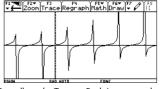


Der Technologieeinsatz im Mathematikunterricht des 21. Jahrhunderts erleichtert viele Berechnungen, die bis vor wenigen Jahren noch unter großem Zeitaufwand händisch durchgeführt werden mussten. Heute gibt es viele Möglichkeiten, Funktionen grafisch darzustellen. Die grafische Darstellung verleitet zu der Annahme, dass man den Verlauf und die Eigenschaften von Funktionen anhand des Graphen vollständig ablesen kann. Das ist jedoch nur bis zu einem



Darstellung der Tangens-Funktion, ausgegeben von einer Mathematik-Software

gewissen Grad richtig, da vor allem an "kritischen" Stellen einer Funktion die grafische Umsetzung oft mangelhaft ist. Daher können wichtige Eigenschaften nur durch präzise mathematische Untersuchungen erfasst werden.

Zwei in diesem Zusammenhang wichtige Begriffe, nämlich der **Grenzwert** und die **Stetigkeit** von Funktionen, werden in diesem Abschnitt nun besprochen.

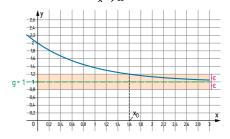
2.1 Grenzwert einer Funktion für $x \rightarrow \pm \infty$



- 2.1 Ein Getränk wird mit einer Temperatur von 7 °C aus dem Kühlschrank genommen und in einen Raum mit einer konstanten Temperatur von 25 °C gestellt.
 - 1) Welche Temperatur wird deiner Meinung nach das Getränk nach sehr langer Zeit haben, wenn es niemand trinkt?
 - **2)** Nach dem Newton'schen Abkühlungsgesetz gilt für die Temperatur ϑ in °C des Getränks: $\vartheta(t) = 25 18 \cdot e^{-0.8 \cdot t}$ t ... Zeit in Stunden Versuche, eine mathematische Begründung zu geben, warum die Funktionswerte die Temperatur von 25 °C nicht übersteigen.

Wir haben in Band 2 bereits Funktionen kennengelernt, deren langfristiges Verhalten intuitiv erkennbar war. Um dieses Verhalten auch mathematisch korrekt beschreiben zu können, benötigt man den Begriff des **Grenzwerts einer Funktion** für $x \to \infty$, also $\lim_{x \to \infty} f(x)$.

Stellt man zum Beispiel die Funktion $f(x) = 1 + e^{-x}$ grafisch dar, so kann man vermuten, dass sich die Funktionswerte für $x \to \infty$ dem Wert 1 nähern. Um dies mathematisch zu begründen, kann man wie beim Grenzwert einer Folge auch den Grenzwert einer Funktion mithilfe der ϵ -Umgebung beschreiben. Zeichnet man symmetrisch um den vermuteten Grenzwert g = 1 einen Streifen der Breite 2ϵ ,



so kann man eine Stelle x_0 angeben, ab der alle Funktionswerte in diesem Streifen liegen. Es gilt also: $\lim_{x\to\infty} (1+e^{-x}) = 1$

Das Verhalten einer Funktion kann auch für $x \to -\infty$ untersucht werden. Der Ausdruck $x \to \pm \infty$ bedeutet, dass beide Grenzwerte gebildet werden.

Der **Grenzwert g einer Funktion** f(x) für $x \to +\infty$ existiert, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ eine Stelle x_0 gibt, sodass für alle $x > x_0$ stets $|f(x) - g| < \epsilon$ gilt. Man schreibt: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = g$

Ist $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \pm \infty$, so spricht man von einem **uneigentlichen Grenzwert**.

Der Grenzwert für $x \to -\infty$ ist analog definiert.

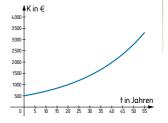
Grenzwerte von Exponentialfunktionen

In Band 2 wurden bereits verschiedene, meist zeitabhängige Wachstums- und Zerfallsprozesse mithilfe von Exponentialfunktionen beschrieben.

Wird ein Kapital K₀ = 500,00 € zu einem Zinssatz von 3,5 % p. a. verzinst, ohne dass weitere Kontobewegungen stattfinden, so wächst das Kapital ständig an. Es handelt sich daher um exponentielles Wachstum. Es gilt:

$$K(t) = 500 \cdot 1,035^{t}$$

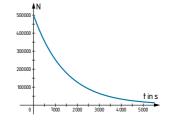
 $\lim_{t \to \infty} (500 \cdot 1,035^{t}) = \infty$



 Der radioaktive Zerfall ist gekennzeichnet durch eine ständige Abnahme der Anzahl der Kerne eines Isotops. Die Anzahl der Kerne N wird immer kleiner, aber nie negativ. Sie nähert sich also dem Wert 0.

Zum Beispiel gilt für 500 000 Kerne eines Isotops mit der Halbwertszeit $T_{1/2} = 1\,000$ s:

Halbwertszeit
$$T_{1/2} = 1\,000 \text{ s}$$
:
 $N(t) = 500\,000 \cdot e^{\frac{-\ln(2)}{1\,000} \cdot t}$
 $\lim_{t \to \infty} \left(500\,000 \cdot e^{\frac{-\ln(2)}{1\,000} \cdot t} \right) = 0$, da $\lim_{t \to \infty} (e^{-t}) = 0$ gilt.

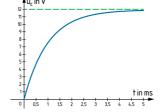


 Beschreibt eine Funktion einen Sättigungsvorgang, wie zum Beispiel das Aufladen eines Kondensators, nähern sich die Funktionswerte einem konstanten Endwert.

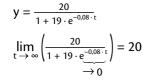
$$u_c(t) = 12 \cdot (1 - e^{-t})$$

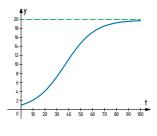
 $\lim_{t \to \infty} (12 \cdot (1 - e^{-t})) = 12$

 u_c nähert sich für t $\rightarrow \infty$ dem Wert 12 V.



 Bei logistischem Wachstum mit der Kapazitätsgrenze K nähern sich die Funktionswerte dieser Grenze.
 Zum Beispiel gilt für K = 20:





In den oben beschriebenen Fällen nähert sich der Funktionsgraph einer waagrechten **Asymptote**.

Allgemein versteht man unter einer Asymptote eine **Gerade**, der sich ein **Funktionsgraph nähert**. Anders formuliert kann man sagen, dass der "Abstand" zwischen dem Graphen der Funktion und der Asymptote immer geringer wird und gegen 0 geht.

Die **Berechnungen von Grenzwerten** liefern nun das mathematische "Rüstzeug", um anhand einer Zeichnung geäußerte Vermutungen präzise zu erfassen. Die mathematische Definition einer Asymptote lautet:

Eine Gerade a = a(x) ist eine **Asymptote** der Funktion y = f(x), wenn gilt:

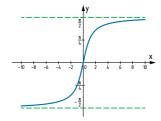
$$\lim_{x \to -\infty} |f(x) - a(x)| = 0 \quad \text{bzw. } \lim_{x \to +\infty} |f(x) - a(x)| = 0$$

Viele Funktionen haben für $x \to +\infty$ nicht den gleichen Grenzwert wie für $x \to -\infty$.

ZB: y = arctan(x)

Anhand des Einheitskreises kann man überprüfen, dass gilt:

$$\lim_{x \to -\infty} (\arctan(x)) = -\frac{\pi}{2} \text{ und } \lim_{x \to +\infty} (\arctan(x)) = +\frac{\pi}{2}$$



Grenzwerte von gebrochen rationalen Funktionen

Bildet man den Quotienten zweier Polynomfunktionen g(x) und h(x), erhält man eine **gebrochen rationale Funktion** $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$. Der Grenzwert von f(x) für $x \to \pm \infty$ hängt vom Grad der Polynome im Zähler und im Nenner ab (siehe Abschnitt 1.7.3).

 Der Grad des Zählerpolynoms ist kleiner als der Grad des Nennerpolynoms.



$$f(x) = \frac{2}{x^2 + 1}$$

Es gilt:
$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2}{x^2 + 1} \right) = 0$$

Die Funktionswerte nähern sich dem Grenzwert 0, der Graph nähert sich der Asymptote a: y = 0.

 Der Grad des Zählerpolynoms und der Grad des Nennerpolynoms sind gleich groß.



$$f(x) = \frac{2x^2}{x^2 + 1}$$

Es gilt:
$$\lim_{x \to \pm \infty} \left(\frac{2x^2}{x^2 + 1} \right) = 2$$

Die Gleichung der Asymptote lautet a: y = 2.





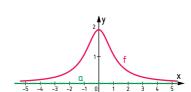
$$f(x) = \frac{x^3 + x + 2}{x^2 + 1}$$

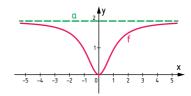
Es gilt:
$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^3 + x + 2}{x^2 + 1} \right) = +\infty \text{ und } \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x^3 + x + 2}{x^2 + 1} \right) = -\infty$$

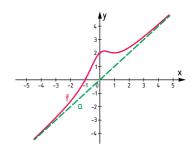
Die Gleichung der Asymptote erhält man mithilfe einer Polynomdivision:

$$(x^3 + x + 2) : (x^2 + 1) = x + \frac{2}{\underbrace{x^2 + 1}} \Rightarrow a: y = x$$

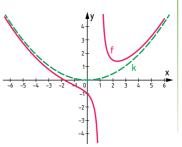
 $\to 0 \text{ für } x \to \pm \infty$







Wenn der Grad des Zählerpolynoms um mehr als 1 größer als der Grad des Nennerpolynoms ist, nähert sich der Funktionsgraph für $x \to \pm \infty$ einer nichtlinearen Kurve, der so genannten Grenzkurve. Die Definition der Asymptote gilt sinngemäß auch für die Grenzkurve, sie wird in der Literatur deshalb auch oft als Asymptote bezeichnet. Die Gleichung einer Grenzkurve k kann ebenfalls mithilfe einer Polynomdivision ermittelt werden.





$$y = \frac{x^3 - x^2 + 8}{8x - 8}$$

$$(x^3 - x^2 + 8) : (8x - 8) = \frac{1}{8} \cdot x^2 + \underbrace{\frac{1}{x - 1}}_{\rightarrow 0} \quad \text{für } x \rightarrow \pm \infty$$

Gleichung der Grenzkurve k: $y = \frac{1}{8} \cdot x^2$

• Die Grenzkurve ist eine Parabel.

Die Funktion $y = \frac{x^3 - x^2 + 8}{8x - 8}$ zeigt ein für viele gebrochen rationale Funktionen typisches Verhalten. Sie ist an einer Stelle unterbrochen, da die Division durch null nicht sinnvoll ist und daher die Nullstellen des Nennerpolynoms h(x) aus der Definitionsmenge D_f ausgenommen werden müssen. Das Verhalten von gebrochen rationalen Funktion an solchen Stellen wird in Abschnitt 2.3 genauer besprochen.

Auch für Funktionen gelten die aus Abschnitt 1.7.3 bekannten Grenzwertsätze.

Grenzwertsätze

Existieren die Grenzwerte $\lim_{x \to \pm \infty} f(x)$ und $\lim_{x \to \pm \infty} g(x)$, so gilt:

$$\bullet \lim_{x \to +\infty} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to +\infty} f(x) + \lim_{x \to +\infty} g(x)$$

$$\bullet \lim_{x \to \pm \infty} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to \pm \infty} f(x) - \lim_{x \to \pm \infty} g(x)$$

$$\bullet \lim_{x \to +\infty} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to +\infty} f(x) \cdot \lim_{x \to +\infty} g(x)$$

$$\begin{split} & \bullet \lim_{x \to \pm \infty} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to \pm \infty} f(x) + \lim_{x \to \pm \infty} g(x) \\ & \bullet \lim_{x \to \pm \infty} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to \pm \infty} f(x) \cdot \lim_{x \to \pm \infty} g(x) \\ & \bullet \lim_{x \to \pm \infty} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to \pm \infty} f(x) \cdot \lim_{x \to \pm \infty} g(x) \\ & \bullet \lim_{x \to \pm \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to \pm \infty} f(x)}{\lim_{x \to \pm \infty} g(x)} \quad \text{mit } \lim_{x \to \pm \infty} g(x) \neq 0 \end{split}$$

2.2 Ordne den Funktionen jeweils die richtige Behauptung A, B oder C über deren Verhalten für $x \rightarrow \infty$ zu. Begründe deine Entscheidung.

57

1)
$$y = \frac{4x^2 + x}{2x^2 - 10}$$
 2) $y = \sin(x)$

2)
$$y = \sin(x)$$

3)
$$y = 3x - 1$$
 4) $y = \frac{10}{0^{-0.05 \cdot x}}$

A: Der Grenzwert existiert.

B: Die Funktion hat einen uneigentlichen Grenzwert.

C: Der Grenzwert existiert nicht.

Lösung:

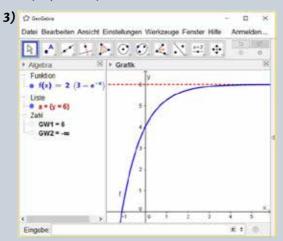
- 1) A; der Grenzwert existiert, da der Grad des Zähler- und des Nennerpolynoms gleich
- 2) C; es existiert kein Grenzwert, da die Sinusfunktion eine periodische Funktion ist.
- **3)** B; die Funktion hat einen uneigentlichen Grenzwert, da $\lim (3x 1) = \infty$ gilt.
- **4)** B; die Funktion hat einen uneigentlichen Grenzwert, da $\lim_{x \to \infty} (e^{-0.05 \cdot x}) = 0$ und damit $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{10}{e^{-0.05 \cdot x}} \right) = \infty \text{ gilt.}$

1) Bestimme die Grenzwerte der Funktion f mit $f(x) = 2 \cdot (3 - e^{-x})$ für $x \to \pm \infty$ anhand der 2.3 Funktionsgleichung.

- 2) Gib die Gleichung der Asymptote an.
- 3) Überprüfe die Ergebnisse mittels Technologieeinsatz.

Lösung mit GeoGebra:

- 1) $\lim_{x \to \infty} (2 \cdot (3 e^{-x})) = 6$; für $x \to \infty$ geht e^{-x} gegen 0. $\lim_{x \to \infty} (2 \cdot (3 - e^{-x})) = -\infty; \text{ für } x \to -\infty \text{ geht } e^{-x} \text{ gegen } +\infty.$
- **2)** Asymptote a: y = 6

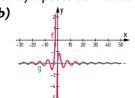


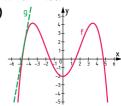
- Die Funktion f wird definiert.
- Die Grenzwerte werden mithilfe des Befehls **Grenzwert** ermittelt: GW1=Grenzwert[f.∞] $GW2=Grenzwert[f,-\infty]$

Das ∞-Zeichen befindet sich in der Palette 🔟 in der Eingabezeile.

• Die Asymptote erhält man mithilfe des Befehls Asymptote: a=Asymptote[f]

Begründe, ob die Gerade g eine Asymptote der Funktion f für $x \to \infty$ ist.





A

Gib die Gleichung einer Funktion an, die folgende Asymptote hat.

a)
$$x = 0$$

b)
$$y = 0$$

c)
$$x = 5$$

(TE A D

2.6 Gib die Gleichungen der Asymptoten an und überprüfe das Ergebnis jeweils durch eine geeignete Zeichnung.

a)
$$f(x) = \frac{4}{2-e^{-3}}$$

b)
$$f(x) = (1 - e^{-x})^2$$

(c)
$$f(x) = 3 - e^{-x^2}$$

a)
$$f(x) = \frac{4}{2 - e^{-x}}$$
 b) $f(x) = (1 - e^{-x})^2$ **c)** $f(x) = 3 - e^{-x^2}$ **d)** $f(x) = \tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

2.7 Ordne dem Grenzwert jeweils die passende Funktion zu.

1	$\lim_{x\to\infty} (f(x)) = 2$	

 $\lim_{x \to -\infty} (f(x)) = 0$

A
$$f(x) = 2 \cdot e^{x}$$

B $f(x) = 2 \cdot (1 + e^{x})$

C $f(x) = 2 \cdot e^{-x}$

 $f(x) = 2 \cdot (1 + e^{-x})$

Erkläre, welchem Grenzwert sich die Funktion B mit B(x) = $\frac{3}{2+o^{-x}}$ für x $\rightarrow \infty$ nähert. 2.8



Um Mitternacht wird ein Leichnam gefunden. Die Umgebungstemperatur beträgt 2.9 konstant 17,4 °C. Die Temperatur ϑ des Leichnams beträgt zwei Stunden später noch 25,2 °C. Der Temperaturverlauf kann durch folgende Funktion beschrieben werden:

- $\vartheta(t) = \vartheta_{IJ} + (\vartheta_0 \vartheta_{IJ}) \cdot e^{-k \cdot t}$
- t ... Zeit nach dem Tod in Stunden, $\vartheta(t)$... Temperatur zur Zeit t in °C,

 $\vartheta_{\rm II}$... Umgebungstemperatur in °C,

 θ_0 = 27 °C ... Körpertemperatur um Mitternacht

- 1) Berechne den Faktor k mithilfe der gegebenen Temperaturwerte.
- 2) Bestimme den Todeszeitpunkt.
- 3) Ermittle, welche Temperatur der Leichnam nach sehr langer Zeit hätte.
- 2.10 Die Oberfläche einer oben offenen Schachtel mit quadratischer Grundfläche mit dem Volumen V = 1 Liter lässt sich durch folgende Funktion beschreiben:



 $A(\ell) = \ell^2 + \frac{4}{\ell}$

- ℓ ... Kantenlänge in dm, A(ℓ) ... Oberfläche bei der Kantenlänge ℓ in dm 2
- 1) Stelle die Funktion grafisch dar.
- **2)** Gib eine sinnvolle Definitionsmenge für die Kantenlänge ℓ an.
- **3)** Beschreibe das Verhalten der Funktion, wenn ℓ gegen null geht.



- Die Spannung u_C (in Volt) eines Kondensators in Abhängigkeit von der Zeit t (in s) wird durch die Funktion $u_C(t) = U_0 \cdot \left(1 - e^{\frac{-t}{\tau}}\right)$ mit $\tau = R \cdot C$ beschrieben. An einem Kondensator mit dem Widerstand R = 3,9 k Ω und der Kapazität C = 390 μ F wird eine Spannung von $U_0 = 12 \text{ V}$ angelegt.
 - 1) Stelle die Funktion u_c für 0 s \leq t \leq 12 s grafisch dar. Zeichne die Asymptote ein.
 - 2) Argumentiere anhand der Funktionsgleichung, dass sich die Spannung des Kondensators asymptotisch dem Wert U₀ nähert.
- **2.12** Eine Software-Firma präsentiert ein neues Computerspiel, das per App auf ein Mobiltelefon geladen werden kann. Die Anzahl der Personen, die das neue Spiel auf ihr Mobiltelefon geladen haben, lässt sich durch die Funktion A beschreiben:





$$A(t) = \frac{4236}{1 + 5 \cdot e^{-0.14 \cdot t}}$$

- t ... Zeit in Wochen, A(t) ... Anzahl der Personen zur Zeit t, die das Spiel geladen haben
- 1) Stelle die Funktionsgleichung für die ersten 40 Wochen grafisch dar.
- 2) Argumentiere anhand der Grafik, dass es sich bei diesem Modell um ein logistisches Wachstum handelt.
- 3) Begründe anhand der Funktionsgleichung, welchem Wert sich die Anzahl der Personen nach langer Zeit nähert.



59

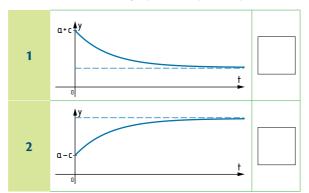
2.13 Das Bevölkerungswachstum einer Kleinstadt kann durch folgende Funktion B beschrieben werden:

$$B(t) = \frac{250t}{t^2 + 4} + 500 \text{ für } t \ge 0$$

- t ... Zeit in Jahren, B(t) ... Anzahl der Bevölkerung in 1 000 zur Zeit t
- 1) Berechne die Bevölkerungsanzahl zu Beginn der Aufzeichnungen.
- 2) Erkläre anhand der Funktionsgleichung, welchem Wert sich die Bevölkerungsanzahl nach sehr langer Zeit nähert.

••G•

2.14 Ordne den Funktionsgraphen die jeweils passende Funktionsgleichung zu.



A
$$y(t) = a - c \cdot e^{k \cdot t}$$
 $(k > 0)$

$$y(t) = a + c \cdot e^{k \cdot t} \quad (k > 0)$$

y(t) =
$$a + c \cdot e^{k \cdot t}$$
 (k < 0)

$$y(t) = a - c \cdot e^{k \cdot t} \quad (k < 0)$$

(F) • (B) (D)

2.15 Unter Berücksichtigung der herrschenden Wetterbedingungen wurde der Geschwindigkeitsverlauf v für einen Fallschirmsprung vor dem Öffnen des Schirms durch folgende Funktion berechnet:

$$v(t) = 20 \cdot \frac{e^{0.5} - e^{-0.5t}}{e^{0.5t} + e^{-0.5t}} \quad \text{t ... Zeit in Sekunden, } v(t) \text{ ... Geschwindigkeit zur Zeit t in } \frac{m}{s}$$

- 1) Stelle die Funktion grafisch dar.
- **2)** Welchem Grenzwert nähert sich die angegebene Geschwindigkeitsfunktion für $t \rightarrow \infty$? Ermittle den Wert mithilfe der Grafik und rechnerisch.
- 3) Erkläre, welche praktische Bedeutung der in 2) berechnete Grenzwert hat.

TE AB

2.16 Um eine Raumsonde mit der Masse m von der Erdoberfläche aus in eine bestimmte Höhe h (in m) zu befördern, muss Hebearbeit W(in J) der Form

W(h) =
$$G \cdot M \cdot m \cdot \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_0 + h}\right)$$
 verrichtet werden.

 $G \approx 6.67 \cdot 10^{-11} \, \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \dots$ Newton'sche Gravitationskonstante

$$M \approx 5.97 \cdot 10^{24} \text{ kg} \dots \text{Masse der Erde}$$

m ... Masse der Raumsonde

$$r_0 \approx 6.37 \cdot 10^6 \text{ m} \dots \text{ mittlerer Erdradius}$$



- 1) Berechne die Hebearbeit in Joule, um eine Raumsonde mit der Masse m \approx 825,50 kg aus dem Schwerefeld der Erde (ins Unendliche) zu bringen.
- 2) Berechne, welche minimale Anfangsgeschwindigkeit in kerneicht werden muss, um einen Körper aus dem Schwerefeld der Erde zu bringen.

Hinweis: Beschleunigungsarbeit W = $\frac{\text{m} \cdot \text{v}^2}{2}$

(F) (A) (B) (D) 2.17

Die Masse m ist ein Maß für die Trägheit eines Körpers. Nach der speziellen Relativitätstheorie wächst die Masse eines Körpers immer mehr an, je größer die Geschwindigkeit v wird, mit der er sich gleichförmig bewegt; er wird also träger. Diese Massenzunahme wird mithilfe der Funktion m beschrieben.

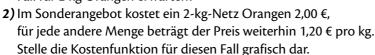
$$m(v) = k(v) \cdot m_0 \qquad \text{mit} \quad k(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad c \approx 3 \cdot 10^8 \, \frac{\text{m}}{\text{s}} \, \dots \, \text{Lichtgeschwindigkeit}$$

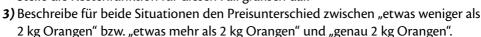
v ... Geschwindigkeit in $\frac{m}{s}$, m(v) ... Masse bei der Geschwindigkeit v in kg m₀ ... Ruhemasse in kg, k(v) ... Lorentzfaktor bei der Geschwindigkeit v

- 1) Stelle den Lorentzfaktor k als Funktion der Geschwindigkeit grafisch dar.
- 2) Zeige, dass die Masse eines Körpers unendlich groß wäre, wenn er sich mit Lichtgeschwindigkeit bewegen könnte.

2.2 Grenzwert und Stetigkeit

2.18 1) Orangen kosten 1,20 € pro Kilogramm. Stelle die zugehörige Kostenfunktion grafisch dar. Welchen Preis kann man in diesem Fall für 2 kg Orangen erwarten?



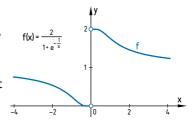


In vielen Fällen weisen Funktionen "Besonderheiten" auf, wie zum Beispiel die Funktion y = $\frac{1}{x}$ an der Stelle $x_0 = 0$. Um den Verlauf solcher Funktion mathematisch präzise zu erfassen, benötigen wir weitere Begriffe.

2.2.1 Grenzwert einer Funktion an der Stelle x₀

Um den Grenzwert einer Funktion an der Stelle x_0 bestimmen zu können, betrachtet man die Funktionswerte "links" und "rechts" nahe bei x_0 . Dabei ist es nicht wichtig, ob die Funktion an dieser Stelle überhaupt definiert ist bzw. welchen Funktionswert die Funktion an der Stelle x_0 hat.

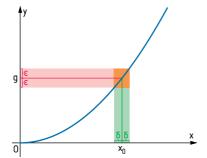
Zunächst betrachtet man in der Abbildung den "linken Ast" des Funktionsgraphen. Nähern sich die x-Werte der Stelle $x_0 = 0$, so nähern sich die Funktionswerte dem Wert 0. Beim "rechten Ast" nähern sich die Funktionswerte dem Wert 2, wenn sich die x-Werte von rechts der Stelle $x_0 = 0$ nähern. Die Funktion nähert sich also verschiedenen Werten, es gibt daher keinen Grenzwert (siehe Aufgabe 2.25).



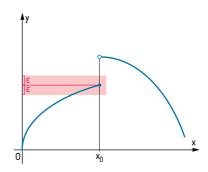
ABG

Um den Grenzwert definieren zu können, benötigt man noch einige Überlegungen.

Ist g der Grenzwert einer Funktion an der Stelle x₀, so kann man zu jedem
 8-Streifen (ε > 0, ε beliebig klein) einen
 Bereich (x₀ ± δ) auf der x-Achse finden, sodass für jedes x ≠ x₀ aus dem
 δ-Streifen der zugehörige
 Funktionswert im ε-Streifen liegt.



• Bei der abgebildeten Funktion kann zum eingezeichneten **&-Streifen kein geeigneter Bereich** auf der x-Achse angegeben werden. Für jeden noch so kleinen positiven Wert δ liegt $f(x_0 + \delta)$ **außerhalb des \epsilon-Streifens**. Es existiert **kein Grenzwert** an der Stelle x_0 .



Analysis

61

Die Funktion f(x) hat für $x \to x_0$ den **Grenzwert** $\lim_{x \to x_0} f(x) = g$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass für alle $x \ne x_0$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt: $|f(x) - g| < \varepsilon$

Man kann den Grenzwert einer Funktion an der Stelle x₀ auch mithilfe von Folgen definieren.

ZB: Der Grenzwert der Funktion $y=x^2$ soll an der Stelle $x_0=2$ untersucht werden. Man bildet sowohl eine Folge von x-Werten, die sich dem Wert x_0 "von links" nähert, als auch eine Folge, die sich "von rechts" nähert. Dafür eignen sich zum Beispiel die Folgen $\langle x_n^- \rangle = \langle 2-0,1^n \rangle$ ("von links") und $\langle x_n^+ \rangle = \langle 2+0,1^n \rangle$ ("von rechts"). Beide Folgen konvergieren gegen 2.

Berechnet man die Funktionswerte der Folgenglieder, so erkennt man, dass sich die Folge der Funktionswerte in beiden Fällen dem Wert 4 nähert.

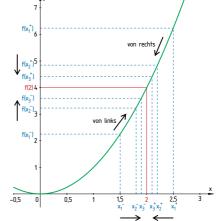
Um den Unterschied zwischen der Näherung von links und der von rechts auszudrücken, wird beim **linksseitigen Grenzwert g_L** ein hochgestelltes "–" und beim **rechtsseitigen Grenzwert g_R** ein hochgestelltes "+" bei x_0 verwendet.

Für den linksseitigen Grenzwert gilt daher

$$g_L = \lim_{n \to \infty} f(x_n^-) = \lim_{n \to \infty} (x_n^-)^2 = \lim_{x \to 2^-} (x^2) = 4$$

und für den rechtsseitigen Grenzwert

$$g_R = \lim_{n \to \infty} f(x_n^+) = \lim_{n \to \infty} (x_n^+)^2 = \lim_{x \to 2^+} (x^2) = 4.$$



Der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert stimmen überein. Man sagt: "4 ist der **Grenzwert der Funktion** f(x) an der Stelle 2."

 $g = \lim_{x \to x_0} f(x)$ nennt man den **Grenzwert der Funktion f(x) an der Stelle x₀**, wenn für

jede beliebige Folge von x-Werten, die gegen x_0 konvergiert, die zugehörige Folge der Funktionswerte gegen **denselben Wert g** $\in \mathbb{R}$ konvergiert.

Für $x \to x_0^-$ erhält man den linksseitigen Grenzwert: $g_L = \lim_{x \to x_-^-} f(x)$

Für $x \to x_0^+$ erhält man den rechtsseitigen Grenzwert: $g_R = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$

Gibt es einen linksseitigen und einen rechtsseitigen Grenzwert an der Stelle x_0 und gilt $g_L = g_R$, so ist $g_L = g_R$ der Grenzwert g der Funktion an der Stelle x_0 .



Technologieeinsatz: Grenzwert einer Funktion an der Stelle \mathbf{x}_0 GeoGebra



ZB:
$$f(x) = \frac{1}{x}, x_0 = 0$$

Zuerst wird die Funktion eingegeben.

Anschließend gibt man die Befehle für die Grenzwertberechnung ein:

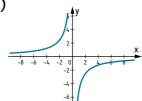
 $\textbf{LinksseitigerGrenzwert[f,0]} \dots a$

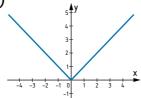
RechtsseitigerGrenzwert[f,0] ... b

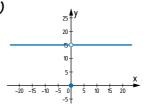
Begründe jeweils anhand der Zeichnung, ob der Grenzwert g an der Stelle $x_0 = 0$ existiert. Welchen Grenzwert vermutest du gegebenenfalls? Formuliere deine Überlegungen.



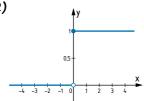
1)



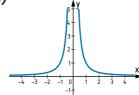


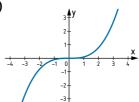


2)



4)





Überlege, ob es sich bei der gegebenen Folge $\langle x_n \rangle$ um eine links- oder rechtsseitige Näherung handelt und bestimme den Grenzwert der Funktion.



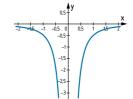
a)
$$f(x) = \frac{x^2}{2} - x$$
, $\langle x_n \rangle = \langle -1 - 0, 1^n \rangle$ **c)** $f(x) = (2 - x)^3$, $\langle x_n \rangle = \langle 2 + 0, 5^n \rangle$

c)
$$f(x) = (2 - x)^3$$
, $\langle x_n \rangle = \langle 2 + 0.5^n \rangle$

b)
$$f(x) = \sin(2x), \langle x_n \rangle = \langle \frac{\pi}{n} \rangle$$

d)
$$f(x) = \sqrt{3x-2}$$
, $\langle x_n \rangle = \langle 9-0,1^n \rangle$

"Hat die Funktion $f(x) = -\frac{0.5}{x^2}$ einen Grenzwert an der Stelle $x_0 = 0$?"



Nico stellt die Funktion grafisch dar und beantwortet diese Frage mit: "Ja, denn der linksseitige und der rechtsseitige

Grenzwert sind gleich." Beurteile diese Argumentation.



Stelle die Funktionen $y_1 = \frac{\sin(x)}{x^2}$ und $y_2 = \frac{\cos(x)}{x^2}$ grafisch dar. Vergleiche den Verlauf der Funktion y₁ mit dem Verlauf der Funktion y₂. Wie unterscheiden sich die Funktionen an der Stelle $x_0 = 0$ voneinander?

Aufgaben 2.23 - 2.24: Stelle die Funktion grafisch dar. Beschreibe jeweils den Verlauf des Funktionsgraphen für $x \rightarrow x_0$ mithilfe von Grenzwerten.

2.23 a)
$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}, x_0 = 1$$
 b) $f(x) = \frac{x^3 - 8}{x - 2}, x_0 = 2$

b)
$$f(x) = \frac{x^3 - 8}{x - 2}, x_0 = 2$$

c)
$$f(x) = \frac{x + \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}, x_0 = 0$$

2.24 a)
$$f(x) = \frac{\cos(x)}{x^2}$$
, $x_0 = 0$ b) $f(x) = \frac{1 - \cos(x)}{\sin(x)}$, $x_0 = 0$

b)
$$f(x) = \frac{1 - \cos(x)}{\sin(x)}$$
, $x_0 = 0$

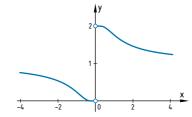
c)
$$f(x) = \frac{\sin(2x)}{x}, x_0 = 0$$

63

2.25 Zeige, dass für die Funktion $f(x) = \frac{2}{1 + c^{-1}}$ an der Stelle $x_0 = 0$ gilt:



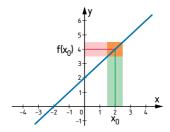
 $g_L = 0$ und $g_R = 2$

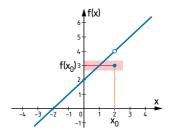


2.2.2 Stetigkeit

Die **Stetigkeit** ist eine der wichtigsten Eigenschaften von Funktionen. Viele mathematische Sätze und Aussagen über Funktionen gelten nur für stetige Funktionen. Die meisten Funktionen, mit denen wir bisher gearbeitet haben, sind **stetig**. Das bedeutet, dass sich bei einer **kleinen** Änderung der unabhängigen Variablen auch der zugehörige Funktionswert höchstens geringfügig ändert.

- Ist eine Funktion stetig an der Stelle x_0 , so kann man zu jedem ϵ -Streifen um $f(x_0)$ einen Bereich $(x_0 \pm \delta)$ auf der x-Achse angeben, sodass für alle x-Werte aus dem δ -Streifen, also auch für x_0 , der zugehörige Funktionswert im ϵ -Streifen liegt.
- Ist eine Funktion unstetig an der Stelle x₀, kann zum eingezeichneten ε-Streifen kein geeigneter Bereich auf der x-Achse angegeben werden. Für jeden noch so kleinen positiven Wert δ liegen nicht alle zugehörigen Funktionswerte im ε-Streifen.





Die Stetigkeit kann auch mithilfe von Grenzwerten erklärt werden:

$$f(x) = x + 2 \text{ für } x_0 = 2$$

Der linksseitige Grenzwert lautet:

$$g_L = \lim_{x \to 2^-} (x + 2) = 4$$

Der rechtsseitige Grenzwert lautet:

$$g_R = \lim_{x \to 2^+} (x + 2) = 4$$

$$g_L = g_R \Longrightarrow g = 4$$

Da der **Grenzwert** existiert und mit dem **Funktionswert** f(2) = 4 **übereinstimmt**, ist die Funktion an dieser Stelle **stetig**.

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{für } x \neq 2 \\ 3 & \text{für } x = 2 \end{cases}$$

Auch in diesem Fall gilt für $x_0 = 2$:

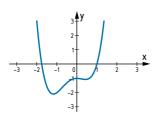
$$g_L = g_R = g = \lim_{x \to 2} (x + 2) = 4$$

Aber:
$$f(2) = 3 \neq 4$$

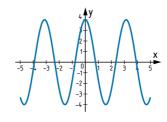
Der **Grenzwert** und der **Funktionswert** stimmen **nicht überein**. Die Funktion f ist an dieser Stelle **unstetig**.

Wenn eine **Funktion** an der Stelle x_0 einen **Grenzwert hat und** dieser **Grenzwert gleich dem Funktionswert** an dieser Stelle ist, so ist die Funktion **stetig an der Stelle** x_0 . Gilt diese Aussage für jede Stelle der Funktion, so spricht man von einer **stetigen Funktion**. Der Funktionsgraph kann in diesem Fall "in einem", also ohne den Stift abzusetzen, gezeichnet werden.

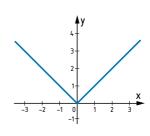
Zum Beispiel sind die folgenden Funktionen stetig:



$$y = x^4 + x^3 - x^2 - 1$$



 $y = 4 \cdot \cos(2x)$ **Analysis**



y = |x|

Es ist es auch möglich, dass der linksseitige und der rechtseitige Grenzwert an einer Stelle x_0 nicht übereinstimmen, die Funktion ist dann dort unstetig.

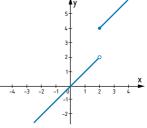


$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für } x < 2 \\ x + 2 & \text{für } x \ge 2 \end{cases}$$

Die Funktion ist an der Stelle $x_0 = 2$ definiert, die beiden Grenzwerte existieren, sie sind aber nicht gleich.

$$g_L = \lim_{x \to 2^-} (x) = 2$$
, aber $g_R = \lim_{x \to 2^+} (x + 2) = 4$

Die Funktion ist daher unstetig an der Stelle $x_0 = 2$.



Am Rand eines abgeschlossenen Intervalls ist eine Funktion dann stetig, wenn der entsprechende einseitige Grenzwert existiert und mit dem Funktionswert übereinstimmt.

Stetigkeit einer Funktion an der Stelle x₀

Eine Funktion f(x) ist **stetig** an einer Stelle x_0 , wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass für alle x mit $|x - x_0| < \delta$ gilt: $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$

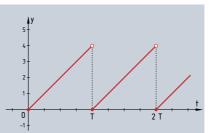
Eine weitere Definition lautet:

Eine Funktion f(x) ist **stetig** an einer Stelle x_0 , wenn der Grenzwert in x_0 existiert und mit dem Funktionswert an dieser Stelle übereinstimmt: $g = \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Andernfalls nennt man die Funktion unstetig an der Stelle x₀.

Ist eine Funktion an jeder Stelle eines beliebig gewählten Intervalls stetig, so spricht man von einer in diesem Intervall stetigen Funktion.

2.26 Die Grafik zeigt eine so genannte Kippschwingung oder Sägezahnfunktion. Mithilfe solcher Funktionen werden in der Signaltechnik spezielle periodische Vorgänge angegeben. Überlege, wo die Funktion im Intervall [0; 2T[stetig ist und lies eventuelle Unstetigkeitsstellen aus dem Graphen ab.



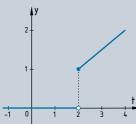
Lösung:

Die Funktion ist stetig in jenen Bereichen, in denen der Graph nicht "unterbrochen" ist, also in den Intervallen[0; T[und]T; 2T[. An der Stelle t = T ist die Funktion unstetig.

Zeichne die stückweise definierte Funktion $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 2 \\ 0.5 \cdot t & \text{für } t \ge 2 \end{cases}$ 2.27 im Intervall]-1; 4[und untersuche sie mithilfe von Grenzwerten auf Stetigkeit.



Lösung:



$$f(2) = 0.5 \cdot 2 = 1$$

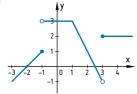
$$g_L = \lim_{t \to 2^{-}} (0) = 0$$
 $g_R = \lim_{t \to 2^{+}} (0,5 \cdot t) = 1$

• Berechnung von g_L und g_R an der Stelle $t_0 = 2$

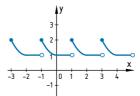
• Es existiert kein Grenzwert.

Die Funktion ist im angegebenen Intervall unstetig, weil sie an der Stelle t = 2 unstetig ist.

Gib an, in welchen Bereichen die dargestellten Funktionen im Intervall]-3; 4[stetig sind.



2)

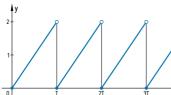


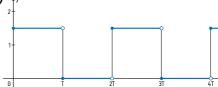
BG

2.29

- 1) Überlege, in welchen Bereichen die Funktion im Intervall [0; 3T] stetig ist. Lies eventuelle Unstetigkeitsstellen aus dem Graphen ab.
 - **2)** Ermittle den links- und rechtsseitigen Grenzwert an der Stelle $t_0 = 2T$.

a)





BG 2.30 Zeichne die stückweise definierte Funktion f im Intervall]-3; 5[.

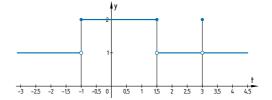
$$f(t) = \begin{cases} 1.5 & \text{für } t < -1 \\ 2 & \text{für } -1 \le t < 3 \\ 1.5 & \text{für } t \ge 3 \end{cases}$$

Untersuche diese Funktion mithilfe von Grenzwerten auf Stetigkeit.

BG 2.31

1) Stelle die Funktionsgleichung der stückweise definierten Funktion für den dargestellten Bereich auf.

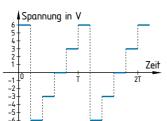
2) Untersuche diese Funktion mithilfe von Grenzwerten auf Stetigkeit.



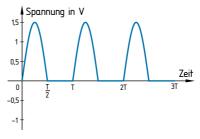
BG

2.32 Die dargestellten Funktionen werden in der Elektronik zur Beschreibung von Wechselgrößen verwendet. Lies gegebenenfalls die Unstetigkeitsstellen aus den Graphen ab und stelle jeweils die Funktionsgleichung für eine Periode T auf.

1) Treppenspannung



2) Einweggleichrichtung (Sinus-Funktion)



Hinweis: Gehe bei 1) davon aus, dass die Spannung jeweils auf einem links abgeschlossenen und rechts offenen Intervall konstant ist.

2.3 Unstetigkeitsstellen

- 2.32 Der Tarif für einen bewachten Parkplatz beträgt für jede angefangene Stunde 2,20 €. Maximal müssen 12,00 € pro Kalendertag bezahlt werden.
 - 1) Stelle die Kostenfunktion für eine Parkdauer von 0 bis 12 Stunden grafisch dar.
 - 2) Beschreibe den Verlauf des Graphen.



ABG

Aufgrund der Definition der Stetigkeit einer Funktion ergeben sich verschiedene Arten von Unstetigkeitsstellen.

Sprungstellen

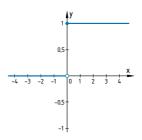
Funktionen wie zum Beispiel die Heaviside'sche Sprungfunktion haben eine so genannte Sprungstelle. Betrachtet man den Graph einer solchen Funktion, dann "springt" dieser an einer bestimmten Stelle.

• Heaviside'sche Sprungfunktion $\Theta(x)$ bzw. $\sigma(x)$, nach Oliver Heaviside (britischer Physiker, 1850 – 1925)

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } x \ge 0 \end{cases}$$

 $(\Theta \dots$ "Theta", griechischer Großbuchstabe)

allgemein:
$$\Theta(x - c) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < c \\ 1 & \text{für } x \ge c \end{cases}$$



Für den linksseitigen und den rechtsseitigen Grenzwert gilt:

$$g_L = \lim_{x \to 0^-} \Theta(x) = 0$$
 und $g_R = \lim_{x \to 0^+} \Theta(x) = 1$

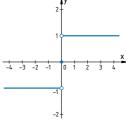
Die beiden einseitigen Grenzwerte stimmen nicht überein. Die Funktion ist daher unstetig an der Stelle $x_0 = 0$.

Existieren an einer Stelle x_0 einer Funktion f die Grenzwerte g_L und $g_{R'}$ sind aber voneinander verschieden, befindet sich an dieser Stelle eine **Sprungstelle**.

Weitere in der Technik wichtige Funktionen mit Sprungstellen sind exemplarisch angeführt:

• **Signumfunktion** ("Vorzeichenfunktion") sgn(x)

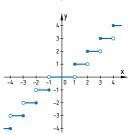
$$sgn(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$



 Integerfunktion ("Treppenfunktion") int(x)
 Der Funktionswert wird durch "Abschneiden" der Nachkommastellen des Arguments gebildet.

ZB:
$$int(4,81) = 4$$

 $int(-4,81) = -4$



Ist eine Funktion an einer "einzelnen" Stelle nicht definiert, wie zum Beispiel y = $\frac{1}{x}$ an der Stelle $x_0 = 0$, so hat die Funktion dort eine **Definitionslücke**. Funktionen, bei denen der Nenner den Wert null annehmen kann, haben solche Definitionslücken, zum Beispiel gebrochen rationale Funktionen in den Nullstellen des Nennerpolynoms. In der mathematischen Literatur wird eine Funktion oft nur innerhalb ihres Definitionsbereichs auf Stetigkeit hin untersucht. Dann wird zum Beispiel y = $\frac{1}{x}$ auf ihren Definitinosbereich $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ als stetig bezeichnet.

Polstellen

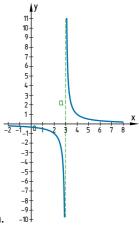
ZB: Die gebrochen rationale Funktion $f(x) = \frac{1}{x-3}$ soll auf Stetigkeit untersucht werden.

Das Nennerpolynom hat eine Nullstelle bei $x_0 = 3$. Daraus ergibt sich für f die Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$. Die Funktion ist an der Stelle x₀ nicht definiert, sie hat daher eine **Definitionslücke** bei $x_0 = 3$.

Es gilt:
$$\lim_{x \to 3^-} \left(\frac{1}{x-3} \right) = -\infty$$
 und $\lim_{x \to 3^+} \left(\frac{1}{x-3} \right) = +\infty$

Diese Stelle wird als Polstelle bezeichnet. Die Funktion hat an der Stelle $x_0 = 3$ eine **senkrechte Asymptote** a: x = 3.

Im Funktionsgraphen ist zu sehen, dass sich die beiden Äste der Funktion an der Stelle $x_0 = 3$ immer mehr der Senkrechten bei 3 nähern.



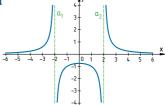


$$f(x) = \frac{3}{x^2 - 4}$$
 hat an den Stellen $x_1 = -2$ und $x_2 = 2$ je eine Definitionslücke.

Bei $x_1 = -2$ nähern sich die Funktionswerte von links kommend $"+\infty"$, von rechts kommend aber $"-\infty"$.

Für den Graphen bedeutet das, dass er bis zu dieser Stelle zum positiven Unendlichen hin verläuft, aber ab dieser Stelle aus dem negativen Unendlichen kommt.

An der Stelle $x_2 = 2$ verhält es sich genau umgekehrt. Da es sich um Polstellen handelt, gibt es die senkrechten Asymptoten a_1 : x = -2 und a_2 : x = 2.





Die Tangensfunktion y = tan(x) weist an den ungeradzahligen Vielfachen von $\frac{\pi}{2}$ Definitionslücken auf. Sie hat dort senkrechte Asymptoten.

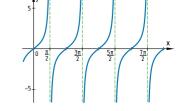
Für den linksseitigen Grenzwert gilt:

$$g_{L} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (\tan(x)) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)} \right) = \frac{1}{n^{0}} = +\infty$$

Für den rechtsseitigen Grenzwert gilt:

$$g_R = \lim_{x \to \frac{\pi^+}{2}} (\tan(x)) = \lim_{x \to \frac{\pi^+}{2}} (\frac{\sin(x)}{\cos(x)}) = -\frac{1}{0} = -\infty$$

Dies gilt, da die Cosinusfunktion im Intervall $\frac{\pi}{2}$; π [nur negative Werte annimmt.



Führen die Berechnungen von links- und/oder rechtsseitigem Grenzwert bei einer Funktion f an einer Stelle x_0 zu **uneigentlichen Grenzwerten**, so nennt man x_0 **Polstelle (Pol)** oder Unendlichkeitsstelle der Funktion. Dort befindet sich eine senkrechte Asymptote.

Hebbare Unstetigkeitsstellen

2.33 Ermittle die Definitionsmenge der Funktion $y = \frac{x^2 - 4x}{x - 4}$. Stelle die Funktion anschließend mithilfe von Technologieeinsatz grafisch dar. Was fällt dir an der Stelle x = 4 auf?



Wenn an einer Definitionslücke der Grenzwert g existiert, so kann man diese "Lücke" mithilfe von Ersatzfunktionen "schließen". Man spricht in diesem Fall von einer **hebbaren Unstetigkeitsstelle** und sagt, die Funktion ist **stetig fortsetzbar**.

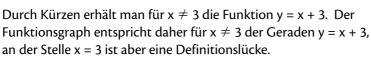
Dies ist zum Beispiel bei einer gebrochen rationalen Funktion der Fall, wenn das Zähler- und das Nennerpolynom die gleichen Nullstellen haben, also der Bruchterm gekürzt werden könnte.

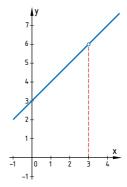
ZB: Der Graph der Funktion $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ sieht auf den ersten Blick wie eine Gerade aus.

Betrachtet man aber die Funktionsgleichung, so erkennt man,

dass die Funktion
$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{(x + 3) \cdot (x - 3)}{x - 3}$$
 an der Stelle $x_0 = 3$ nicht definiert ist.

Das Zählerpolynom $x^2 - 9 = (x + 3) \cdot (x - 3)$ und das Nennerpolynom (x - 3) haben die gleiche Nullstelle $x_0 = 3$.





Um diese Lücke zu schließen, kann man daher eine neue Funktion \bar{f} definieren: $\bar{f}(x) = x + 3$

Eine formal andere Möglichkeit, diese Lücke zu schließen, besteht darin, der Definitionsmenge von f(x) einen zusätzlichen Wert zuzuweisen. Der Funktionswert an der Stelle x=3 entspricht dem Grenzwert der Funktion: $\lim_{x\to 3} \left(\frac{x^2-9}{x-3}\right) = 6$

Man erhält dann eine stückweise definierte Funktion:

$$\overline{\overline{f}}(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x - 3} & \text{für } x \neq 3\\ 6 & \text{für } x = 3 \end{cases}$$

 $\bar{f}(x)$ und $\bar{f}(x)$ sind unterschiedliche Schreibweisen für die gleiche Ersatzfunktion, sie unterscheiden sich von f(x) nur an der Stelle $x_0 = 3$.

Hat eine Funktion f an der Stelle x_0 eine Definitionslücke und existiert der Grenzwert, so spricht man von einer **hebbaren Unstetigkeitsstelle**.

Man kann diese Unstetigkeitsstelle zum Beispiel mithilfe einer Ersatzfunktion $\bar{\bar{f}}(x)$ schließen.

$$\bar{\bar{f}}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } x \neq x_0 \\ \lim_{x \to x_0} f(x) & \text{für } x = x_0 \end{cases}$$

Die Ersatzfunktion $\overline{\overline{f}}(x)$ heißt **stetige Fortsetzung** der Funktion f.

Oszillationsstellen

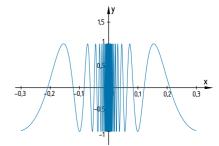
Winkelfunktionen haben aufgrund ihrer Periodizität besondere Eigenschaften (vgl. Band 2). Bewegt sich ein Punkt entlang eines Kreises, so kann seine Position, abhängig vom Drehwinkel, mithilfe von Sinus- bzw. Cosinusfunktionen beschrieben werden. Bei jeder Erhöhung des Drehwinkels um 2π erhält man den gleichen Sinus- bzw. Cosinuswert.



In der abgebildeten Funktion $f(x) = \cos(\frac{1}{x})$ gibt das Argument $\frac{1}{x}$ den Drehwinkel an. Für $x \stackrel{(\wedge)}{\rightarrow} 0$ wächst der Drehwinkel $\frac{1}{x}$ unendlich schnell an. Man kann vermuten, dass die Werte der Funktion

$$f(x) = cos(\frac{1}{x})$$
 an der Stelle $x_0 = 0$ "unendlich oft"

zwischen den Werten 1 und (-1) schwingen bzw. oszillieren (latein: "oscillare" = schaukeln).



Um festzustellen, ob es sich bei der Definitionslücke in $x_0 = 0$ um eine hebbare Unstetigkeitsstelle handelt, muss der Grenzwert der Funktion für $x \rightarrow 0$ untersucht werden.

Falls dieser existiert, dann muss für **jede** beliebige Folge von x-Werten, die gegen $x_0 = 0$ konvergieren, die Folge der Funktionswerte den gleichen Grenzwert haben.

In diesem Fall eignet sich zB die gegen 0 konvergierende Folge $\langle x_n \rangle = \langle \frac{1}{n}, \frac{1}{2\pi} \rangle = \langle \frac{1}{\pi}, \frac{1}{2\pi}, \frac{1}{2\pi}, \frac{1}{2\pi}, \dots \rangle$

Man setzt die Glieder von $\langle x_n \rangle$ in die Funktion f(x) ein und erhält damit die Folge der Funktionswerte $\langle f(x_n) \rangle$.

$$\begin{split} f(x_1) &= \cos(\pi) = -1 \\ f(x_2) &= \cos(2\pi) = +1 \\ f(x_3) &= \cos(3\pi) = -1 \\ f(x_4) &= \cos(4\pi) = +1 \\ \end{split} \right\} \Rightarrow \left\langle f(x_n) \right\rangle = \left\langle -1, 1, -1, 1, -1, ... \right\rangle$$

Die Glieder der Folge der Funktionswerte "springen" zwischen den Werten 1 und (-1) hin und her. An der Stelle $x_0 = 0$ existiert also **kein Grenzwert**. Es handelt sich daher nicht um eine hebbare Unstetigkeitsstelle, sondern um eine so genannte Oszillationsstelle.

Nähert sich das Argument einer Sinusfunktion bzw. einer Cosinusfunktion an der Definitionslücke dem Ausdruck "∞", so existiert kein Grenzwert, man spricht von einer Oszillationsstelle.



(F) QOD 2.34 Katharina untersucht die Funktion $f(x) = x \cdot \sin(\frac{1}{x^2})$ an der Stelle $x_0 = 0$ mit Mathcad. Beurteile ihre Vorgehensweise und ihre Folgerung.

$$f(x) := x \cdot \sin\left(\frac{2}{x^2}\right)$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) \to 0$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) \to 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) \to 0$$

Die Funktion ist stetig an der Stelle xo

2.35 Der dargestellte Graph wird durch die Funktion $f(x) = -\frac{1}{(x+2)^2}$ beschrieben.



- 1) Bestimme die Definitionslücke der Funktion.
- 2) Untersuche das Verhalten der Funktion an der Definitionslücke.
- 3) Gib die Gleichungen der Asymptoten an.

Lösung:

1)
$$(x + 2)^2 = 0$$

 $x = -2$

• Die Nullstelle des Nenners ist die Definitionslücke.

2)
$$\lim_{x \to -2} \left(-\frac{1}{(x+2)^2} \right) = -\infty$$

2) $\lim_{x \to -2} \left(-\frac{1}{(x+2)^2} \right) = -\infty$ Der Nenner $(x+2)^2$ ist immer positiv. Daher führt die Ermittlung von gi und g_R zum gleichen Ergebnis.

Die Funktion hat an der Stelle $x_0 = -2$ einen uneigentlichen Grenzwert. Sie hat an dieser Stelle eine Polstelle.

3)
$$\lim_{x \to \pm \infty} \left(-\frac{1}{(x+2)^2} \right) = 0$$

Senkrechte Asymptote a_1 : x = -2

Waagrechte Asymptote a_2 : y = 0

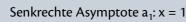
Ermittle die Gleichungen der Asymptoten der Funktion $f(x) = \frac{5x}{(x-1)^2}$. 2.36

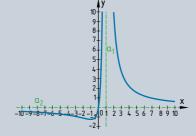


Lösung:

$$(x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$$

• Definitionslücke x = 1 ist eine Polstelle.





 $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{5x}{x^2 - 2x + 1} \right) = 0$

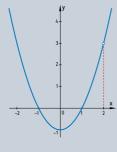
Waagrechte Asymptote a_2 : y = 0

2.37 Stelle die Funktion $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x - 2}$ grafisch dar. Zeige, dass sie eine hebbare Unstetigkeitsstelle hat. Bestimme die stetige Fortsetzung der Funktion als einzelnen Term und als stückweise definierte Funktion.



71

Lösung:



Nullstelle des Nennerpolynoms berechnen und Einsetzen der Nullstelle in das Zählerpolynom:

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$
 ... Nullstelle des Nennerpolynoms
 $2^3 - 2 \cdot 2^2 - 2 + 2 = 0$

Zähler- und Nennerpolynom haben die gleiche Nullstelle, somit ist die Stelle x = 2 eine hebbare Unstetigkeitsstelle. Division führt zur stetigen Fortsetzung als einzelner Term.

$$\frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x - 2} = x^2 - 1 \Rightarrow \bar{f}(x) = x^2 - 1$$

$$g = \lim_{x \to 2} \left(\frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x - 2} \right) = \lim_{x \to 2} (x^2 - 1) = 3$$
 Der Grenzwert für $x \to 2$ liefert den

$$\overline{\overline{f}}(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x - 2} & \text{für } x \neq 2\\ 3 & \text{für } x = 2 \end{cases}$$

Funktionswert für $\bar{f}(2)$. Damit kann eine stückweise definierte Funktion angegeben werden.





Zeichne die Funktion f. An welcher Stelle ist die Funktion unstetig? Welche Art von 2.38 Unstetigkeitsstelle vermutest du? Überprüfe deine Vermutung rechnerisch.

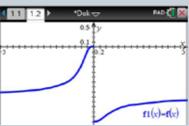
a)
$$f(x) = -\frac{3}{2+2^{-\frac{1}{x}}}$$

b)
$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Lösung mit TI-Nspire:



• Die Funktion wird im **Calculator** definiert.



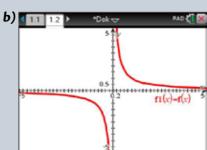
• Die grafische Darstellung erfolgt in der Applikation **Graphs**. Es werden passende Fenstereinstellungen gewählt.

Vermutung: Sprungstelle an der Stelle $x_0 = 0$



 Berechnung von links- und rechtsseitigem Grenzwert im Calculator.

Die Grenzwerte $g_1 = 0$ und $g_R = -1.5$ stimmen nicht überein. Die Funktion hat an der Stelle $x_0 = 0$ eine Sprungstelle.



• Die Funktion wird im Calculator definiert und anschließend in der Applikation **Graphs** dargestellt.

Vermutung: Polstelle an der Stelle $x_0 = 0$



• Berechnung von links- und rechtsseitigem Grenzwert im Calculator.

Bei links- und rechtsseitigem Grenzwert handelt es sich um uneigentliche Grenzwerte. Die Funktion hat eine Polstelle bei $x_0 = 0$.





Stelle die Funktion grafisch dar. Überlege mithilfe der Zeichnung und der Funktionsgleichung, ob und an welchen Stellen, welche Arten von Unstetigkeitsstellen vorliegen.

a)
$$y = \frac{1}{1-x^2}$$

b)
$$y = e^{-3x^2 + 1}$$

c)
$$y = 2^x$$

d)
$$y = \frac{1}{\sin(x)}$$

c)
$$y = 2^x$$
 d) $y = \frac{1}{\sin(x)}$ **e)** $y = \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

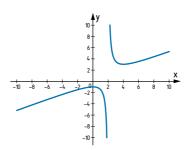
- **2.40** Untersuche die Funktion $f(x) = \frac{1}{x-2}$ auf Stetigkeit. Gib die Art der Unstetigkeitsstelle an. Stelle den Funktionsgraphen der Funktion f dar und zeichne die Asymptoten ein.
- BG

2.41 Heidi zeichnet den Graph der Funktion

$$y = \frac{0.5x^3 + 4}{x^2 - 4}$$
 mithilfe von Technologieeinsatz

und erhält die nebenstehende Abbildung.

- 1) Wie viele Unstetigkeitstellen vermutest du anhand der Zeichnung?
- 2) Erkläre, warum nur eine senkrechte Asymptote existiert, obwohl das Nennerpolynom zwei Nullstellen hat.



Aufgaben 2.42 - 2.44: Stelle jeweils die Funktion im Intervall]-5; 5[grafisch dar und gib die Unstetigkeitsstellen an.

2.42 a)
$$f(x) = sgn(x) - 3$$

2.42 a)
$$f(x) = sgn(x) - 3$$
 b) $f(x) = sgn(x - 2)$ c) $f(x) = 0.5 \cdot sgn(x + 2)$

2.43 a)
$$f(x) = int(x) + 2$$
 b) $f(x) = 0.5 \cdot int(x)$ c) $f(x) = int(1.5x)$

b)
$$f(x) = 0.5 \cdot int(x)$$

c)
$$f(x) = int(1.5x)$$

2.44 a)
$$f(x) = 2 \cdot \Theta(x)$$

b)
$$f(x) = \Theta(x-2)$$

2.44 a)
$$f(x) = 2 \cdot \Theta(x)$$
 b) $f(x) = \Theta(x-2)$ c) $f(x) = \Theta(x+2) - \Theta(x-4)$

- **BG**
- **2.45** Ist die Funktion f(x) = |x| unstetig an der Stelle $x_0 = 0$? Begründe deine Antwort.
- **2.46** Stelle die Funktionen $f(x) = \frac{1}{x}$ und $g(x) = \frac{1}{|x|}$ grafisch dar. Beschreibe den Verlauf der beiden Funktionsgraphen mithilfe von Grenzwerten.
- ●BG●
- Stelle die Funktion f grafisch dar und zeige mithilfe des links- und des rechtsseitigen Grenzwerts, dass sie eine Sprungstelle hat.

a)
$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{für } x < 2 \\ x + 2 & \text{für } x \ge 2 \end{cases}$$

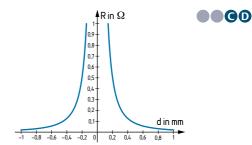
c)
$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{für } x < 1 \\ 2x-3 & \text{für } x \ge 1 \end{cases}$$

b)
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + 1 & \text{für } x < 3\\ (x - 1)^2 & \text{für } x \ge 3 \end{cases}$$

d)
$$f(x) = \begin{cases} -3x^2 - 2x + 1 & \text{für } x \le -1 \\ 1,5x - 2 & \text{für } x > -1 \end{cases}$$

2.48 Peter stellt die Funktion R(d) = $\frac{0.06348}{d^2 \cdot \pi}$ dar, die die

Abhängigkeit des elektrischen Widerstands R (in Ohm) vom Durchmesser d (in mm) eines 1 m langen Silberdrahts bei 20 °C angibt.



- 1) Beschreibe das Verhalten der Funktion.
- 2) Argumentiere, warum der von Peter dargestellte Funktionsgraph im gegebenen Sachzusammenhang nicht korrekt ist.
- Untersuche die Funktion an der Stelle $x_0 = 0$. Welche Art von Unstetigkeitsstelle liegt vor? Begründe deine Antwort.

a)
$$f(x) = 2x \cdot \cos(\frac{1}{x})$$

a)
$$f(x) = 2x \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$
 b) $f(x) = x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ **c)** $f(x) = 0.1 \cdot \sin\left(\frac{4}{x}\right)$

c)
$$f(x) = 0.1 \cdot \sin(\frac{4}{x})$$

2.50 Gegeben ist die Funktion $f(x) = (x + 1) \cdot e^{\overline{20x}}$

 \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc

73

- 1) Gib die Unstetigkeitsstelle an. Berechne g_L und g_R an dieser Stelle.
- 2) Marko behauptet, es handelt sich bei dieser Stelle um eine Polstelle. Agnes glaubt, dass es sich um eine Sprungstelle handelt. Wer hat recht? Begründe deine Antwort.

Zusammenfassung

Grenzwert einer Funktion für $x \rightarrow \pm \infty$

Der Grenzwert g einer Funktion f(x) für $x \to \infty$ existiert, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Stelle x_0 gibt, sodass für alle $x > x_0$ stets $|f(x) - g| < \varepsilon$ ist. Man schreibt: $\lim_{x \to a} f(x) = g$

Ist $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$, so spricht man von einem **uneigentlichen Grenzwert**.

Eine Gerade a = a(x) ist eine Asymptote der Funktion y = f(x), wenn gilt:

$$\lim_{x \to -\infty} |f(x) - a(x)| = 0 \quad \text{bzw.} \lim_{x \to +\infty} |f(x) - a(x)| = 0$$

Grenzwert einer Funktion für $x \rightarrow x_0$

Die Funktion f(x) hat für $x \to x_0$ den Grenzwert $\lim_{x \to x_0} f(x) = g$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein

 δ > 0 gibt, sodass für alle x-Werte, für die $|x-x_0|$ < δ gilt, auch |f(x)-g| < ϵ gilt.

Linksseitiger Grenzwert: $g_L = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$ **Rechtsseitiger Grenzwert:** $g_R = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$

Gibt es einen linksseitigen und einen rechtsseitigen Grenzwert an der Stelle x₀ und gilt $g_L = g_R$, so ist $g = g_L = g_R$ der Grenzwert der Funktion an der Stelle x_0 .

Stetigkeit

Eine Funktion f ist stetig an einer Stelle x₀, wenn es dort einen Grenzwert gibt und dieser Grenzwert mit dem Funktionswert an der Stelle x_0 übereinstimmt: $g = \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ Andernfalls nennt man die Funktion **unstetig** an der Stelle x_0 .

Ist die Funktion an jeder Stelle eines beliebig gewählten Intervalls stetig, spricht man von einer in diesem Intervall stetigen Funktion.

Unstetigkeitsstellen

Sprungstelle, Definitionslücke (Polstelle (Pol), hebbare Unstetigkeitsstelle), Oszillationsstelle

Weitere Aufgaben

a)
$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 9}$$

b)
$$f(x) = -\frac{3}{(x-2)^2}$$
 c) $f(x) = \frac{1}{25-4x^2}$

c)
$$f(x) = \frac{1}{25-4x^2}$$

d)
$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x}$$

a)
$$f(x) = \frac{2x^2 - 8}{x - 4}$$

a)
$$f(x) = \frac{2x^2 - 8x}{x - 4}$$
 b) $f(x) = \frac{8x^3 - 4x^2 + 2x}{x^2 - 2x + 1}$ **c)** $f(x) = \frac{x^3 - 3x + 2}{x + 2}$ **d)** $f(x) = \frac{x^4 - 18x^2 + 81}{x^2 - 6x + 9}$

c)
$$f(x) = \frac{x^3 - 3x + 2}{x + 2}$$

d)
$$f(x) = \frac{x^4 - 18x^2 + 8}{x^2 - 6x + 9}$$

2.53 Begründe, warum die Funktion
$$y = \frac{x-1}{x^2-1}$$
 nur eine senkrechte Asymptote hat.

a)
$$f(x) = \frac{1}{x-1} - 5$$

b)
$$f(x) = \frac{1}{e^{2x} + 3}$$

c)
$$f(x) = \frac{x^4}{x^4 - 2}$$

a)
$$f(x) = \frac{1}{x-1} - 5$$
 b) $f(x) = \frac{1}{e^{2x} + 3}$ **c)** $f(x) = \frac{x^4}{x^4 - 2}$ **d)** $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 4x}{x - 2}$

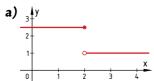
a) b(f) =
$$\frac{10 \cdot f}{10 - f}$$

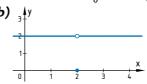
a)
$$b(f) = \frac{10 \cdot f}{10 - f}$$
 b) $f_E(v) = f_Q \cdot \frac{330}{v + 330}$ **c)** $R(W) = \frac{120 \cdot W}{120 + W}$ **d)** $T(\beta) = \frac{t_0}{1 - \beta^2}$

c) R(W) =
$$\frac{120 \cdot \text{W}}{120 + \text{W}}$$

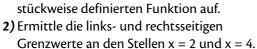
d)
$$T(\beta) = \frac{t_0}{1 - \beta^2}$$

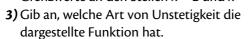
2.56 Erkläre anhand der Zeichnung, ob die Funktion an der Stelle $x_0 = 2$ stetig ist.

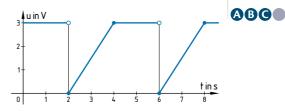




2.57 1) Stelle die Funktionsgleichung der dargestellten stückweise definierten Funktion auf



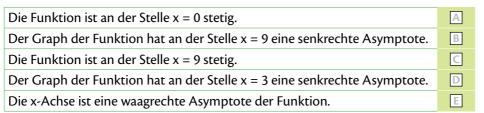




2.58 Gib ein Beispiel für die Gleichung einer Funktion mit den folgenden Eigenschaften an. Begründe deine Wahl mithilfe einer Rechnung. Stelle die Funktion grafisch dar.



- a) Asymptoten bei x = -2, x = 1, y = -1
- **b)** Asymptoten bei x = 1 und y = -3, Definitionslücke bei x = -2
- **2.59** Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x^2 9}$. Kreuze die falsche Aussage an.



über zwei Förderbänder befüllt. Dabei nimmt die Getreidemenge mit einer Füllgeschwindigkeit von 25 m³ pro Stunde zu. Nach 20 Minuten wird die Füllgeschwindigkeit innerhalb von 30 Sekunden linear bis auf 30 m³ pro Stunde erhöht. Weitere 15 Minuten später wird ein Förderband abgestellt, wodurch die Füllgeschwindigkeit abrupt auf 10 m³ pro Stunde gesenkt wird.





- 1) Stelle die Funktion der Füllgeschwindigkeit v (in $\frac{m^3}{h}$) in Abhängigkeit von der Zeit t (in Stunden) grafisch dar.
- 2) Gib die Unstetigkeitsstelle(n) an.
- **3)** Mathematische Modelle bilden die Realität nur innerhalb gewisser Grenzen ab. Worin unterscheidet sich der tatsächliche Verlauf der Befüllung von dem angegebenen mathematischen Modell?
- In einer Kleinstadt wurden zur Eröffnung einer Filiale einer Fast-Food-Kette an alle Haushalte Gutscheine mit einer Gültigkeitsdauer von 20 Tagen versandt. Für die Anzahl der eingelösten Gutscheine N in Abhängigkeit von der Zeit t (in Tagen) wurde folgendes Modell erstellt: $N(t) = \frac{55\,000}{10 + 5\,490 \cdot e^{-0.76 \cdot t}}$



75

- 1) Stelle die Funktion N grafisch dar.
- **2)** Erkläre anhand des Funktionsgraphen, von welcher Höchstanzahl an eingelösten Gutscheinen bei diesem Modell ausgegangen wird.



2.62 Ein Werkstück wird auf eine Temperatur von ϑ_0 = 55 °C erwärmt. Im Anschluss wird es zur Vermessung in einem Raum mit einer Umgebungstemperatur von ϑ_U = 20 °C

abgekühlt. Für die Abkühlung eines Stoffes gilt:

$$\vartheta(t) = \vartheta_{\mathsf{U}} + (\vartheta_{\mathsf{0}} - \vartheta_{\mathsf{U}}) \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{k} \cdot \mathrm{t}}$$

t ... Zeit in Minuten (min)

 $\vartheta(t)$... Temperatur zur Zeit t in °C

 ϑ_0 ... Temperatur zu Beginn in °C

9, ... Umgebungstemperatur in °C

k ... Abkühlkonstante in min⁻¹



- **2)** Skizziere den Graphen der Funktion ϑ im nebenstehenden Koordinatensystem.
- **3)** Erkläre anhand des Funktionsgraphen, welche Temperatur das Werkstück nach sehr langer Zeit annimmt.



An einer Schraubenfeder ist eine Kugel befestigt. Wird die Kugel um eine Länge von $y_0 = 5$ cm ausgelenkt, so kann die Bewegung durch das folgende Weg-Zeit-Gesetz beschrieben werden: $y(t) = y_0 \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin(\omega t)$

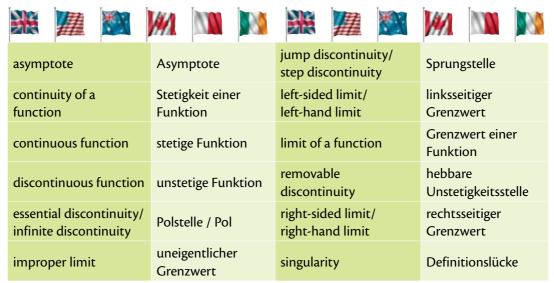
t ... Zeit in Sekunden, y(t) ... Auslenkung zur Zeit t in cm

 $\delta = 0.5 \text{ s}^{-1} \dots \text{Dämpfungskonstante}; \omega = 20 \text{ s}^{-1} \dots \text{Kreisfrequenz}$

1) Stelle die Funktion y im Intervall [0 s; 5 s] grafisch dar.

2) Erkläre mithilfe der Grenzwertberechnung, welchem Wert sich die Amplitude der Schwingung für $t \to \infty$ nähert.

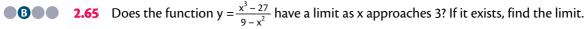
Aufgaben in englischer Sprache





2.64 Determine if the following function is continuous at x = 1.

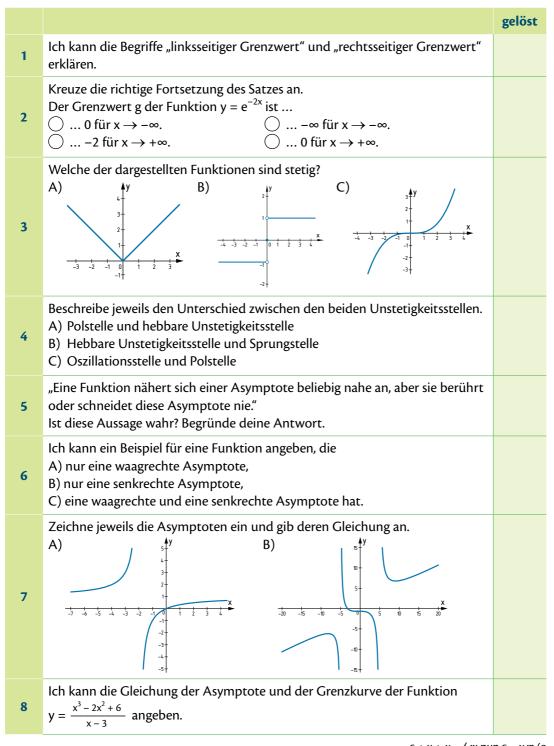
$$f(x) = \begin{cases} 3x - 5 & \text{if } x \neq 1 \\ 2 & \text{if } x = 1 \end{cases}$$



B 2.66 Find the equations of the asymptotes of the curve
$$y = \frac{10 - x}{x + 8}$$
.

BG 2.67 Explain why the graph of the function
$$y = \frac{x^2 - 5}{2x - 3}$$
 cannot cross its vertical asymptote.

Wissens-Check



Losung:

1) siehe Seite 62

2) Der Grenzwert g der Funktion $y = e^{-2x}$ ist 0 für $x \to +\infty$.
3) A) und C)

4) siehe Seite 67ff

5) Nein, nur senkrechte Asymptoten können den Funkionsgraph nicht schneiden.

6) A) $y = e^{-x}$, B) $y = \ln(x)$, C) $y = \frac{1}{x} + 3$ 7) A) a_1 : x = -2, a_2 : y = 1; B) a_1 : x = -5, a_2 : x = 5, a_3 : y = 0,5x = 3 and x = 3 an