 + 4 \cdot 3 \cdot a_4 \cdot x_0^2 + \dots$$

$$f'''(x_0) = P'''(x_0) \Rightarrow f'''(x_0) = 3 \cdot 2 \cdot a_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot a_4 \cdot x_0 + \dots$$

Wählt man die Entwicklungsstelle $x_0 = 0$, so erhält man:

$$f(0) = a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0^2 + a_3 \cdot 0^3 + a_4 \cdot 0^4 + \dots \Rightarrow a_0 = f(0)$$

$$f'(0) = a_1 + 2 \cdot a_2 \cdot 0 + 3 \cdot a_3 \cdot 0^2 + 4 \cdot a_4 \cdot 0^3 + \dots \Rightarrow a_1 = f'(0)$$

$$f''(0) = 2 \cdot a_2 + 3 \cdot 2 \cdot a_3 \cdot 0 + 4 \cdot 3 \cdot a_4 \cdot 0^2 + \dots \Rightarrow a_2 = \frac{f''(0)}{2}$$

$$f'''(0) = 3 \cdot 2 \cdot a_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot a_4 \cdot 0 + \dots \Rightarrow a_3 = \frac{f'''(0)}{3 \cdot 2}$$

$$\text{Allgemein gilt: } a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Man erhält dadurch folgende Potenzreihe:

$$P(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} \cdot x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n + \dots$$

Die Potenzreihe $P(x)$ ist innerhalb des Konvergenzbereichs **ident** mit der Funktion $f(x)$.

Außerhalb dieses Bereichs divergiert sie, sie ist also nicht einmal eine Näherung der Funktion.

Ist die Entwicklungsstelle $x_0 \neq 0$, so wählt man Potenzen von $(x - x_0)$, um wieder ein Gleichungssystem zu erhalten, bei dem jeweils alle Koeffizienten bis auf einen wegfallen.

Taylor-Reihe

Ist eine Funktion f beliebig oft differenzierbar und $x_0 \in D_f$, so existiert eine Potenzreihe, die in ihrem Konvergenzbereich mit der Funktion f ident ist. Im Konvergenzbereich gilt:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!} \cdot (x - x_0)^3 + \dots$$

Diese Potenzreihe nennt man Taylor-Reihe.

$$\text{Für } x_0 = 0 \text{ gilt: } f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} \cdot x^3 + \dots$$

Bemerkung: Eine Taylor-Reihe mit $x_0 = 0$ nennt man auch **MacLaurin-Reihe**.

Restglied der Taylor-Reihe

Bricht man die Taylor-Reihe bei n ab, so erhält man ein **Taylor-Polynom** P_n n -ten Grads.

Die Summe der nicht berücksichtigten Glieder wird **Restglied** R_n genannt. Es entspricht der Differenz zwischen dem Näherungswert und dem genauen Funktionswert. Das Restglied gibt also den Fehler an, der durch den vorzeitigen Abbruch der Reihe entsteht. Das Abschätzen der Größe des Restglieds ist im Allgemeinen schwierig, nur für **alternierende konvergente Reihen** liefert das Leibniz-Kriterium eine einfache Möglichkeit zur Bestimmung des Restglieds.

$$|R_n| < \left| \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1} \right| \quad \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1} \dots \text{erstes weggelassenes Glied}$$

Die Entwicklung einer Funktion in eine Taylor-Reihe mit $x_0 = 0$ wird nun anhand der Funktion $f(x) = e^x$ gezeigt.

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x &\Rightarrow f(0) &= 1 \\ f'(x) &= e^x &\Rightarrow f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= e^x &\Rightarrow f''(0) &= 1 \\ f'''(x) &= e^x &\Rightarrow f'''(0) &= 1 \end{aligned}$$

- Die Ableitungen der gegebenen Funktion werden bestimmt und die Werte an der Stelle $x_0 = 0$ berechnet.

$$e^x = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} \cdot x^3 + \dots$$

- Die Taylor-Reihe wird angeschrieben.

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!} \cdot x^2 + \frac{1}{3!} \cdot x^3 + \dots + \frac{1}{n!} \cdot x^n + \dots$$

- Einsetzen der Funktionswerte

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

- Anschreiben mithilfe des Summenzeichens

Der **Konvergenzradius der Potenzreihe** gibt jenen Bereich an, in dem die Potenzreihe die Funktion darstellt.

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty$$

⇒ Die Potenzreihe ist für alle Werte von x konvergent.

Die Taylor-Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{1}{2!} \cdot x^2 + \frac{1}{3!} \cdot x^3 + \dots + \frac{1}{n!} \cdot x^n + \dots$ stellt $f(x) = e^x$ für alle reellen Zahlen und auch für alle komplexen Zahlen dar.

Die Abbildung zeigt den Graphen von $y = e^x$ sowie die Graphen der ersten vier Taylor-Polynome.

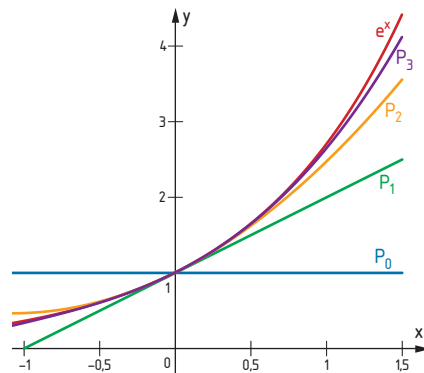
$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = 1 + x$$

$$P_2(x) = 1 + x + \frac{1}{2} \cdot x^2$$

$$P_3(x) = 1 + x + \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{6} \cdot x^3$$

Je mehr Glieder der Reihe verwendet werden, desto besser wird die Exponentialfunktion angenähert.



Man erkennt, dass die Taylor-Polynome die Funktion in der Nähe der Entwicklungsstelle besser nähern als weiter davon entfernt. Ebenso ist die Näherung besser, je höher der Grad des Taylor-Polynoms ist.

ZB: $e^{0,5} = 1,648721\dots$	→	$P_3(0,5) = 1,6458333\dots$	$P_4(0,5) = 1,6484375$
$e^{0,9} = 2,459603\dots$	→	$P_3(0,9) = 2,4265$	$P_4(0,9) = 2,4538375$
$e^{1,5} = 4,481689\dots$	→	$P_3(1,5) = 4,1875$	$P_4(1,5) = 4,3984375$

Setzt man in die Taylor-Reihe $e^x = 1 + x + \frac{1}{2!} \cdot x^2 + \frac{1}{3!} \cdot x^3 + \dots + \frac{1}{n!} \cdot x^n + \dots$ für $x = 1$ ein, erhält man für diese Summe die Euler'sche Zahl.

Darstellung der Euler'schen Zahl: $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$



- 3.22** 1) Entwickle die Funktion $f(x) = \cos(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$ in eine Taylor-Reihe.
 2) Es soll $\cos(0,6)$ mit einem Fehler von maximal 10^{-4} berechnet werden. Ermittle mithilfe des Restglieds den Grad des Taylor-Polynoms, mit dem die geforderte Genauigkeit erzielt werden kann.
 3) Vergleiche für $\cos(0,6)$ den Wert des Taylor-Polynoms mit dem in 2) berechneten Grad mit dem vom Taschenrechner angegebenen Wert.

Lösung:

$$\begin{aligned} 1) f(x) &= \cos(x) &\Rightarrow f(0) &= 1 \\ f'(x) &= -\sin(x) &\Rightarrow f'(0) &= 0 \\ f''(x) &= -\cos(x) &\Rightarrow f''(0) &= -1 \\ f'''(x) &= \sin(x) &\Rightarrow f'''(0) &= 0 \\ f^{(4)}(x) &= \cos(x) &\Rightarrow f^{(4)}(0) &= 1 \end{aligned}$$

- $f(x) = f^{(4)}(x)$
 $f'(x) = f^{(5)}(x)$, usw.
- Koeffizienten der Potenzreihe berechnen
- Potenzreihe angeben

$$\begin{aligned} \cos(x) &= f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} \cdot x^3 + \dots = \\ &= 1 + 0 \cdot x - \frac{1}{2!} \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 + \frac{1}{4!} \cdot x^4 + \dots \end{aligned}$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2!} \cdot x^2 + \frac{1}{4!} \cdot x^4 \pm \dots$$

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n}{(2n)!}$$

$$\begin{aligned} r &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{(2n)!}}{\frac{1}{(2n+2)!}} \right| = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(2n+2) \cdot (2n+1) \cdot (2n)!}{(2n)!} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} [(2n+2) \cdot (2n+1)] = \infty \end{aligned}$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2!} \cdot x^2 + \frac{1}{4!} \cdot x^4 - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot x^{2n} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \bullet \text{ Taylor-Reihe angeben}$$

- Nur die Koeffizienten mit geradem Index sind verschieden von null.
- Konvergenzradius ermitteln

$$2) |a_{2(n+1)}| = \left| \frac{1}{(2n+2)!} \cdot 0,6^{2n+2} \right| \leq 10^{-4}$$

- Erstes weggelassenes Glied

	A	B	C
1	n	Grad	$ a_{2(n+1)} $
2	0	0	0,18
3	1	2	0,0054
4	2	4	0,0000648
5	3	6	4,16571E-07
6	4	8	1,66629E-09

- Mithilfe eines Tabellenkalkulationsprogramms wird der Wert des Restglieds berechnet.

Das Taylor-Polynom 4. Grads muss berechnet werden.

$$3) \text{ TR: } \cos(0,6) = 0,825335\dots$$

$$P_4(0,6) = 1 - \frac{1}{2!} \cdot 0,6^2 + \frac{1}{4!} \cdot 0,6^4 = 0,8254$$

$$\text{Differenz: } 0,8254 - 0,825335\dots = 0,0000643\dots < R_4 = 0,0000648$$

3.23 Entwickle die Funktion f mit $f(x) = x^3$ an der Stelle $x_0 = 1$ in eine Taylor-Reihe. Zeige, dass die Taylor-Reihe der gegebenen Funktion entspricht.

● B ● D

Lösung:

$$f(x) = x^3, \quad f'(x) = 3x^2, \quad f''(x) = 6x, \quad f'''(x) = 6, \quad f^{(4)}(x) = f^{(5)}(x) = \dots = 0$$

$$f(1) = 1, \quad f'(1) = 3, \quad f''(1) = 6, \quad f'''(1) = 6$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!} \cdot (x - x_0)^3 + \dots$$

$$x^3 = 1 + 3 \cdot (x - 1) + \frac{6}{2!} \cdot (x - 1)^2 + \frac{6}{3!} \cdot (x - 1)^3 = 1 + 3 \cdot (x - 1) + 3 \cdot (x - 1)^2 + 1 \cdot (x - 1)^3$$

Durch Ausmultiplizieren folgt: $1 + 3x - 3 + 3x^2 - 6x + 3 + x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = x^3$ q. e. d.

Im Folgenden sind die **Potenzreihen einiger elementarer Funktionen** sowie spezielle Potenzreihen und deren Konvergenzbereich aufgelistet.

Funktion	Potenzreihe	Konvergenzbereich
e^x	$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$	$ x < \infty$
a^x mit $a \in \mathbb{R}$	$1 + \frac{\ln(a) \cdot x}{1!} + \frac{(\ln(a))^2 \cdot x^2}{2!} + \frac{(\ln(a))^3 \cdot x^3}{3!} + \dots$	$ x < \infty$
$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$	$2 \cdot \left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots \right]$	$ x < 1$
$\ln(x)$	$(x-1) - \frac{1}{2} \cdot (x-1)^2 + \frac{1}{3} \cdot (x-1)^3 - \frac{1}{4} \cdot (x-1)^4 \pm \dots$	$0 < x \leq 2$
$\sin(x)$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \dots$	$ x < \infty$
$\cos(x)$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm \dots$	$ x < \infty$
$\tan(x)$	$x + \frac{x^3}{3} + \frac{2 \cdot x^5}{15} + \frac{17 \cdot x^7}{315} + \frac{62 \cdot x^9}{2835} + \dots$	$ x < \frac{\pi}{2}$
$\sinh(x)$	$x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots$	$ x < \infty$
$\cosh(x)$	$1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots$	$ x < \infty$
$\tanh(x)$	$x - \frac{x^3}{3} + \frac{2 \cdot x^5}{15} - \frac{17 \cdot x^7}{315} + \frac{62 \cdot x^9}{2835} \pm \dots$	$ x < \frac{\pi}{2}$
$\frac{1}{1+x}$	$1 - x + x^2 - x^3 \pm \dots$	$ x < 1$
$\frac{1}{1-x}$	$1 + x + x^2 + x^3 + \dots$	$ x < 1$

Aufgaben 3.24 – 3.26: Verwende die Reihendarstellung aus der Tabelle.

3.24 Gib das Taylor-Polynom 4. Grads an und berechne damit die Näherungswerte für $f(x_i)$.

● A ● B ● ●

a) $f(x) = \tan(x)$ für $x_1 = \frac{\pi}{4}$ und $x_2 = -1$

c) $f(x) = 2^x$ für $x_1 = 0,4$ und $x_2 = -2,3$

b) $f(x) = \sin(x)$ für $x_1 = -10$ und $x_2 = 0,8$

d) $f(x) = \cosh(x)$ für $x_1 = -3$ und $x_2 = 0,5$

3.25 1) Berechne e^x für $x_1 = 1$ und $x_2 = 2,7$ mithilfe eines Taylor-Polynoms 5. Grads.

● ● B ● C ●

2) Vergleiche die Ergebnisse aus 1) mit der Ausgabe des Taschenrechners und beschreibe, was dir auffällt.

3.26 Schreibe die Taylor-Reihe für die gegebene Funktion mithilfe des Summenzeichens an.

● A ● ● ● ●

a) $\sin(x)$

b) $\ln(x)$

Funktionenreihen

Aufgaben 3.27 – 3.29: Verwende die Reihendarstellung aus der Tabelle auf Seite 59.

3.27 Gib mithilfe der Taylor-Reihe für e^x die Taylor-Reihe für die Funktion f an:

a) $f(x) = e^{-x}$

b) $f(x) = e^{\frac{x}{2}}$

c) $f(x) = e^{ix}$

3.28 Prüfe die angegebene Reihe für $\frac{1}{1-x}$ durch Entwicklung in eine Taylor-Reihe mit $x_0 = 0$ nach.

3.29 Gib zwei verschiedene Näherungspolynome 3. Grads zur Berechnung von $\ln(0,75)$ an. Begründe, warum du damit unterschiedlich gute Näherungswerte erhältst.

3.30 **1)** Entwickle die Funktion f mit $f(x) = \sin(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$ in eine Taylor-Reihe.
2) Stelle die Funktion f sowie die Taylor-Polynome 3. Grads und 7. Grads in einem gemeinsamen Koordinatensystem dar. Gib jene Bereiche an, in denen die jeweilige Näherung geeignet erscheint.
3) Berechne $\sin(150^\circ)$ mithilfe der Näherungspolynome aus **2)** und markiere diese Werte in der Grafik. Interpretiere die Ergebnisse.

3.31 Entwickle die Funktion $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ an der Stelle $x_0 = 1$ in eine Taylor-Reihe.

3.32 Entwickle die Funktion $f(x) = 3x^2 - 5x + 7$ an der Stelle $x_0 = 2$ in eine Taylor-Reihe. Begründe, warum die entstehende Taylor-Reihe eine endliche Reihe ist.

3.33 **1)** Zeige, dass das lineare Taylor-Polynom $P_1(x) = 1 + 3 \cdot (x - 1)$ der Tangente an die Funktion $f(x) = x^3$ an der Stelle $x = 1$ entspricht.
2) Zeige, dass das lineare Taylor-Polynom einer Funktion f an der Stelle x_0 der Gleichung der Tangente an die Funktion f an der Stelle x_0 entspricht.

3.34 Entwickle $f(x) = \sin(x)$ an den Stellen $x_0 = 0$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$ und $x_0 = \frac{\pi}{2}$ jeweils in eine Taylor-Reihe. Berechne anschließend $\sin(0,7)$ mit allen drei Reihen mit dem Näherungspolynom P_4 und interpretiere das Ergebnis mithilfe des jeweiligen Restglieds.

3.35 Zeige die Gültigkeit der Euler'schen Formel $e^{ix} = \cos(x) + j \cdot \sin(x)$.

3.36 Berechne das Integral näherungsweise mithilfe eines Taylorpolynoms mit dem angegebenen Grad n . Gib die maximale Abweichung mithilfe des Restglieds an (siehe Seite 56).

a) $\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{x} dx$, $n = 6$

b) $\int_0^3 e^{-\frac{x}{2}} dx$, $n = 4$

c) $\int_1^2 e^{-x^2} dx$

d) $\int_1^2 \frac{\ln(x)}{x-1} dx$, $n = 3$

3.37 **1)** Entwickle $f_1(x) = \ln(x)$ an der Stelle $x_0 = 1$ und $f_2(x) = \ln(1+x)$ an der Stelle $x_0 = 0$ in eine Taylor-Reihe.

2) Berechne $\ln(1,5)$ mithilfe der Näherungspolynome P_5 . Vergleiche die Ergebnisse.

3) Begründe, warum es nicht möglich ist, f_1 an der Stelle $x_0 = 0$ zu entwickeln.

3.38 Leite die Reihenentwicklung für $f(x) = \frac{1}{1+x}$ mithilfe einer Polynomdivision her.

3.39 Das Snellius'sche Brechungsgesetz (Willebrord van Roijen Snell niederländischer Astronom, 1580 – 1626) besagt, dass ein Lichtstrahl beim Eintritt aus einem Medium in ein anderes Medium seine Richtung ändert, also der Lichtstrahl gebrochen wird:

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin(\delta_1)}{\sin(\delta_2)}$$

n_i ... Brechzahlen

δ_i ... Eintritts- bzw. Austrittswinkel

Zeige, dass für kleine Winkel δ_i die Näherung $\frac{n_2}{n_1} \approx \frac{\delta_1}{\delta_2}$ verwendet werden kann.



3.4 Fourier-Reihe

3.4.1 Einleitung

In der Signaltechnik oder bei der digitalen Erzeugung von Tönen treten periodische Funktionen auf, die sich aus stückweise stetigen Funktionen zusammensetzen, zum Beispiel Rechteck- oder Sägezahnfunktionen. Diese Funktionen sollen nun durch Reihen dargestellt werden, deren Glieder Sinus- und Cosinusfunktionen sind.



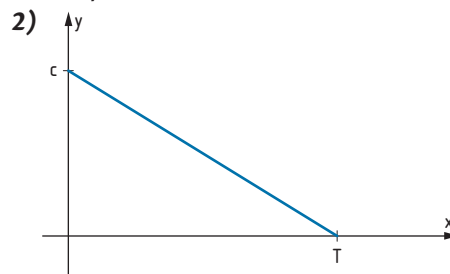
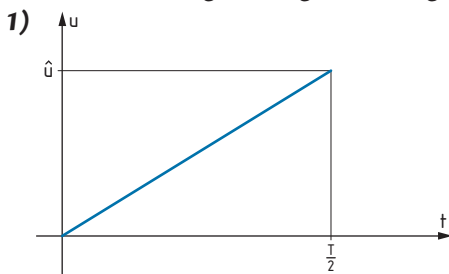
Mithilfe solcher Darstellungen ist es zum Beispiel möglich, Klänge, die aus einem Grundton und Obertönen bestehen, zu analysieren. Des Weiteren wird die Darstellung als Reihe auch zur Datenkomprimierung oder zur Entrauschung von Signalen verwendet.

Da es sich um periodische Funktionen handelt, werden nun einige wichtige Eigenschaften dieser Funktionen und der trigonometrischen Funktionen angegeben bzw. wiederholt.

Darstellung und Eigenschaften periodischer Funktionen

3.40 Gib die Funktionsgleichungen der dargestellten Graphen an.

A C



Viele periodische Funktionen setzen sich aus stückweise stetigen Funktionen zusammen. Meist genügt es, die Funktionsgleichung für eine Periode anzugeben.

ZB

Die dargestellte Dreieckscurve hat die Periode $T = 2$ und setzt sich in jeder Periode aus zwei linearen Funktionen der Form $y = k \cdot x + d$ zusammen.

Die Funktion wird für eine Periode, zum Beispiel im Bereich $[0; 2[$, angegeben.

Im Intervall $[0; 2[$ gilt:

$$k_1 = 1,5 \text{ und } d_1 = 0 \Rightarrow y_1 = 1,5x \dots \text{„linke Gerade“}$$

$$k_2 = -1,5 \text{ und } d_2 = 3 \Rightarrow y_2 = -1,5x + 3 \dots \text{„rechte Gerade“}$$

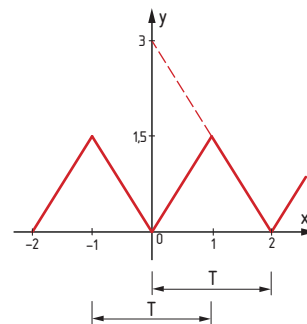
$$f(x) = \begin{cases} 1,5x & \text{für } 0 \leq x < 1 \\ -1,5x + 3 & \text{für } 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

Wählt man das Intervall $[-1; 1[$, so erhält man folgende Darstellung:

$$k_1 = -1,5 \text{ und } d_1 = 0 \Rightarrow y_1 = -1,5x \dots \text{„linke Gerade“}$$

$$k_2 = 1,5 \text{ und } d_2 = 0 \Rightarrow y_2 = 1,5x \dots \text{„rechte Gerade“}$$

$$f(x) = \begin{cases} -1,5x & \text{für } -1 \leq x < 0 \\ 1,5x & \text{für } 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

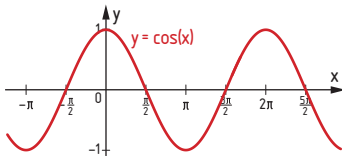
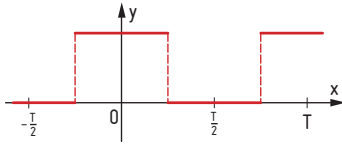


Funktionenreihen

Sind periodische Funktionen symmetrisch, so sind Vereinfachungen beim Berechnen von bestimmten Integralen möglich.

Symmetrieeigenschaften von Funktionen

• Gerade Funktionen



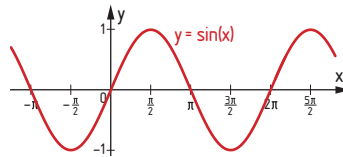
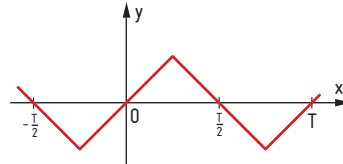
Der Funktionsgraph ist **symmetrisch zur y-Achse**.

Es gilt: $f(x) = f(-x)$

Der Wert des bestimmten Integrals ist aufgrund der Symmetrie im Bereich $[-\frac{T}{2}; 0]$ und $[0; \frac{T}{2}]$ gleich. Es genügt daher, nur über die halbe Periodenlänge zu integrieren und dann das Ergebnis zu verdoppeln.

$$\int_0^T f(x) dx = 2 \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} f(x) dx$$

• Ungerade Funktionen



Der Funktionsgraph ist **punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung**.

Es gilt: $f(x) = -f(-x)$

Der Wert des bestimmten Integrals ist aufgrund der Punktsymmetrie im Bereich $[-\frac{T}{2}; 0]$ und $[0; \frac{T}{2}]$ gegengleich und somit in der gesamten Periode null.

$$\int_0^T f(x) dx = 0$$

- Für die Produkte von geraden bzw. ungeraden Funktionen gilt:
 ungerade · ungerade = gerade, da $f(x) \cdot g(x) = -f(-x) \cdot (-g(-x)) = f(-x) \cdot g(-x)$
 gerade · gerade = gerade, da $f(x) \cdot g(x) = f(-x) \cdot g(-x)$
 ungerade · gerade = ungerade, da $f(x) \cdot g(x) = -f(-x) \cdot g(-x)$

Trigonometrische Funktionen



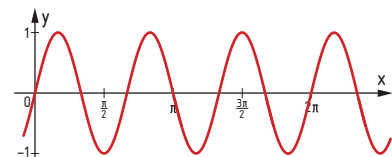
3.41 1) Skizziere den Graphen der gegebenen Funktion.

2) Beschreibe den Einfluss der Parameter auf die Funktion in Hinblick auf Amplitude und Periode.

a) $y = 2 \cdot \sin(0,5x)$

b) $y = 0,5 \cdot \cos(3x)$

Die bekanntesten periodischen Funktionen sind die Winkelfunktionen. Die Sinusfunktion $y = \sin(x)$ hat die Periode 2π . Wie aus Band 2, Abschnitt 5.3, bekannt ist, kann eine andere Periodendauer T durch Änderung der Frequenz f erreicht werden. Mit der Kreisfrequenz $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ erhält man dann die Sinusschwingung $y = \sin(\omega t)$ mit der Periodendauer T .



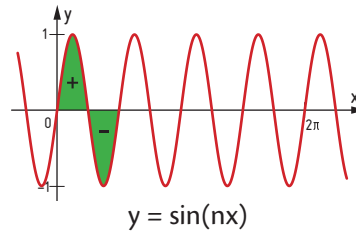
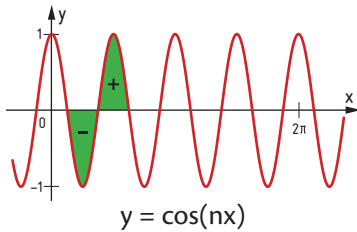
$$y = \sin(3x), T = \frac{2\pi}{3}$$

Für weitere Überlegungen wird das bestimmte Integral von Winkelfunktionen und von Produkten von Winkelfunktionen im Intervall $[0; 2\pi]$ benötigt.

Für die Funktionen $y = \cos(nx)$ und $y = \sin(nx)$ gilt:

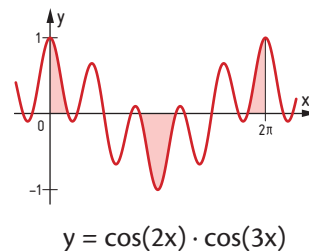
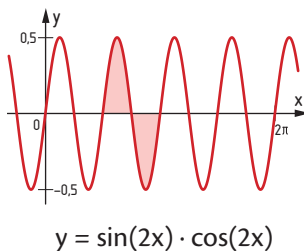
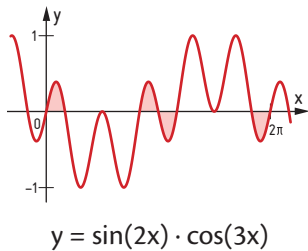
$$\int_0^{2\pi} \cos(nx) dx = 0 \quad \text{und} \quad \int_0^{2\pi} \sin(nx) dx = 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

Anschaulich ergibt sich dies, da die orientierten Flächeninhalte zwischen den Nullstellen jeweils gegengleich sind.

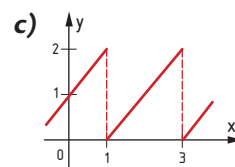
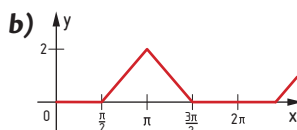
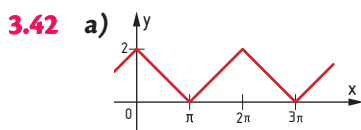


Ebenso ist das bestimmte Integral folgender Produkte von Winkelfunktionen über eine Periode null:

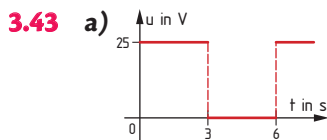
$$\int_0^{2\pi} \sin(nx) \cdot \cos(mx) dx = 0, \quad \int_0^{2\pi} \sin(nx) \cdot \cos(nx) dx = 0 \quad \text{und} \quad \int_0^{2\pi} \cos(nx) \cdot \cos(mx) dx = 0$$



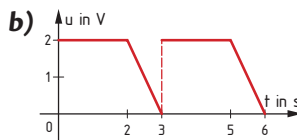
Aufgaben 2.43 – 2.44: Gib jeweils die Periode an und stelle die Gleichung der dargestellten Funktion für eine Periode auf.



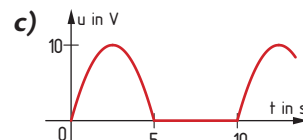
A C



Rechteckkurve



Trapezkurve



Einweggleichrichtung (Sinus)

A C

3.44 Beschreibe, wie sich die gegebene Funktion von $y = \sin(x)$ unterscheidet.

a) $y = 3 \cdot \sin(x)$

c) $y = \sin(4x)$

e) $y = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$

b) $y = \sin(x) + 2$

d) $y = 5 \cdot \sin(x - 2)$

f) $y = 0,5 \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 1$

3.45 1) Gib an, ob die Funktion gerade oder ungerade ist.

2) Ermittle das bestimmte Integral im Intervall $[0; 2\pi]$.

a) $y = \sin(3x)$

b) $y = \cos(5x)$

c) $y = \sin(4x) \cdot \cos(3x)$

B C

3.4.2 Fourier-Koeffizienten

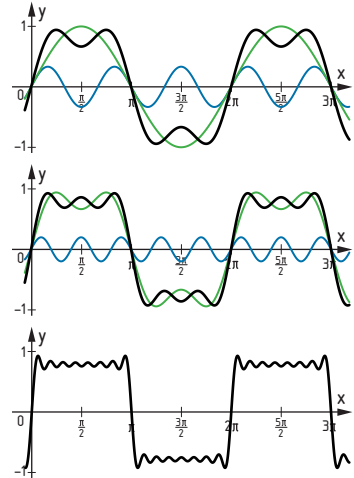
BCD

3.46 Stelle die Funktionen y_1 und y_2 sowie $y_1 + y_2$ grafisch dar. Erkläre die Entstehung des Graphen von $y_1 + y_2$ und beschreibe die unterschiedlichen Ergebnisse aus **1)** und **2)**.

1) $y_1 = \sin(t)$, $y_2 = 2 \cdot \sin(t)$

2) $y_1 = \sin(2t)$, $y_2 = 2 \cdot \sin(t)$

Die Überlagerung zweier Schwingungen mit der gleichen Frequenz ergibt wieder eine Schwingung mit dieser Frequenz (vgl. Band 2, Abschnitt 6.2). Überlagert man zwei oder mehr **Schwingungen ungleicher Frequenz**, so entsteht im Allgemeinen keine Sinusschwingung, aber immer eine **periodische Funktion**, wenn die Frequenzen in einem rationalen Verhältnis zueinander stehen. Die Periode der entstehenden Überlagerung ist das kleinste gemeinsame Vielfache der einzelnen Perioden. Durch das Summieren geeigneter Funktionen kann zum Beispiel eine Rechteckkurve entstehen. Die Frequenzen der summierten Schwingungen sind jeweils (ganzzahlige) Vielfache einer Grundfrequenz, die geeigneten Amplituden dieser Schwingungen müssen noch ermittelt werden.



Mithilfe solcher Überlagerungen hat man die Möglichkeit, eine periodische Funktion f als unendliche Summe von Sinus- und Cosinusfunktionen darzustellen. Diese Summe wird **Fourier-Reihe** (Jean Baptiste Joseph Fourier, französischer Mathematiker, 1768 – 1830) genannt. Dabei muss die Funktion f im Intervall $[0; T]$ in endlich viele Teilintervalle zerlegbar sein, in denen sie monoton und stetig ist, und es muss an (eventuell vorhandenen) den Unstetigkeitsstellen der links- und der rechtsseitige Grenzwert existieren.

Fourier-Reihe

Ist f eine **T-periodische Funktion**, so kann die Funktion f durch eine Reihe folgender Form dargestellt werden:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos(n\omega_0 t) + b_n \cdot \sin(n\omega_0 t)) \quad \text{mit } \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$a_0, a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$ **Fourier-Koeffizienten**

Ist f eine **2π -periodische Funktion**, so gilt:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx))$$

Eine periodische Funktion lässt sich also als Summe aus einem **Gleichanteil** $\frac{a_0}{2}$ und Sinus- und Cosinusschwingungen darstellen. Die Kreisfrequenzen dieser Schwingungen sind ganzzahlige Vielfache der Kreisfrequenz ω_0 , die sich aus der Frequenz der Funktion f ergibt.

Die Beträge der Koeffizienten a_n und b_n entsprechen den Amplituden der Sinus- und Cosinusschwingungen. Durch sie ist die Funktion f eindeutig bestimmt. Die Menge aller Koeffizienten wird **Spektrum** genannt.

Die „erste“ Schwingung $y_1 = a_1 \cdot \cos(\omega_0 t) + b_1 \cdot \sin(\omega_0 t)$ wird als **Grundschiwingung** (**1. Harmonische**), alle weiteren werden als **Oberschwingungen** (**2., 3., ... Harmonische**) bezeichnet. Sie spielen zum Beispiel bei Klängen eine Rolle, die sich im Allgemeinen aus einem Grundton und Obertönen zusammensetzen. Die Zerlegung in eine Grundschiwingung und Oberschwingungen wird **Fourier-Analyse** genannt.

Für die Darstellung einer Funktion f durch eine unendliche Reihe müssen nun die geeigneten Koeffizienten a_0 , a_n und b_n ermittelt werden. Dies wird für 2π -periodische Funktionen gezeigt und gilt mit $x = \omega_0 \cdot t$ und $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ auch für T -periodische Funktionen.

• Berechnung von a_0 :

Man geht davon aus, dass für die Funktion eine Reihendarstellung folgender Form existiert:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx)) =$$

$$= \frac{a_0}{2} + a_1 \cdot \cos(x) + b_1 \cdot \sin(x) + a_2 \cdot \cos(2x) + b_2 \cdot \sin(2x) + \dots$$

Durch Integration der Gleichung im Intervall $[0; 2\pi]$ erhält man:

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx = \int_0^{2\pi} \frac{a_0}{2} dx + \underbrace{\int_0^{2\pi} a_1 \cdot \cos(x) dx}_0 + \underbrace{\int_0^{2\pi} b_1 \cdot \sin(x) dx}_0 + \underbrace{\int_0^{2\pi} a_2 \cdot \cos(2x) dx}_0 + \underbrace{\int_0^{2\pi} b_2 \cdot \sin(2x) dx}_0 + \dots$$

Mit den Überlegungen von Seite 63 erkennt man, dass alle Integrale mit $a_n \cdot \cos(nx)$ bzw. $b_n \cdot \sin(nx)$ null sind. Daher gilt:

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx = \int_0^{2\pi} \frac{a_0}{2} dx = a_0 \cdot \pi \Rightarrow a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) dx$$

• Berechnung von a_n und b_n :

Um die Koeffizienten a_n bzw. b_n zu erhalten, wird nun jeweils mit einer passenden Funktion multipliziert, sodass nur ein Koeffizient „übrig bleibt“. Zur Berechnung von a_n multipliziert man beide Seiten der Gleichung $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx))$ mit $\cos(mx)$ und integriert anschließend.

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos(mx) dx =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{a_0}{2} \cdot \cos(mx) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cdot \int_0^{2\pi} \cos(nx) \cdot \cos(mx) dx + b_n \cdot \int_0^{2\pi} \sin(nx) \cdot \cos(mx) dx \right)$$

Die Summe auf der rechten Seite enthält nun folgende Integrale:

$$m \neq n: \int_0^{2\pi} \cos(nx) \cdot \cos(mx) dx = 0 \quad \text{und} \quad \int_0^{2\pi} \sin(nx) \cdot \cos(mx) dx = 0$$

$$m = n: \int_0^{2\pi} \cos(nx) \cdot \cos(nx) dx = \int_0^{2\pi} \cos^2(nx) dx = \pi \quad \text{und} \quad \int_0^{2\pi} \sin(nx) \cdot \cos(nx) dx = 0$$

$$\text{Daraus ergibt sich: } \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos(nx) dx = \int_0^{2\pi} a_n \cdot \cos^2(nx) dx = a_n \cdot \pi$$

Damit erhält man:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos(nx) dx$$

Um b_n zu berechnen, wird die Gleichung mit $\sin(mx)$ multipliziert. Für b_n ergibt sich:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin(nx) dx$$

Für T -periodische Funktionen wird $x = \omega_0 \cdot t$ gesetzt, dem Faktor $\frac{1}{\pi}$ entspricht wegen $T = 2\pi$ der Ausdruck $\frac{1}{T} = \frac{2}{T}$.

Funktionenreihen

Fourier-Koeffizienten einer 2π -periodischen Funktion $f(x)$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos(nx) dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin(nx) dx$$

Fourier-Koeffizienten einer T -periodischen Funktion $f(t)$

$$a_0 = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T f(t) dt, \quad a_n = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T f(t) \cdot \cos(n\omega_0 t) dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T f(t) \cdot \sin(n\omega_0 t) dt, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Bemerkungen:

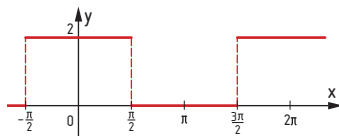
- Oft wird die Periode auch im Bereich $\left[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}\right]$ angegeben, zB: $a_0 = \frac{2}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt$

Es kann auch jedes andere Intervall gewählt werden, das eine volle Periode der Funktion angibt.

- $\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T f(t) dt$ ist der lineare Mittelwert der Funktion $f(t)$, er kann oft auch elementar berechnet werden.

ZB

ZB: Es soll die Fourier-Reihe der dargestellten periodischen Funktion angegeben werden.



Periode: $T = 2\pi$

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{für } -\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{für } \frac{\pi}{2} \leq x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \cdot \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2 dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 0 dx \right) = \frac{1}{\pi} \cdot \left(2 \cdot \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) + 0 \right) = 2$$

$$\text{bzw. } a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot 2\pi = 2$$

- Flächeninhalt eines Rechtecks

Der Gleichanteil $\frac{a_0}{2} = 1$ ist somit der lineare Mittelwert.

$$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) \cdot \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \cdot \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2 \cdot \cos(nx) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 0 dx \right) = \frac{1}{\pi} \cdot \left(\frac{2}{n} \cdot \sin(nx) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + 0 \right) = \frac{1}{\pi} \cdot \left(\frac{2}{n} \cdot \left(\sin\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-n \cdot \frac{\pi}{2}\right) \right) \right) = \frac{4}{n\pi} \cdot \sin\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right) \quad \bullet \sin(-x) = -\sin(x)$$

$$a_1 = \frac{4}{1 \cdot \pi} \cdot \sin\left(1 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{\pi}, \quad a_3 = \frac{4}{3 \cdot \pi} \cdot \sin\left(3 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{4}{3\pi}, \dots \quad a_2 = a_4 = a_6 = \dots = 0$$

Ist der Index n gerade, so ist $a_n = 0$, die ungeraden Indizes ergeben eine alternierende Folge.

$$\text{Allgemein gilt: } a_{2i} = 0, \quad a_{2i-1} = (-1)^{i+1} \cdot \frac{4}{(2i-1) \cdot \pi} \quad \text{für } i \in \mathbb{N}^*$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) \cdot \sin(nx) dx = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

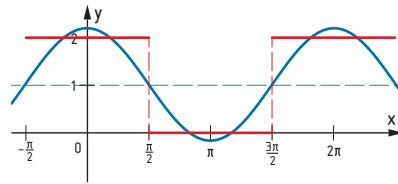
Die Reihe lässt sich somit folgendermaßen anschreiben:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cdot \cos(1x) + \underbrace{b_1 \cdot \sin(1x)}_0 + \underbrace{a_2 \cdot \cos(2x)}_0 + \underbrace{b_2 \cdot \sin(2x)}_0 + a_3 \cdot \cos(3x) + \underbrace{b_3 \cdot \sin(3x)}_0 + \dots$$

$$f(x) = 1 + \frac{4}{\pi} \cdot \cos(x) - \frac{4}{3\pi} \cdot \cos(3x) + \frac{4}{5\pi} \cdot \cos(5x) \mp \dots = 1 + \frac{4}{\pi} \cdot \left(\cos(x) - \frac{1}{3} \cdot \cos(3x) + \frac{1}{5} \cdot \cos(5x) \mp \dots \right)$$

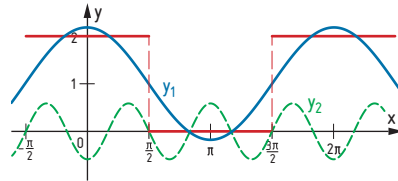
Wird die Reihe nach einer endlichen Anzahl von Gliedern abgebrochen, erhält man Näherungsfunktionen, die **trigonometrische Polynome** genannt werden.

Betrachtet man den Graphen der ersten Näherung $f(x) \approx 1 + \frac{4}{\pi} \cdot \cos(x) = y_1$, so ist dieser eine um 1 in y-Richtung verschobene Cosinuskurve mit der Amplitude $\frac{4}{\pi}$. Die Grundschwingung ist hier also eine Cosinusfunktion.

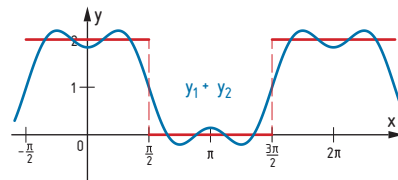


Bei Abbruch nach dem dritten Glied erhält man:

$$f(x) \approx 1 + \frac{4}{\pi} \cdot \cos(x) - \frac{4}{3\pi} \cdot \cos(3x)$$

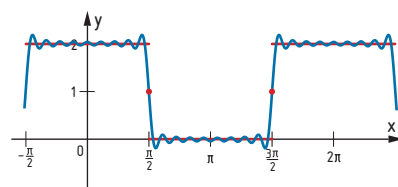


Hier wird die Cosinuskurve von der Kurve $y_2 = -\frac{4}{3\pi} \cdot \cos(3x)$ überlagert. Diese hat eine kleinere Amplitude und eine höhere Frequenz.



Je mehr Glieder der Reihe man zur Darstellung verwendet, desto geringer ist die Abweichung von der gegebenen Funktion.

Die Näherung für $n = 17$ ergibt bereits nebenstehendes Bild.



Weiters gilt:

- An den Unstetigkeitsstellen konvergiert die Reihe gegen das arithmetische Mittel aus links- und rechtsseitigem Grenzwert. Zum Beispiel verläuft der Graph obiger Näherungsfunktion durch die Punkte $(\frac{\pi}{2} | 1), (\frac{3\pi}{2} | 1), \dots$
- Die „Spitzen“ an den Unstetigkeitsstellen bleiben erhalten (**Gibbs'sches Phänomen**, nach Josiah Willard Gibbs, amerikanischer Physiker, 1839 – 1903).

Vereinfachungen bei geraden und ungeraden Funktionen

Beim Beispiel von Seite 66 sind die Koeffizienten $b_n = 0$ und somit fallen die Sinusanteile weg. Dies ist bei allen **geraden** Funktionen der Fall. Ebenso lassen sich die Fourier-Koeffizienten ungerader Funktionen vereinfachen.

Man kann zeigen:

Hat die gegebene Funktion die gleichen Symmetrieeigenschaften wie eine Sinuskurve, so enthält sie nur Sinusanteile; hat sie die gleichen Symmetrieeigenschaften wie eine Cosinuskurve, so enthält sie nur Cosinusanteile und den Gleichanteil $\frac{a_0}{2}$.

- Ist die Funktion $f(x)$ **gerade**, so ist auch das Produkt $f(x) \cdot \cos(nx)$ gerade, da die Cosinusfunktion gerade ist. Die Sinusfunktion ist ungerade und damit auch das Produkt $f(x) \cdot \sin(nx)$. Somit werden alle Koeffizienten b_n der Sinusanteile null.

$$\text{Es gilt dann: } a_0 = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} f(x) \, dx, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} f(x) \cdot \cos(nx) \, dx, \quad b_n = 0$$

Funktionenreihen

- Ist die Funktion $f(x)$ **ungerade**, so ist auch das Produkt $f(x) \cdot \cos(nx)$ ungerade, das Produkt $f(x) \cdot \sin(nx)$ ist gerade. Somit werden alle Koeffizienten a_n der Cosinusanteile null.

Es gilt dann: $a_0 = a_n = 0$, $b_n = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cdot \sin(nx) dx$

Allgemein gilt für T-periodische Funktionen:

Vereinfachungen der Fourier-Koeffizienten

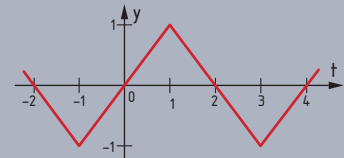
$f(t)$... gerade Funktion: $a_0 = \frac{4}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) dt$, $a_n = \frac{4}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cdot \cos(n\omega_0 t) dt$, $b_n = 0$

$f(t)$... ungerade Funktion: $a_0 = a_n = 0$, $b_n = \frac{4}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cdot \sin(n\omega_0 t) dt$



Bei der Wahl der halben Periode ist darauf zu achten, dass jenes Halbintervall verwendet wird, das bei der Symmetrieachse bzw. beim Symmetriezentrum beginnt.

- 3.47**
- Gib an, ob die dargestellte Funktion eine gerade oder eine ungerade Funktion ist.
 - Berechne die Fourier-Koeffizienten allgemein. Gib die ersten fünf Koeffizienten an.
 - Stelle die Fourier-Reihe und die Näherungsfunktion bis zur 5. Harmonischen grafisch dar.



Lösung mit Mathcad:

1) Die Funktion ist punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung und daher ungerade.

2) Periode: $T := 4$ $\omega_0 := \frac{2\pi}{T}$ Funktionsgleichung: $f_1(t) := t$ $f_2(t) := -t + 2$

Fourier-Koeffizienten:

$a_0 = a_n = 0$

$$b(n) := \frac{4}{T} \left(\int_0^1 f_1(t) \cdot \sin(n \cdot \omega_0 \cdot t) dt + \int_1^2 f_2(t) \cdot \sin(n \cdot \omega_0 \cdot t) dt \right)$$

$$b(n) \rightarrow \frac{4 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot n}{2}\right) - 4 \cdot \sin(\pi \cdot n) + 2 \cdot \pi \cdot n \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot n}{2}\right)}{\pi^2 \cdot n^2} + \frac{4 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot n}{2}\right) - 2 \cdot \pi \cdot n \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot n}{2}\right)}{\pi^2 \cdot n^2}$$

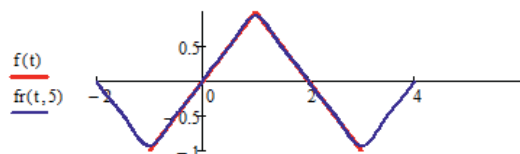
$b(1) \rightarrow \frac{8}{\pi^2}$ $b(2) \rightarrow 0$ $b(3) \rightarrow -\frac{8}{9 \cdot \pi^2}$ $b(4) \rightarrow 0$ $b(5) \rightarrow \frac{8}{25 \cdot \pi^2}$

3) Fourier-Reihe:

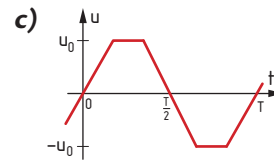
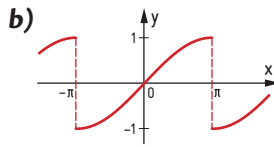
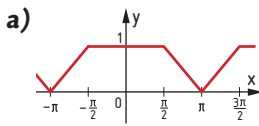
$$fr(t, k) := \sum_{n=1}^k (b(n) \cdot \sin(n \cdot \omega_0 \cdot t)) \quad f(t) := \begin{cases} t & \text{if } -1 \leq t < 1 \\ -t + 2 & \text{if } 1 \leq t < 3 \end{cases}$$

$$fr(t, 5) \rightarrow \frac{8 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{2}\right)}{\pi^2} - \frac{8 \cdot \sin\left(\frac{3 \cdot \pi \cdot t}{2}\right)}{9 \cdot \pi^2} + \frac{8 \cdot \sin\left(\frac{5 \cdot \pi \cdot t}{2}\right)}{25 \cdot \pi^2}$$

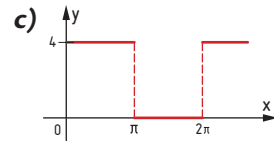
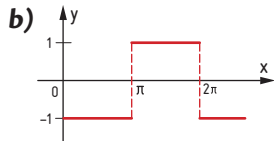
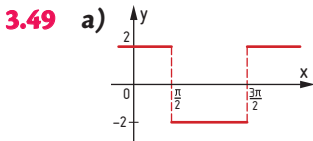
$t := -2, -1.99..4$



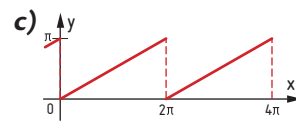
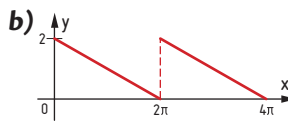
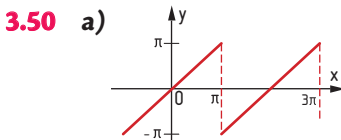
3.48 Gib an, ob es sich um eine gerade oder eine ungerade Funktion handelt und welche Koeffizienten der Fourier-Reihe daher null sind.



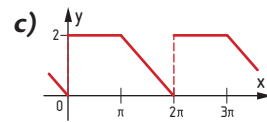
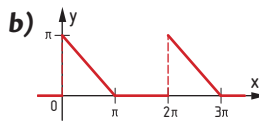
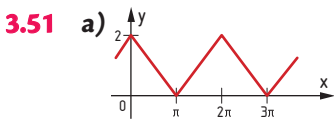
Aufgaben 3.49 – 3.54: Erkläre jeweils, ob und welche Fourier-Koeffizienten der dargestellten Funktion null sind. Berechne die ersten vier Fourier-Koeffizienten. Gib die Funktion als Fourier-Reihe an. Stelle den Funktionsgraphen und die Näherung grafisch dar. Gib bei den Aufgaben 3.49 und 3.50 die Fourier-Koeffizienten auch allgemein an.



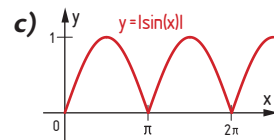
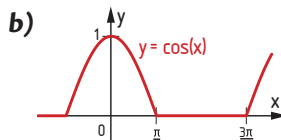
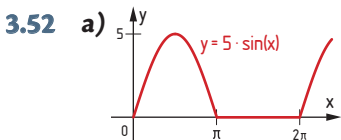
A B D



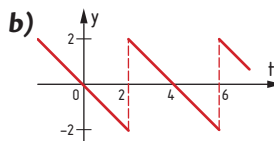
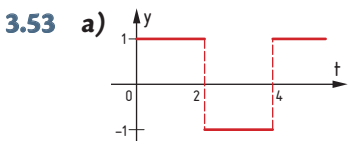
A B D



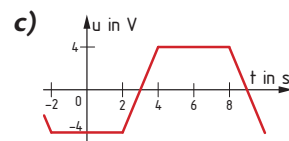
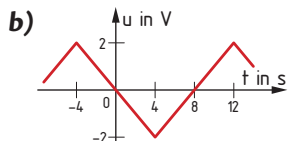
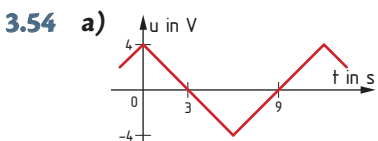
A B D



A B D



A B D



A B D

3.55 1) Stelle die stückweise definierte Funktion grafisch dar.
2) Gib die Fourier-Reihe der Funktion an, wenn sie periodisch fortgesetzt wird.

$$\text{a) } f(t) = \begin{cases} (t-2)^2 & \text{für } 0 \leq t < 2 \\ 0 & \text{für } 2 \leq t < 4 \end{cases} \quad \text{b) } f(t) = \begin{cases} t & \text{für } 0 \leq t < 1 \\ 1 & \text{für } 1 \leq t < 3 \\ 4-t & \text{für } 3 \leq t < 4 \end{cases}$$

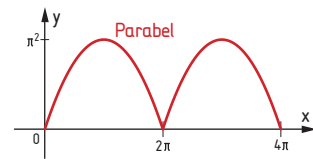
A B D

Funktionenreihen

● B ● D

3.56 Gib die Fourier-Reihe der dargestellten Funktion an.
Zeige anschließend durch Einsetzen von $x = 0$, dass gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$



3.4.3 Amplituden-Phasen-Form und Amplitudenspektrum

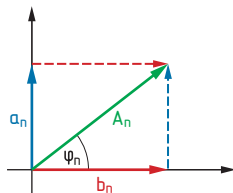
● A ● B ● ●

3.57 Gib die Aussage „Die Cosinuskurve ist eine um $\frac{\pi}{2}$ phasenverschobene Sinuskurve.“ als mathematische Gleichung an.

Die Überlagerung von Sinus- und Cosinusschwingungen gleicher Frequenz kann immer als allgemeine Sinusschwingung $y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ dargestellt werden. Deshalb kann man die Reihenglieder einer Fourier-Reihe auch in folgender Form darstellen:

$$a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx) = A_n \cdot \sin(nx + \varphi_n)$$

Die Amplitude A_n und der Phasenwinkel φ_n können mithilfe eines Zeigerdiagramms ermittelt werden:



Da die Sinuskurve und die Cosinuskurve zueinander um $\frac{\pi}{2}$ phasenverschoben sind, ergibt sich:

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad \text{und} \quad \tan(\varphi_n) = \frac{a_n}{b_n}$$

Damit kann die Fourier-Reihe auch wie folgt angeschrieben werden ($x = \omega_0 t$):

Amplituden-Phasen-Form einer Fourier-Reihe

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos(n\omega_0 t) + b_n \cdot \sin(n\omega_0 t)) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \sin(n\omega_0 t + \varphi_n)$$

mit $A_0 = \frac{a_0}{2}$, $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ und $\tan(\varphi_n) = \frac{a_n}{b_n}$

Zur Analyse periodischer Funktionen werden die Amplituden betrachtet. Die grafische Darstellung der Amplituden A_n nennt man **Amplitudenspektrum**, jene der Phasenwinkel φ_n **Phasenspektrum**. Bei der Darstellung der Spektren wird auf der waagrechten Achse der Index n , die Kreisfrequenz $\omega = n \cdot \omega_0$ oder die Frequenz f aufgetragen, die zugehörigen Werte werden als Linien darüber eingetragen. Man spricht daher auch von einem **Linienpektrum**. Die „Zeitfunktion“ $f(t)$ kann damit als Funktion der Frequenzen dargestellt werden.

ZB

Amplitudenspektrum der Rechteckkurve von Seite 66.

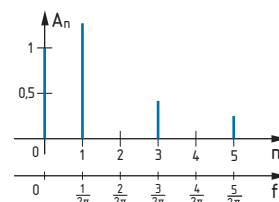
Da die Koeffizienten $b_n = 0$ sind, gilt: $A_n = |a_n|$

$$A_0 = \frac{2}{2} = 1, A_1 = a_1 = \frac{4}{\pi}, A_2 = 0, A_3 = \frac{4}{3\pi}, A_4 = 0, A_5 = \frac{4}{5\pi}, \dots$$

Da $\omega_0 = 1$ ist, ergibt sich das gleiche Bild, wenn der Index n oder die Kreisfrequenz ω auf der waagrechten Achse aufgetragen werden.

Für die Grundfrequenz gilt: $f_0 = \frac{1}{2\pi}$

Im Amplitudenspektrum kann man aus der Höhe der Amplituden den Einfluss der Oberschwingungen auf die Schwingung erkennen. Für $n \rightarrow \infty$ gehen die Amplituden gegen 0.

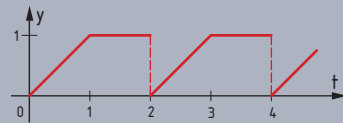


Ein Maß für den Anteil der Oberschwingungen an der gesamten Schwingung bzw. der Verzerrung ist der **Klirrfaktor** k .

Dieser wird mithilfe der Effektivwerte U_i (mit $i = 1, 2, 3, \dots$) definiert, er kann aber auch mithilfe der Amplituden berechnet werden.

$$k = \sqrt{\frac{U_2^2 + U_3^2 + U_4^2 + \dots}{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + U_4^2 + \dots}} = \sqrt{\frac{A_2^2 + A_3^2 + A_4^2 + \dots}{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + A_4^2 + \dots}}$$

3.58 Entwickle die gegebene periodische Funktion in eine Fourier-Reihe. Gib dazu die Amplituden und die Phasenwinkel für $n = 1, \dots, 4$ an. Stelle die Funktion, das Fourier-Polynom für $n = 4$ und das Amplitudenspektrum grafisch dar.



Lösung mit TI-Nspire:

©Funktion definieren

$f(t) := 0 \leq t \leq 1$ Fertig

$g(t) := 1 \mid 1 < t < 2$ Fertig

©Fourier-Koeffizienten

$a_0 = \frac{2}{2} \cdot \left(\int_0^1 f(t) dt + \int_1^2 g(t) dt \right) = \frac{3}{2}$

$\frac{2}{2} \cdot \left(\int_0^1 f(t) \cdot \cos(n \cdot \pi \cdot t) dt + \int_1^2 g(t) \cdot \cos(n \cdot \pi \cdot t) dt \right)$

$\frac{\sin(2 \cdot n \cdot \pi)}{n \cdot \pi} + \frac{\cos(n \cdot \pi)}{n^2 \cdot \pi^2} - \frac{1}{n^2 \cdot \pi^2}$

$\frac{\sin(2 \cdot n \cdot \pi)}{n \cdot \pi} + \frac{\cos(n \cdot \pi)}{n^2 \cdot \pi^2} - \frac{1}{n^2 \cdot \pi^2} \rightarrow a(n)$ Fertig

- Aufgrund des Rechenaufwands ist es besser, das Ergebnis des Integrals zu verwenden.

$\frac{2}{2} \cdot \left(\int_0^1 f(t) \cdot \sin(n \cdot \pi \cdot t) dt + \int_1^2 g(t) \cdot \sin(n \cdot \pi \cdot t) dt \right)$

$\frac{\sin(n \cdot \pi)}{n^2 \cdot \pi^2} - \frac{\cos(2 \cdot n \cdot \pi)}{n \cdot \pi}$ Fertig

$\frac{\sin(n \cdot \pi)}{n^2 \cdot \pi^2} - \frac{\cos(2 \cdot n \cdot \pi)}{n \cdot \pi} \rightarrow b(n)$ Fertig

©Amplituden und Phasenwinkel

$ga(n) := \sqrt{(a(n))^2 + (b(n))^2}$ Fertig

$ga(\{1, 2, 3, 4\})$

$\{0.37734, 0.159155, 0.108466, 0.079577\}$

$phi(n) := \tan^{-1}\left(\frac{a(n)}{b(n)}\right) + \pi$ Fertig

$phi(\{1, 2, 3, 4\})$

$\{3.7085, 3.14159, 3.3507, 3.14159\}$

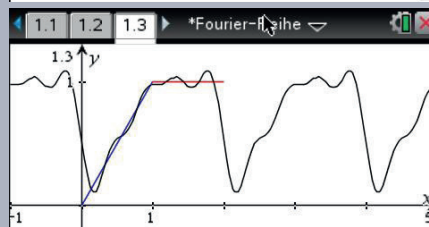
©Fourier-Reihe

$f(t, k) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^k (ga(n) \cdot \sin(n \cdot \pi \cdot t + phi(n)))$ Fertig

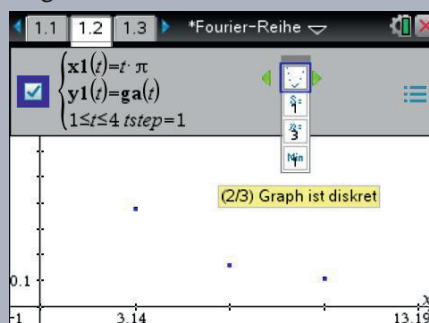
$f(t, 4)$

$\frac{-\sqrt{9 \cdot \pi^2 + 4} \cdot \sin\left(3 \cdot \pi \cdot t + \tan^{-1}\left(\frac{2}{3 \cdot \pi}\right)\right) \sqrt{\pi^2 + 4}}{9 \cdot \pi^2}$

$\frac{\sin(4 \cdot \pi \cdot t)}{4 \cdot \pi} - \frac{\sin(2 \cdot \pi \cdot t)}{2 \cdot \pi} + \frac{3}{4} \rightarrow \text{näherung}(t)$ Fertig

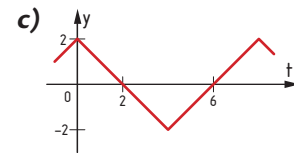
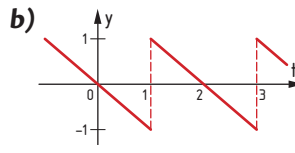
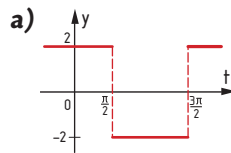


- Um auf der x-Achse Vielfache von π zu erhalten, wird der Funktionstyp **Parametrisch** verwendet. Anschließend müssen die **Attribute** geändert werden.

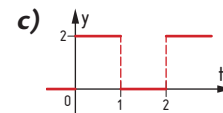
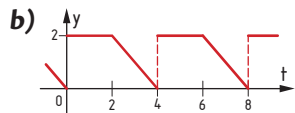
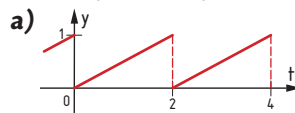


Funktionenreihen

3.59 Gib die Fourier-Reihe der dargestellten Funktion in Amplituden-Phasen-Form an. Stelle das Amplitudenspektrum grafisch dar. Berechne den Klirrfaktor.



3.60 Gib die Fourier-Reihe der dargestellten Funktion in Amplituden-Phasen-Form an. Stelle das Amplitudenspektrum grafisch dar.



3.4.4 Komplexe Form der Fourier-Reihe

Die in der Fourier-Reihe auftretenden Funktionen $\cos(n\omega_0 t)$ bzw. $\sin(n\omega_0 t)$ können durch Anwenden der Euler'schen Formel $e^{j \cdot \varphi} = \cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi)$ auch in komplexer Form angegeben werden.

Es gilt (siehe Aufgabe 3.64): $\cos(\varphi) = \frac{e^{j \cdot \varphi} + e^{-j \cdot \varphi}}{2}$ bzw. $\sin(\varphi) = \frac{e^{j \cdot \varphi} - e^{-j \cdot \varphi}}{2j}$ und damit:

$$\cos(n\omega_0 t) = \frac{e^{j \cdot n\omega_0 t} + e^{-j \cdot n\omega_0 t}}{2} \quad \text{bzw.} \quad \sin(n\omega_0 t) = \frac{e^{j \cdot n\omega_0 t} - e^{-j \cdot n\omega_0 t}}{2j} = -j \cdot \frac{e^{j \cdot n\omega_0 t} - e^{-j \cdot n\omega_0 t}}{2}$$

Setzt man dies in die Formel für die Fourier-Reihe ein, so erhält man:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos(n\omega_0 t) + b_n \cdot \sin(n\omega_0 t)) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cdot \frac{e^{j \cdot n\omega_0 t} + e^{-j \cdot n\omega_0 t}}{2} - j \cdot b_n \cdot \frac{e^{j \cdot n\omega_0 t} - e^{-j \cdot n\omega_0 t}}{2} \right)$$

Für jeweils ein Glied der Summe ergibt sich durch Vereinfachen:

$$a_n \cdot \frac{e^{j \cdot n\omega_0 t} + e^{-j \cdot n\omega_0 t}}{2} - j \cdot b_n \cdot \frac{e^{j \cdot n\omega_0 t} - e^{-j \cdot n\omega_0 t}}{2} = e^{j \cdot n\omega_0 t} \cdot \underbrace{\frac{1}{2} (a_n - j \cdot b_n)}_{c_n} + e^{-j \cdot n\omega_0 t} \cdot \underbrace{\frac{1}{2} (a_n + j \cdot b_n)}_{c_{-n}}$$

Durch die Festlegung der neuen Koeffizienten c_n ergibt sich eine Summation, die nun auch für negative Werte von n erfolgt.

Für $n = 0$ erhält man: $\frac{1}{2} (a_0 - j \cdot b_0) + \frac{1}{2} (a_0 + j \cdot b_0) = a_0$, daher ist $c_0 = \frac{a_0}{2}$.

Mit diesen Zusammenhängen kann die Fourier-Reihe wie folgt dargestellt werden:

Komplexe Form der Fourier-Reihe

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{j \cdot n\omega_0 t} \quad \text{mit} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \quad c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_n = \frac{1}{2} (a_n - j \cdot b_n), \quad c_{-n} = \frac{1}{2} (a_n + j \cdot b_n)$$



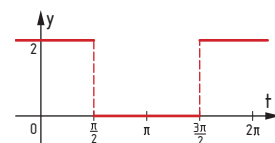
Auf Seite 66 wurden bereits die reellen Fourier-Koeffizienten der dargestellten Rechteckkurve ermittelt.

$$b_n = 0, \quad a_0 = 2, \quad a_1 = \frac{4}{\pi}, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = -\frac{4}{3\pi}, \quad a_4 = 0$$

Damit ergibt sich für die komplexen Fourier-Koeffizienten:

$$c_0 = 1, \quad c_1 = \frac{2}{\pi}, \quad c_3 = -\frac{2}{3\pi}, \quad \dots \quad c_{-1} = \frac{2}{\pi}, \quad c_{-3} = -\frac{2}{3\pi}, \quad \dots$$

Für die Reihe erhält man: $f(t) = \dots - \frac{2}{3\pi} e^{-j \cdot 3t} + \frac{2}{\pi} e^{-j \cdot t} + 1 + \frac{2}{\pi} e^{j \cdot t} - \frac{2}{3\pi} e^{j \cdot 3t} + \dots$



Um die komplexen Fourier-Koeffizienten direkt zu ermitteln, geht man von deren Definition aus und setzt die Zusammenhänge zwischen Exponential- und Winkelfunktionen ein:

$$c_n = \frac{1}{2} \cdot (a_n - j \cdot b_n) = \frac{1}{T} \cdot \left(\int_0^T f(t) \cdot \frac{e^{j \cdot n \omega_0 t} + e^{-j \cdot n \omega_0 t}}{2} dt - j \cdot \int_0^T f(t) \cdot \frac{e^{j \cdot n \omega_0 t} - e^{-j \cdot n \omega_0 t}}{2j} dt \right) = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T f(t) \cdot e^{-j \cdot n \omega_0 t} dt$$

Geht man analog für c_{-n} vor, so erkennt man, dass die Formel auch für negative Indizes gilt.

Komplexe Fourier-Koeffizienten: $c_n = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T f(t) \cdot e^{-j \cdot n \omega_0 t} dt \quad \text{mit } n \in \mathbb{Z}$

ZB $f(t) = \begin{cases} 2 & \text{für } -\frac{\pi}{2} \leq t < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{für } \frac{\pi}{2} \leq t < \frac{3\pi}{2} \end{cases} \quad T = 2\pi, \omega_0 = 1 \quad n = 0: c_0 = \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2 dt = 1$

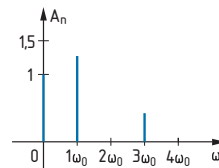
$$c_n = \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t) \cdot e^{-j \cdot n \omega_0 t} dt = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2 \cdot e^{-j \cdot n t} dt = \frac{2}{n \cdot \pi} \cdot \frac{1}{2j} \cdot (e^{j \cdot n \frac{\pi}{2}} - e^{-j \cdot n \frac{\pi}{2}})$$

Man berechnet die ersten vier Fourier-Koeffizienten (vergleiche Seite 72).

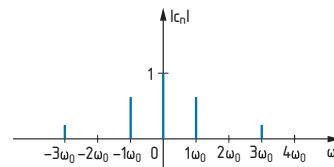
$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{j \cdot \pi} (e^{j \cdot \frac{\pi}{2}} - e^{-j \cdot \frac{\pi}{2}}) = \frac{1}{j \cdot \pi} (j - (-j)) = \frac{2}{\pi} & c_3 &= \frac{1}{j \cdot 3\pi} (e^{j \cdot \frac{3\pi}{2}} - e^{-j \cdot \frac{3\pi}{2}}) = \frac{1}{j \cdot 3\pi} (-j - j) = -\frac{2}{3\pi} \\ c_2 &= \frac{1}{j \cdot 2\pi} (e^{j \cdot \pi} - e^{-j \cdot \pi}) = \frac{1}{j \cdot 2\pi} (-1 + 1) = 0 & c_4 &= \frac{1}{j \cdot 4\pi} (e^{j \cdot 2\pi} - e^{-j \cdot 2\pi}) = \frac{1}{j \cdot 4\pi} (1 - 1) = 0 \end{aligned}$$

Setzt man für n negative Werte ein, erhält man dieselben Ergebnisse.

Auch bei komplexer Darstellung der Fourier-Reihe kann ein Amplitudenspektrum angegeben werden. Dabei werden die Beträge der komplexen Fourier-Koeffizienten aufgetragen. Für die einzelnen Werte gilt: $c_0 = A_0$ und $|c_n| = \frac{1}{2} \cdot A_n$ und $|c_n| = |c_{-n}|$



Aufgrund der Berechnung der komplexen Fourier-Koeffizienten aus den reellen Fourier-Koeffizienten ergibt sich, dass für gerade Funktionen ($b_n = 0$) die Koeffizienten c_n reell sind und für ungerade Funktionen ($a_n = 0$) die Fourier-Koeffizienten c_n rein imaginär sind.



Mithilfe folgender Formeln erhält man die reellen Fourier-Koeffizienten aus den komplexen Fourier-Koeffizienten: $a_0 = 2c_0$, $a_n = c_n + c_{-n}$, $b_n = j \cdot (c_n - c_{-n})$

3.61 Verwende Aufgabe 3.53 c) und berechne die komplexen Fourier-Koeffizienten aus den reellen Koeffizienten a_0 , a_n und b_n .

● **B** ● ●

3.62 1) Berechne für die Funktion aus Aufgabe 3.53 a) die komplexen Fourier-Koeffizienten direkt und gib die komplexe Fourier-Reihe an.

● **B** ● ●

2) Stelle das Amplitudenspektrum grafisch dar.

3) Berechne die reellen Fourier-Koeffizienten aus den komplexen.

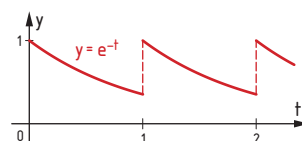
3.63 1) Berechne die komplexen Fourier-Koeffizienten der dargestellten Kurve direkt.

● **B** ● ●

2) Stelle das Amplitudenspektrum grafisch dar.

3.64 Zeige, dass gilt: $\cos(\varphi) = \frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2}$ und $\sin(\varphi) = \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{2j}$

● **B** ● ● **D**



Zusammenfassung

Die Glieder jeder konvergenten unendlichen Reihe bilden eine **Nullfolge**.

Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen

Eine alternierende Reihe $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$ ist konvergent, wenn die Folge $\langle a_1, a_2, a_3, a_4, \dots \rangle$ eine monoton fallende Nullfolge bildet.

Majorantenkriterium

Für zwei unendliche Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ mit $|a_n| \leq b_n$ für fast alle Glieder gilt:

Aus der Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ folgt die (absolute) Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Die Divergenz einer Reihe kann mithilfe einer divergenten **Minorante** gezeigt werden.

Quotientenkriterium

$$g = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

Ist $g < 1$, so konvergiert die Reihe. Ist $g > 1$, so divergiert die Reihe.

Ist $g = 1$, so ist eine Entscheidung über Konvergenz oder Divergenz nicht möglich.

Wurzelkriterium

$$g = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

Potenzreihe: $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot x^n = c_0 + c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^2 + c_3 \cdot x^3 + \dots$

Konvergenzradius r einer Potenzreihe: $r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$

Taylor-Reihe: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \dots$

MacLaurin-Reihe: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} \cdot x^3 + \dots$

Fourier-Reihe

Ist f eine T -periodische Funktion, so lässt sich f in eine Reihe entwickeln.

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos(n\omega_0 t) + b_n \cdot \sin(n\omega_0 t)) \quad \text{mit } \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Fourier-Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$

$$a_0 = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T f(t) dt, \quad a_n = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T f(t) \cdot \cos(n\omega_0 t) dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T f(t) \cdot \sin(n\omega_0 t) dt$$

Bei geraden Funktionen sind die Koeffizienten der Sinusanteile $b_n = 0$, bei ungeraden Funktionen sind die Koeffizienten der Cosinusanteile $a_n = 0$.

Amplituden-Phasen-Form

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \sin(n\omega_0 t + \varphi_n) \quad \text{mit } A_0 = \frac{a_0}{2}, \quad A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad \text{und } \tan(\varphi_n) = \frac{a_n}{b_n}$$

Komplexe Form der Fourier-Reihe

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{j \cdot n\omega_0 t} \quad \text{mit } \omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \quad c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_n = \frac{1}{2} (a_n - j \cdot b_n), \quad c_{-n} = \frac{1}{2} (a_n + j \cdot b_n)$$

Komplexe Fourier-Koeffizienten: $c_n = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T f(t) \cdot e^{-j \cdot n\omega_0 t} dt$

Weitere Aufgaben

- 3.65** David Harold **Bailey** (*1948), Peter **Borwein** (*1953) und Simon **Plouffe** (*1956) entdeckten 1996 die so genannte BBP-Formel zur Berechnung von π .

● **B** ● **D**

Es gilt:
$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n} \cdot \left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6} \right)$$

- 1) Berechne π näherungsweise für $n = 2$ und für $n = 20$.
- 2) Berechne den absoluten und relativen Fehler der beiden Näherungen verglichen mit der Näherung für π , die dein Taschenrechner angibt.
- 3) Recherchiere nach weiteren BBP-Reihen zur Berechnung von π .

- 3.66** 1) Bestimme die weiteren Glieder der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{16} + \dots$.
- 2) Begründe, warum man die Konvergenz dieser Reihe nicht mit dem Quotientenkriterium zeigen kann.

● **B** ● **D**

Potenzreihen

- 3.67** 1) Berechne den Wert von $\ln\left(\frac{8}{5}\right)$ mithilfe der Taylor-Reihe für $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$. Verwende das Taylor-Polynom 5. Grads.
- 2) Berechne den absoluten und den relativen Fehler dieser Näherungen bezogen auf die Näherung, die dein Taschenrechner angibt.

● **B** ● ●

- 3.68** 1) Entwickle die Funktion $f(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$ in eine Taylor-Reihe.
- 2) Stelle die Funktion und die ersten drei Taylor-Polynome grafisch dar.
- a) $f(x) = \sin(\pi - x)$ b) $f(x) = \frac{1}{1+2x}$ c) $f(x) = \cosh(x)$

● **B** ● ●

- 3.69** 1) Gib die ersten drei Glieder der Taylor-Reihe an der Stelle x_0 an.
- 2) Stelle die Funktion und die ersten drei Taylor-Polynome grafisch dar.
- a) $f(x) = \cos^2(x)$; $x_0 = \pi$ b) $f(x) = 2x^2 + 5$; $x_0 = -1$ c) $f(x) = e^x \cdot \sin(x)$; $x_0 = 0,5$

● **B** ● ●

- 3.70** Begründe mithilfe zweier Taylor-Reihen die Gültigkeit der folgenden Näherung für kleine Werte von $|x|$: $\sin(x) \approx x \cdot \sqrt[3]{\cos(x)}$

● **B** ● **D**

- 3.71** 1) Berechne den Konvergenzradius r der Reihe.
- 2) Weise die Konvergenz bzw. Divergenz in den Endpunkten des Konvergenzintervalls nach.

● **B** ● **D**

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$, Konvergenz für $x = -r$ und für $x = r$

Hinweis: Zeige mittels Partialbruchzerlegung, dass $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (n+1)}$ konvergiert.

Verwende diese Reihe als konvergente Majorante.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, Konvergenz für $x = -r$ und Divergenz für $x = r$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n}$, Divergenz für $x = -r$ und Konvergenz für $x = r$

d) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, Divergenz für $x = -r$ und für $x = r$

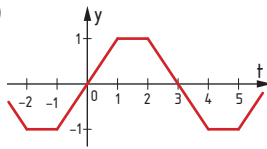
Funktionenreihen

Fourier-Reihen

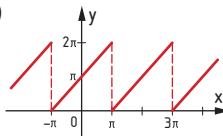
●●●C D

3.72 Gib den Gleichanteil $\frac{a_0}{2}$ an, ohne das Integral zu berechnen. Begründe dein Ergebnis.

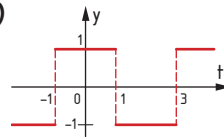
a)



b)



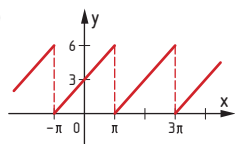
c)



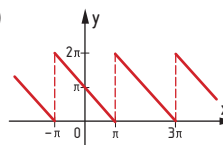
●●●D

3.73 Erkläre, welche der gegebenen periodischen Funktionen das gleiche Amplitudenspektrum – bis auf A_0 – haben. Begründe, welche Vereinfachungen sich daher beim Berechnen der Fourier-Reihen ergeben.

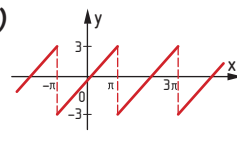
a) 1)



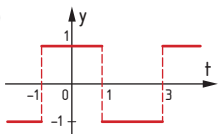
2)



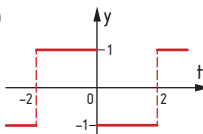
3)



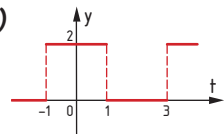
b) 1)



2)



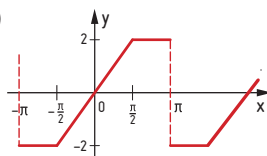
3)



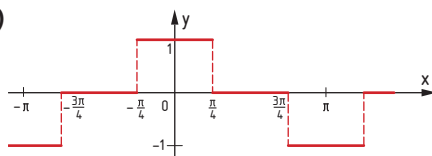
A B ●● D

3.74 1) Begründe, ob es sich bei der dargestellten Funktion um eine gerade oder eine ungerade Funktion handelt. Welche Vereinfachungen können daher getroffen werden?
2) Entwickle die dargestellte Funktion in eine Fourier-Reihe. Gib dazu die ersten vier Fourier-Koeffizienten an.

a)



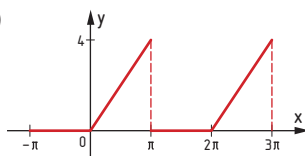
b)



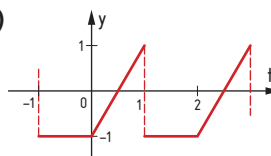
A B ●●●

3.75 1) Berechne die Fourier-Koeffizienten a_n und b_n der dargestellten Funktion.
2) Gib die Amplituden A_n und die Phasen φ_n an.
3) Gib die Fourier-Reihe mithilfe der Fourier-Koeffizienten und in der Amplituden-Phasen-Form an.
4) Stelle die Fourier-Reihe für eine Näherung bis $n = 5$ sowie das Amplitudenspektrum grafisch dar.

a)



b)



● B ●●●

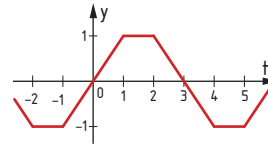
3.76 Berechne die komplexen Fourier-Koeffizienten der Funktion $f(t) = t^2$, für $-\pi \leq t < \pi$, wenn diese periodisch fortgesetzt wird. Stelle das Amplitudenspektrum grafisch dar.

Aufgaben in englischer Sprache



even function	gerade Funktion	power series	Potenzreihe
to expand	erweitern, entwickeln	ratio test	Quotientenkriterium
Fourier series	Fourier-Reihe	remainder	Restglied
odd function	ungerade Funktion	Taylor polynomial	Taylor-Polynom
periodic	periodisch	Taylor series	Taylor-Reihe

- 3.77** 1) Expand $f(x) = \frac{x}{1-x}$ about $x_0 = 0$ to get linear, quadratic and cubic approximations.
 2) Estimate the remainder if $f(x)$ is approximated by this cubic polynomial for x between 0 and 0.5.
- 3.78** Find a 5th degree polynomial approximation for e^{-2x} by expanding the function about 0.
- 3.79** Find the Taylor series of $f(x) = x^2 \cdot e^{-3x}$ about $x_0 = -1$.
- 3.80** Find the Fourier series of the 2π -periodic function $f(x) = 2x$ for $x \in [0; 2\pi]$.
- 3.81** 1) Explain if the given function is odd or even.
 2) Determine the period of the function.
 3) Find the Fourier series of the given function.



Wissens-Check

		gelöst
1	Gib jeweils an, ob die Reihe konvergent bzw. divergent ist. A) $\sum_{n=1}^{\infty} n$ B) $\sum_{n=1}^{\infty} (0,2)^n$ C) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$	
2	Erkläre, mit welchem Kriterium und unter welchen Voraussetzungen über die Konvergenz von alternierenden Reihen entschieden werden kann.	
3	1) Erkläre, ob es sich um eine gerade oder ungerade Funktion handelt. 2) Gib an, welche Fourier-Koeffizienten daher gleich null sind. A) B)	
4	Ich kann erklären, was eine Amplituden-Phasen-Form ist.	
5	Begründe, ob die beiden gegebenen periodischen Funktionen das gleiche Amplitudenspektrum – bis auf A_0 – haben.	

Lösung:
 1) A ist divergent, B ist konvergent, C ist divergent.
 2) Leibniz-Kriterium: die Folge muss eine monoton fallende Nullfolge sein.
 3) A) 1) gerade, 2) $b_n = 0$; B) 1) ungerade, 2) $a_n = 0$
 4) siehe Seite 70
 5) Ja, sie haben das gleiche Amplitudenspektrum, da die Funktion in y-Richtung verschoben wurde.