7 Komplexe Zahlen

In vielen Sammlungen mathematischer Zitate findet man den Ausspruch des deutschen Mathematikers Leopold Kronecker:
„Die natürlichen Zahlen hat der liebe Gott geschaffen, alles andere ist Menschenwerk."
Im folgenden Abschnitt werden wir eine bisher noch nicht behandelte, von „Menschen erfundene" Zahlenmenge besprechen.

7.1 Imaginäre Zahlen

Gehen wir in der Geschichte der Mathematik zurück bis zu den frühen Hochkulturen der Babylonier und der Ägypter, begegnen wir als erstem von „Menschenhand" geschaffenen Zahlenbereich den Bruchzahlen, um Teile von Ganzen zu beschreiben.

Die Erkenntnis, dass nicht alle Strecken in geometrischen Figuren durch Bruchzahlen beschrieben werden können, hat ca. 500 v. Chr. zur „Erfindung" der irrationalen Zahlen durch griechische Mathematiker geführt. Die bis dahin im Allgemeinen nicht lösbare Gleichung $x^2 = a$ hatte damit für $a > 0$ die Lösung $x = \sqrt{a}$.

Negative Zahlen hatten in der mathematischen Welt der Griechen, die vorwiegend geometrisch argumentierten, noch keinen Platz. Bis die Mathematiker die Verwendung von negativen Zahlen als sinnvoll akzeptierten, dauerte es noch lange. Um 1200 wurden negative Lösungen einer Gleichung in einem italienischen Rechenbuch erstmals zugelassen, aber noch im 17. Jahrhundert wurden sie als „absurde Zahlen" oder „falsche Zahlen" bezeichnet.

Geronimo Cardano
(1501 – 1576)

Während die mathematische Welt also noch dabei war, sich mit dem Begriff der negativen Zahlen anzufreunden, bahnte sich bereits die nächste Neuerung an. Im 16. Jahrhundert beschäftigten sich viele Mathematiker mit der Suche nach Lösungsformeln für Gleichungen. Der italienische Arzt und Mathematiker Geronimo Cardano del Ferro stellte 1545 die Aufgabe:
„Teile 10 so in zwei Teile, dass das Produkt 40 ist."

Der Versuch, die Aufgabe zu lösen, führte auf folgende Gleichung:

$$x \cdot (10 - x) = 40 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 10x + 40 = 0$$

Cardano fand die beiden „Lösungen":

$$x_1 = 5 + \sqrt{-15} \quad \text{und} \quad x_2 = 5 - \sqrt{-15}$$

Einerseits gibt es keine reelle Zahl, die die Quadratwurzel aus einer negativen Zahl ist, andererseits zeigte sich, dass diese Ausdrücke die Gleichung erfüllen, wenn man sie einsetzt.

Um Gleichungen der Form $x^2 = a$ auch für $a < 0$ lösen zu können, „erfand" man eine Zahl, deren Quadrat (-1) ergibt. Man bezeichnete sie als „eingebildete Zahl" (latein: „numeri imaginarii"). Leonhard Euler führte das Symbol i für $\sqrt{-1}$ ein und schrieb in einem Lehrbuch, er werde rechnen *„... wie, wenn $i^2 = -1$ sei ..."*.

Man bezeichnet **i** als **imaginäre Einheit**, ihre Vielfachen der Form $b \cdot i$ mit $b \in \mathbb{R}$, zB 4i oder −13i, heißen **imaginäre Zahlen**.

In der **Elektrotechnik** wird die imaginäre Einheit mit **j** abgekürzt, weil **i** für die (zeitabhängige) **Stromstärke** steht. Im Folgenden werden beide Bezeichnungen verwendet.

Für die **imaginäre Einheit** gilt:

$$\mathbf{i^2 = -1} \qquad \text{bzw.} \qquad \mathbf{j^2 = -1}$$
$$i = \sqrt{-1} \qquad \qquad j = \sqrt{-1}$$

Alle Vielfachen von i bzw. j nennt man **imaginäre Zahlen**: $b \cdot i$ bzw. $b \cdot j$ mit $b \in \mathbb{R}$

In der von Euler gewählten Schreibweise $i = \sqrt{-1}$ darf $\sqrt{-1}$ nicht als Zahl verstanden werden, da die für reelle Zahlen behandelten Regeln für das Rechnen mit Wurzeln für $\sqrt{-1}$ nicht uneingeschränkt gelten. Es lassen sich leicht Beispiele angeben, die auf einen Widerspruch führen.
ZB: $-1 = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1) \cdot (-1)} = \sqrt{1} = 1$

Mithilfe der imaginären Zahlen sind Gleichungen der Form $x^2 = a$ auch für $a < 0$ lösbar.

ZB $x^2 = -4$ hat die beiden Lösungen $x_1 = +2 \cdot i$ und $x_2 = -2 \cdot i$, da gilt:
$(+2 \cdot i)^2 = (+2)^2 \cdot i^2 = 4 \cdot (-1) = -4$ und $(-2 \cdot i)^2 = (-2)^2 \cdot i^2 = 4 \cdot (-1) = -4$

Beim Rechnen mit **imaginären Zahlen** wird für $\mathbf{a < 0}$ definiert:

$$\sqrt{a} = \pm\sqrt{|a|} \cdot i \quad \text{bzw.} \quad \sqrt{a} = \pm\sqrt{|a|} \cdot j$$

Beachte den Unterschied zum Berechnen der Wurzel, wenn nur reelle Zahlen zugelassen sind:
$x = \sqrt{a}$ mit $a > 0$ ist per Definition nur der positive Wert, für den $x^2 = a$ gilt, zB $\sqrt{4} = +2$.

Sind imaginäre Zahlen zugelassen, wird für die Wurzel aus einer negativen Zahl diese Einschränkung nicht getroffen, zB $\sqrt{-4} = \pm 2 \cdot i$.

Die mathematische Begründung hierfür folgt in Abschnitt 7.4.2.

7.1 Gib die imaginären Zahlen an, die Lösungen der Gleichung $x^2 = -16$ sind. B

Lösung:
$x^2 = -16 \;\Rightarrow\; x = \sqrt{-16}$
$x_1 = +\sqrt{|-16|} \cdot i = +\sqrt{16} \cdot i = 4 \cdot i$
$x_2 = -\sqrt{|-16|} \cdot i = -\sqrt{16} \cdot i = -4 \cdot i$

- Es ist nicht notwendig, $x = \pm\sqrt{-16}$ zu schreiben, weil per Definition sowohl $4 \cdot i$ als auch $-4 \cdot i$ als $\sqrt{-16}$ gelten.

Potenzen der imaginären Einheit

Aus der Definition $i^2 = -1$ können auch höhere Potenzen von i unmittelbar abgeleitet werden:

$i^1 = i$	$i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$	$i^9 = i^8 \cdot i = 1 \cdot i = i$
$i^2 = -1$	$i^6 = i^5 \cdot i = i \cdot i = -1$	...
$i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i$	$i^7 = i^6 \cdot i = (-1) \cdot i = -i$	...
$i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$	$i^8 = i^7 \cdot i = (-i) \cdot i = 1$	...

Mithilfe von $i^4 = 1$ kann man die Potenzen von i allgemein angeben:

$i^{4n} = (i^4)^n = 1^n = 1$ $\qquad$ $i^{4n+2} = (i^4)^n \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$

$i^{4n+1} = (i^4)^n \cdot i^1 = 1 \cdot i = i$ $\qquad$ $i^{4n+3} = (i^4)^n \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i$

7.2 Vereinfache soweit wie möglich. **a)** i^{25} **b)** j^{-1} B

Lösung:
a) $i^{25} = i^{24} \cdot i^1 = (i^4)^6 \cdot i = 1^6 \cdot i = i$ $\qquad$ **b)** $j^{-1} = 1 \cdot j^{-1} = j^4 \cdot j^{-1} = j^3 = -j$

7.3 Gib die imaginären Zahlen an, die Lösungen der Gleichung sind. B
a) $x^2 = -49$ **b)** $x^2 = -53$ **c)** $x^2 = -\frac{1}{4}$

Aufgaben 7.4 – 7.5: Vereinfache die Terme ($n \in \mathbb{Z}$).

7.4 **a)** i^{10} **b)** i^7 **c)** i^{-2} **d)** i^{-15} **e)** i^{121} **f)** i^{-98} B

7.5 **a)** i^{8n} **b)** i^{4n-1} **c)** i^{-4n-2} **d)** i^{-4n+3} **e)** i^{-4n} **f)** i^{-4n+2} B

7.6 Ergänze: i^m ist eine imaginäre Zahl, wenn m ______________ (*gerade/ungerade*) ist und eine reelle Zahl, wenn m ______________ (*gerade/ungerade*) ist. A

Komplexe Zahlen

7.2 Menge der komplexen Zahlen

7.2.1 Einführung und Definition

Ab dem 16. Jh. rechneten die Mathematiker mit Zahlen wie $2 + \sqrt{-1}$, ohne deren Bedeutung genau festgelegt zu haben. Carl Friedrich Gauß gab schließlich Ausdrücken wie $2 + \sqrt{-1}$ den Namen **komplexe Zahlen**, also „zusammengesetzte Zahlen" (latein: „complexus" = verflochten).


Carl Friedrich Gauß (1777 – 1855)

Komplexe Zahlen sind aus reellen Zahlen und imaginären Zahlen zusammengesetzt und werden meist mit dem Buchstaben z bezeichnet.
ZB: $z = 3 + i$, $z = 5 - 2 \cdot j$

Allgemein: $z = a + b \cdot i$ bzw. $z = a + b \cdot j$ mit $a, b \in \mathbb{R}$

Den rein reellen Anteil a der komplexen Zahl z bezeichnet man als **Realteil Re(z)** und den Koeffizienten b der imaginären Einheit als **Imaginärteil Im(z)**.

ZB $z = 3 - \frac{i}{2} \Rightarrow \text{Re}(z) = 3, \text{Im}(z) = -\frac{1}{2}$

Durch Zusammensetzen einer reellen und einer imaginären Zahl entsteht eine **komplexe Zahl z**:

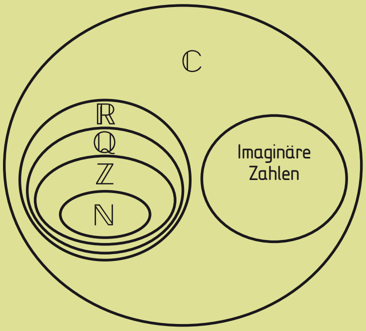
$z = a + b \cdot i$ (kurz: $z = a + bi$) bzw.

$z = a + b \cdot j$ (kurz: $z = a + bj$) mit $a, b \in \mathbb{R}$

Man bezeichnet **a** als **Realteil** von z und **b** als **Imaginärteil** von z:

$\text{Re}(z) = a, \text{Im}(z) = b$

Die **Menge aller komplexen Zahlen** wird mit $\mathbb{C}$ bezeichnet. Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ und die imaginären Zahlen sind Teilmengen von $\mathbb{C}$.



Jede rein reelle Zahl lässt sich als komplexe Zahl mit dem Imaginärteil b = 0 interpretieren, ebenso kann man jede rein imaginäre Zahl als komplexe Zahl mit dem Realteil a = 0 betrachten.
ZB: $z = 7 \Leftrightarrow z = 7 + 0 \cdot i$; $z = 5 \cdot i \Leftrightarrow z = 0 + 5 \cdot i$

A **7.7** Gib jeweils den Imaginärteil und den Realteil der komplexen Zahlen an.
a) $z_1 = 11 + 6 \cdot i$ $z_2 = 8 \cdot i - 5$ $z_3 = 12$ $z_4 = \sqrt{3} \cdot i$
b) $z_1 = -3 - 9 \cdot j$ $z_2 = -4 \cdot j$ $z_3 = 5 \cdot j - 7$ $z_4 = \frac{j}{3}$

A **7.8** Schreibe die komplexe Zahl in der Form $z = a + b \cdot i$ an.
a) Re(z) = 12; Im(z) = 2 **c)** Re(z) = 0; Im(z) = x
b) Re(z) = 9; Im(z) = −4 **d)** Re(z) = x; Im(z) = −1

C **7.9** Gib an, in welchen der Mengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ die Zahl jeweils enthalten ist.
1) 5j **2)** 1,4 **3)** −4 **4)** $\sqrt{-2}$ **5)** π **6)** $\frac{i}{2}$ **7)** $\sqrt{3}$

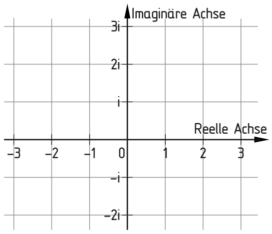
D **7.10** Ist die folgende Behauptung wahr oder falsch? Begründe deine Antwort.
Für jede komplexe Zahl z gilt: z = Re(z) + Im(z)

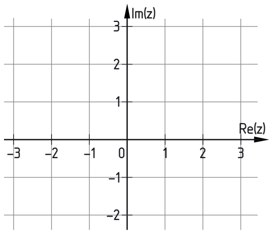
D **7.11** Was kann man über eine komplexe Zahl aussagen, für die Re(Im(z)) = 0 gilt?
Gilt die gleiche Aussage auch, wenn Im(Re(z)) = 0 ist?

7.2.2 Die Gauß'sche Zahlenebene

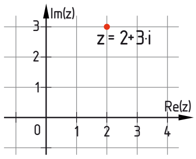
Jede reelle Zahl kann als Punkt auf der Zahlengeraden interpretiert werden. Da zwischen je zwei reellen Zahlen unendlich viele weitere liegen, muss man sich die Zahlengerade als vollständig besetzt vorstellen. Für die imaginären Zahlen benötigt man daher eine eigene Gerade.

Die durch diese beiden Geraden festgelegte Zahlenebene nennt man **Gauß'sche Zahlenebene**.
Jeder Punkt (a|b) dieser Zahlenebene entspricht einer komplexen Zahl.
Der Realteil wird auf der waagrechten Achse, der **reellen Achse**, aufgetragen, der Imaginärteil auf der senkrechten Achse, der **imaginären Achse**.
Nebenstehende Darstellungen sind üblich.





Die komplexe Zahl $z = 2 + 3 \cdot i$ hat den Realteil 2 und den Imaginärteil 3. Sie entspricht daher dem Punkt (2|3) in der Gauß'schen Zahlenebene.



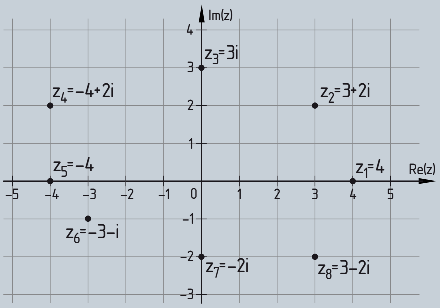
Komplexe Zahlen $z = a + b \cdot i$ bzw. $z = a + b \cdot j$ können als Zahlenpaare (a, b) aufgefasst und in der **Gauß'schen Zahlenebene** grafisch dargestellt werden.

Diese Darstellungsform ist zwar nach Carl Friedrich Gauß benannt, sie wurde jedoch von Jean-Robert Argand (schweizer Buchhändler, 1768 – 1822) entwickelt.

7.12 Stelle die angegebenen Zahlen in der Gauß'schen Zahlenebene dar.

$z_1 = 4$
$z_2 = 3 + 2i$
$z_3 = 3i$
$z_4 = -4 + 2i$
$z_5 = -4$
$z_6 = -3 - i$
$z_7 = -2i$
$z_8 = 3 - 2i$

Lösung:



7.13 Schreibe die in der Gauß'schen Zahlenebene in Abb. 7.1 dargestellten komplexen Zahlen an.

7.14 Zeichne die gegebenen komplexen Zahlen in der Gauß'schen Zahlenebene ein.
$z_1 = 2 - j$; $z_2 = 3 + 4j$; $z_3 = 2{,}5j$; $z_4 = -3 - 2j$; $z_5 = -3$; $z_6 = -4j$

7.15 Markiere in der Gauß'schen Zahlenebene jenen Bereich, für den gilt:
a) $\text{Re}(z) > 1$ **b)** $\text{Im}(z) < 0$ **c)** $|\text{Re}(z)| < 3$ **d)** $|\text{Im}(z)| > 4$

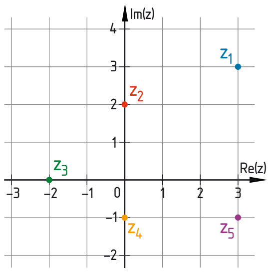


Abb. 7.1

7.2.3 Darstellungsformen von komplexen Zahlen

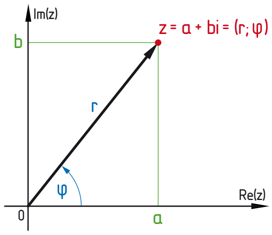
Komplexe Zahlen können auf verschiedene Arten angegeben bzw. veranschaulicht werden. Welche Darstellungsform verwendet wird, hängt unter anderem von den damit auszuführenden Rechenvorgängen ab.

Veranschaulichung als Zeiger in der Gauß'schen Zahlenebene

Stellt man die komplexe Zahl $z = a + b \cdot i$ in der Gauß'schen Zahlenebene dar, so bezeichnet man nicht nur den Punkt $(a|b)$ als komplexe Zahl, sondern auch den **Zeiger** vom Koordinatenursprung zu diesem Punkt.

Die bereits verwendete Schreibweise $\mathbf{z = a + b \cdot i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ bezeichnet man als **Komponentenform**, auch die Bezeichnungen Binomform oder arithmetische Form werden verwendet.

Die komplexe Zahl kann aber auch durch die Länge r des Zeigers und den Winkel φ angegeben werden. Man bezeichnet die **Länge** als **Betrag** $|z|$ und den **Winkel** als **Argument** (Polarwinkel) arg(z) der komplexen Zahl.

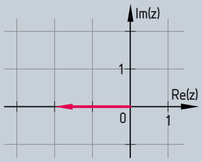


r und φ nennt man **Polarkoordinaten** von z ($z \neq 0$) und man schreibt: $z = (r; \varphi)$
Für $z = 0$ ist der Winkel φ nicht definiert und die Angabe in Polarkoordinaten nicht möglich.

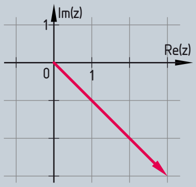
A C

7.16 Gib die dargestellte komplexe Zahl in Komponentenform und mit Polarkoordinaten an. Beschreibe deine Überlegungen.

a)



b)



Lösung:

a) $z = -2$ — Der Zeiger liegt auf der negativen reellen Achse.
$z = (2; 180°)$ — Die Länge des Zeigers ist 2 und der Winkel beträgt 180°.

b) $z = 3 - 3i$ — Die Koordinaten werden abgelesen.
$z = (\sqrt{18}; 315°)$ — Die Länge kann mithilfe des Satzes von Pythagoras berechnet werden, für φ gilt: $270° + 45° = 315°$

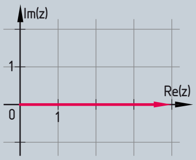
B

7.17 Stelle die gegebene komplexe Zahl als Zeiger in der Gauß'schen Zahlenebene dar.

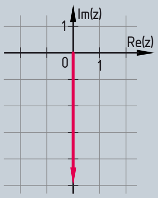
a) $z_1 = (4; 0°)$ **b)** $z_2 = (5; 270°)$

Lösung:

a)



b)



Bemerkung: Die komplexe Zahl $z_2 = (5; 270°)$ kann auch in der Form $z_2 = (5; -90°)$ angegeben werden.

Im Folgenden wird die Umrechnung von Komponentenform in Polarkoordinaten und umgekehrt gezeigt.

- **Komponentenform $z = a + bi$ $\rightarrow$ Polarkoordinaten $z = (r; \varphi)$**

  Betrag von z: $|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$

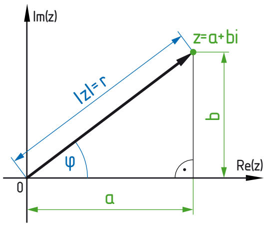
  Argument (Polarwinkel) von z:

  $\arg(z) = \varphi$ mit $\tan(\varphi) = \frac{b}{a}$ für $a \neq 0$

  Für $a = 0$ gilt: $b > 0 \Rightarrow \varphi = 90°$

  $b < 0 \Rightarrow \varphi = -90° \mathrel{\hat{=}} 270°$

  Beim Berechnen von φ mithilfe der Arcustangensfunktion ist zu beachten, in welchem Quadranten diese Zahl liegt.



ZB

Für die im 1. Quadranten liegende Zahl $z_1 = 3 + 5i$ gilt:

$|z_1| = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34} \approx 5{,}83$

$\tan(\varphi_1) = \frac{5}{3} \Rightarrow \varphi_1 = \arctan\left(\frac{5}{3}\right) \approx 59°$

$z_1 = (5{,}83; 59°)$

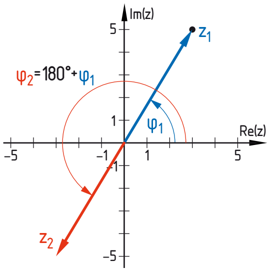
Für die im 3. Quadranten liegende Zahl $z_2 = -3 - 5i$ gilt:

$\tan(\varphi_2) = \frac{-5}{-3} = \frac{5}{3}$

In diesem Fall ist $\arctan\left(\frac{5}{3}\right)$ nicht der Winkel φ_2, sondern wieder der Winkel φ_1. Um φ_2 zu erhalten, müssen 180° addiert werden (vergleiche Abschnitt 5).

Für φ_2 gilt daher: $\varphi_2 = \arctan\left(\frac{5}{3}\right) + 180° \approx 239°$

$z_2 = (5{,}83; 239°)$

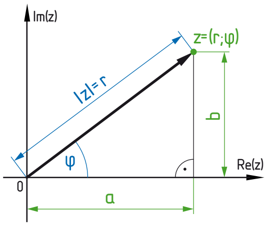


- **Polarkoordinaten $z = (r; \varphi)$ $\rightarrow$ Komponentenform $z = a + bi$**

  Die Umrechnung erfolgt mithilfe des rechtwinkligen Dreiecks mit den Seiten a, b und r.

  $\cos(\varphi) = \frac{AK}{HYP} = \frac{a}{r} \Rightarrow a = r \cdot \cos(\varphi)$

  $\sin(\varphi) = \frac{GK}{HYP} = \frac{b}{r} \Rightarrow b = r \cdot \sin(\varphi)$



Mithilfe der Polarkoordinaten lässt sich eine komplexe Zahl in folgenden **Polarformen** angeben.

- **Zahlenpaar, Versor**

  Die Angabe der Polarkoordinaten wird auch als Zahlenpaar bezeichnet: $z = (r; \varphi)$

  Vor allem bei technischen Anwendungen wird die Darstellung als **Versor** (Latein: „versor“ = sich drehen) verwendet:

  $z = r \angle\varphi$ [sprich: „z ist gleich r Versor φ“]

- **Trigonometrische Form**

  Mithilfe der Umrechnungsformeln von Polarkoordinaten in Komponentenform erhält man:

  $z = a + bi = r \cdot \cos(\varphi) + i \cdot r \cdot \sin(\varphi) = r \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))$

Komplexe Zahlen

- **Exponentialform**
  1748 wurde der von Leonhard Euler gezeigte Zusammenhang $\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi) = e^{i \cdot \varphi}$, der als **Euler'sche Formel** bezeichnet wird, erstmals veröffentlicht.
  Mit ihrer Hilfe kann jede komplexe Zahl $z = r \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))$ in folgender Form dargestellt werden:
  $z = r \cdot e^{i \cdot \varphi}$
  Der Winkel φ ist im **Bogenmaß** anzugeben, die Bezeichnung rad wird dabei üblicherweise nicht angeschrieben. Man findet in der Praxis auch die (streng mathematisch gesehen nicht korrekte) Angabe des Winkels im Gradmaß, zum Beispiel $z = e^{i \cdot 30°}$. Für weitere Berechnungen muss der Winkel dann ins Bogenmaß umgerechnet werden.

Darstellungsformen komplexer Zahlen

Komponentenform

$z = a + bi$ bzw. $z = a + bj$

Polarformen

$z = (r; \varphi)$ $\quad z = r \angle\varphi$ $\quad z = r \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))$ $\quad z = r \cdot e^{i \cdot \varphi}$

$z = r \cdot (\cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi))$ $\quad z = r \cdot e^{j \cdot \varphi}$

Umrechnungen

Komponentenform in Polarkoordinaten

$z = a + bi \;\rightarrow\; z = (r; \varphi)$

Betrag: $|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$

Argument: $\tan(\varphi) = \frac{b}{a},\ a \neq 0$

Dabei gilt: $a > 0 \Rightarrow \varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$ und

$a < 0 \Rightarrow \varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + 180°$

Polarkoordinaten in Komponentenform

$z = (r; \varphi) \;\rightarrow\; z = a + bi$

Realteil: $a = r \cdot \cos(\varphi)$

Imaginärteil: $b = r \cdot \sin(\varphi)$

Euler'sche Formel: $e^{i \cdot \varphi} = \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)$ bzw. $e^{j \cdot \varphi} = \cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi)$

Die Darstellung einer komplexen Zahl in Polarform ist nicht eindeutig. Zum Beispiel stellen die Zahlen $z_1 = (5; 70°)$, $z_2 = (5; 430°)$ und $z_3 = (5; 4\,750°)$ drei verschiedene Polarformen derselben komplexen Zahl dar, da gilt: $70° \mathrel{\hat{=}} 70° + 360° \mathrel{\hat{=}} \dots \mathrel{\hat{=}} 70° + k \cdot 360°$

Somit können unendlich viele verschiedene Polarkoordinaten die gleiche komplexe Zahl darstellen. Man bezeichnet $z = (r; \varphi)$ mit $0° \leq \varphi < 360°$ als den **Hauptwert der komplexen Zahl**, alle anderen als Nebenwerte. Im Allgemeinen beschränken wir uns auf die Angabe des Hauptwerts.

B

7.18 Gib die komplexe Zahl z in Komponentenform an, runde auf zwei Dezimalstellen.

a) $z = (6{,}6; 245°)$ **b)** $z = 3{,}5 \angle\frac{\pi}{2}$

Lösung:

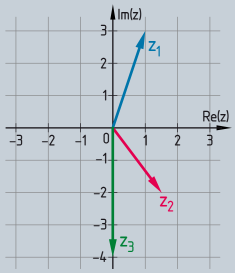
a) $\left.\begin{array}{l} a = r \cdot \cos(\varphi) \Rightarrow a = 6{,}6 \cdot \cos(245°) = -2{,}789... \\ b = r \cdot \sin(\varphi) \Rightarrow b = 6{,}6 \cdot \sin(245°) = -5{,}981... \end{array}\right\} z = (6{,}6; 245°) \approx -2{,}79 - 5{,}98i$

b) $\left.\begin{array}{l} a = 3{,}5 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \\ b = 3{,}5 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3{,}5 \end{array}\right\} z = 3{,}5i$

7.19 Erkläre, in welchem Quadranten bzw. auf welcher Achse die komplexe Zahl liegt und gib den Bereich an, in dem der Winkel φ liegt. Ermittle anschließend die Polarkoordinaten.

1) $z_1 = 1 + 3i$ **2)** $z_2 = 1{,}5 - 2i$ **3)** $z_3 = -4i$

Lösung:



1) z_1 liegt im 1. Quadranten, weil der Realteil und der Imaginärteil positiv sind.
Für den Winkel gilt daher: $0° < \varphi < 90°$

$\tan(\varphi_1) = \frac{3}{1} = 3 \Rightarrow \varphi_1 = 71{,}565...° \approx 71{,}6°$

$r_1 = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10} = 3{,}162...$

$z_1 = 1 + 3i \approx (3{,}2; 71{,}6°)$

2) z_2 liegt im 4. Quadranten, weil der Realteil positiv und der Imaginärteil negativ ist.
Für den Winkel gilt daher: $270° < \varphi < 360°$

$\tan(\varphi_2) = \frac{-2}{1{,}5} = -1{,}\dot{3} \Rightarrow \varphi_2 = -53{,}130...° \mathrel{\hat{=}} 306{,}869...°$

$r_2 = \sqrt{1{,}5^2 + (-2)^2} = \sqrt{6{,}25} = 2{,}5$

$z_2 = 1{,}5 - 2i \approx (2{,}5; 306{,}9°)$

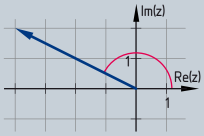
3) z_3 liegt auf der negativen imaginären Achse. Der Winkel φ beträgt daher 270°.

$r_3 = 4$

$z_3 = -4i = (4; 270°)$

7.20 Stelle $z = -4 + 2j$ in trigonometrischer Form dar. Erstelle zuerst eine Skizze und beschreibe deine Vorgehensweise.

Lösung:



z liegt im 2. Quadranten $\Rightarrow 90° < \varphi < 180°$

$r = \sqrt{(-4)^2 + 2^2} = \sqrt{20}$

$\tan(\varphi) = -\frac{2}{4} \Rightarrow \arctan\left(-\frac{2}{4}\right) = -26{,}565...°$

$\varphi = -26{,}565...° + 180° = 153{,}434...°$

$z \approx \sqrt{20} \cdot (\cos(153{,}43°) + j \cdot \sin(153{,}43°))$

Berechnung des Betrags:
$r = \sqrt{a^2 + b^2}$
Da die Arcustangensfunktion immer Winkel im 1. oder 4. Quadranten angibt, müssen zum Ergebnis 180° addiert werden.

7.21 Stelle $z = 10{,}65 \cdot e^{i \cdot 2{,}674}$ in der Form $z = a + bi$ dar.

Lösung:

$z = 10{,}65 \cdot (\cos(2{,}674) + i \cdot \sin(2{,}674))$

$z = 10{,}65 \cdot \cos(2{,}674) + i \cdot 10{,}65 \cdot \sin(2{,}674)$

$z \approx -9{,}51 + 4{,}80i$

- z in der trigonometrischen Schreibweise angeben.
- Ausmultiplizieren und Runden.

Komplexe Zahlen

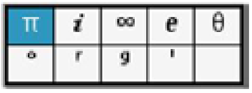
TE

GeoGebra, Mathcad: www.hpt.at

Technologieeinsatz: Eingabe und Darstellungsformen

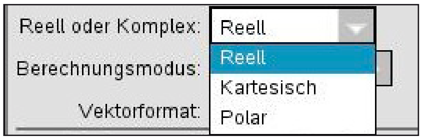
TI-Nspire

Komplexe Zahlen können in allen Darstellungsformen eingegeben werden.



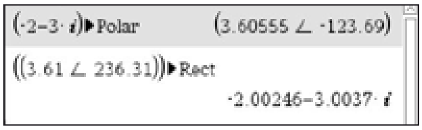
komplexe Einheit i ... ***i***
Variable i ... *i*

- Die imaginäre Einheit i kann mithilfe des Symbols i aus der Pi-Palette eingegeben werden. Damit können komplexe Zahlen in Komponentenform angegeben werden.
  Beachte: Eine mithilfe der Taste [I] eingegebene Variable i wird **nicht** als die imaginäre Einheit ***i*** erkannt, eine solche Variable i wird kursiv, aber nicht fett ausgegeben.

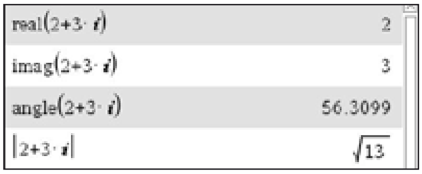


- Die Darstellungsform der Ausgabe kann unter **Einstellungen**, **Reell oder Komplex** gewählt werden, wobei die Auswahl **Kartesisch** für die Ausgabe in Komponentenform steht. Wird **Reell** gewählt, hängt das Format der Ausgabe vom gewählten Winkelmaß und der Form der Eingabe ab.

- Die Eingabe von Polarkoordinaten erfolgt in Versorform. Das Versor-Zeichen ∠ befindet sich im Sonderzeichenkatalog.
  Der Winkel kann in Grad- oder Bogenmaß eingegeben werden. Will man die Einstellung nicht ändern, so ist die Eingabe des °-Zeichens erforderlich.

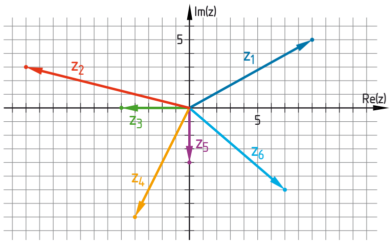


- Zur direkten Umrechnung von Komponenten- in Polarform bzw. umgekehrt stehen die Befehle **▶ Polar** und **▶ Rect** zur Verfügung, die im Menü **2: Zahl, 9: Komplex** zu finden sind oder eingetippt werden können, ▶ befindet sich im Sonderzeichenkatalog.



- Über das Menü **2: Zahl**, **9: Komplex**, **2: Realteil** kann der Realteil einer komplexen Zahl ermittelt werden. Ebenso erhält man den Imaginärteil mit **3: Imaginärteil**, das Argument mit **4: Polarwinkel** und den Betrag mit dem Befehl **5: Betrag**.

7.22 Gib die in der nebenstehenden Grafik dargestellten komplexen Zahlen z_1 bis z_6 in Komponentenform an.



7.23 Gib an, auf welcher Achse bzw. in welchem Quadranten der Gauß'schen Zahlenebene die gegebene Zahl liegt.

a) $z = 5 + 3i$	**c)** $z = -8$	**e)** $z = (5; 300°)$	**g)** $z = \left(7; \frac{5\pi}{4}\right)$
b) $z = (10; 180°)$	**d)** $z = (1; 270°)$	**f)** $z = (2; 172°)$	**h)** $z = (4{,}6; 320°)$

Aufgaben 7.24 – 7.25: Stelle die Zahlen als Zeiger in der Gauß'schen Zahlenebene dar.

7.24 **a)** $z = -2 + i$ **c)** $z = 7 - 3i$ **e)** $z = 3 + j$ **g)** $z = j - 5$ A
b) $z = -i$ **d)** $z = -9 - 4i$ **f)** $z = -2j$ **h)** $z = -4 - 2j$

7.25 **a)** $z = (5; 68°)$ **b)** $z = (3{,}5; 270°)$ **c)** $z = (2; 172°)$ **d)** $z = (4{,}6; 320°)$ A

Aufgaben 7.26 – 7.27: Fertige jeweils eine Skizze der komplexen Zahl an.

7.26 Gib z in trigonometrischer Form an, arbeite ohne Taschenrechner. A
a) $z = -6$ **b)** $z = 8i$ **c)** $z = 10$ **d)** $z = -2{,}5i$

7.27 Gib z in der Form $z = a + bi$ an, arbeite ohne Taschenrechner. A
a) $z = (5; 180°)$ **b)** $z = (3; 90°)$ **c)** $z = (22{,}8; 0°)$ **d)** $z = (7{,}6; 270°)$

7.28 Stelle die angegebenen komplexen Zahlen als Zeiger in der Gauß'schen Zahlenebene dar und gib sie in Komponentenform und in Exponentialform an. Arbeite ohne Taschenrechner. A B
$z_1 = 2\,\underline{/90°}$, $z_2 = 3\,\underline{/270°}$, $z_3 = 4 \cdot (\cos(\pi) + j \cdot \sin(\pi))$

7.29 Gib das Argument einer komplexen Zahl an, die auf der angegebenen Achse liegt. C
1) positive reelle Achse **3)** positive imaginäre Achse
2) negative reelle Achse **4)** negative imaginäre Achse

7.30 Begründe, welche der folgenden Aussagen wahr bzw. welche falsch sind. D
1) Ist $\mathrm{Re}(z) = 0$, so ist $\arg(z) = 0$.
2) Alle komplexen Zahlen mit $\mathrm{Im}(z) < 0$ liegen im 3. oder 4. Quadranten.
3) Liegt z im 2. Quadranten, so gilt: $\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + 180°$
4) Ist $\varphi = 0$ oder π, so ist $\mathrm{Im}(z) = 0$.

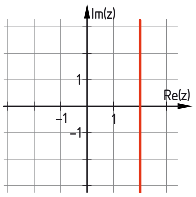
Aufgaben 7.31 – 7.33: Gib die komplexen Zahlen jeweils in allen Darstellungsformen an.

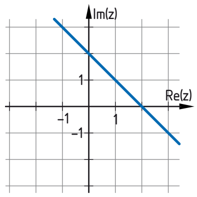
7.31 **a)** $z = -11 + 3i$ **b)** $z = 9 - 2i$ **c)** $z = (8{,}1; 262{,}8°)$ **d)** $z = (5{,}8; 329{,}0°)$ B

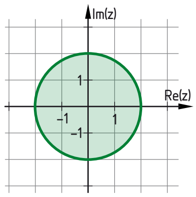
7.32 **a)** $z = 3{,}6 \cdot e^{j \cdot 1{,}7}$ **b)** $z = 5{,}0 \cdot e^{j \cdot 0{,}45}$ **c)** $z = 105{,}0 \cdot (\cos(290{,}3°) + j \cdot \sin(290{,}3°))$ B

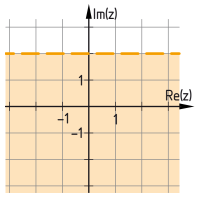
7.33 **a)** $z = 14{,}5\,\underline{/117°}$ **b)** $z = (0{,}5; 0{,}8\text{ rad})$ **c)** $z = 5{,}6 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$ B

7.34 Ordne den gekennzeichneten Bereichen der Gauß'schen Zahlenebene jeweils die richtige Bedingung zu: **A)** $|z| \leq 2$ **B)** $\mathrm{Re}(z) = 2$ **C)** $\mathrm{Im}(z) < 2$ **D)** $\mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z) = 2$ C

1)


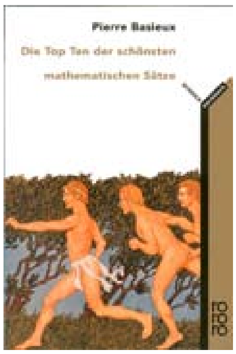
2)


3)


4)


7.35 Gib 5^i in der Form $z = a + bi$ an. Hinweis: $5 = e^{\ln(5)}$ B

7.36 Im Jahr 1990 fand einer der originellsten Schönheitswettbewerbe der letzten Jahrzehnte statt. Die Leserinnen und Leser der Zeitschrift „The Mathematical Intelligencer" wählten die zehn schönsten mathematischen Sätze. Das Ergebnis dieser Wahl ist als Taschenbuch erschienen. Der Gewinner war der Satz „$e^{i\pi} = -1$" von Leonhard Euler. C D
1) Beweise mithilfe der Euler'schen Formel den „schönsten Satz der Mathematik".
2) Recherchiere die Besonderheit dieses Satzes.



Komplexe Zahlen

7.3 Grundrechnungsarten in $\mathbb{C}$

7.3.1 Addition und Subtraktion komplexer Zahlen

Für komplexe Zahlen gelten ähnliche Rechengesetze wie für reelle Zahlen. Es eignen sich allerdings bestimmte Darstellungsformen für gewisse Rechenoperationen besser als andere.

Die **Summe** bzw. die **Differenz** der komplexen Zahlen $z_1 = a + bi$ und $z_2 = c + di$ ist definiert als

$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d) \cdot i$ bzw. $z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d) \cdot i$

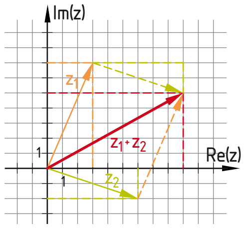
Es werden jeweils die Realteile und Imaginärteile der Zahlen addiert bzw. subtrahiert.

Grafisch können komplexe Zahlen in Zeigerdarstellung wie Vektoren addiert bzw. subtrahiert werden.

Addition

$z_1 = 3 + 7i$
$z_2 = 6 - 2i$

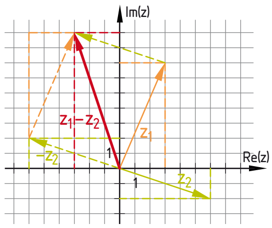
$$
\begin{aligned}
z_1 + z_2 &= (3 + 7i) + (6 - 2i) = \\
&= 3 + 7i + 6 - 2i = \\
&= 3 + 6 + 7i - 2i \\
z_1 + z_2 &= 9 + 5i
\end{aligned}
$$



Subtraktion

$z_1 = 3 + 7i$
$z_2 = 6 - 2i$

$$
\begin{aligned}
z_1 - z_2 &= (3 + 7i) - (6 - 2i) = \\
&= 3 + 7i - 6 + 2i = \\
&= 3 - 6 + 7i + 2i \\
z_1 - z_2 &= -3 + 9i
\end{aligned}
$$



Da die Addition bzw. die Subtraktion zweier komplexer Zahlen in der Darstellung $z = a + bi$ erfolgt, müssen komplexe Zahlen in anderen Darstellungsformen zuerst in diese Form umgerechnet werden.

7.37 Gegeben sind die komplexen Zahlen $z_1 = 3 + 4i$ und $z_2 = 5{,}831 \,\underline{/329{,}036°}$.

1) Berechne $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$ und $z_2 - z_1$.

2) Überprüfe deine Ergebnisse durch grafisches Addieren bzw. Subtrahieren.

Lösung:

1) $\mathrm{Re}(z_2) = 5{,}831 \cdot \cos(329{,}036°) = 5{,}00... \approx 5$

$\mathrm{Im}(z_2) = 5{,}831 \cdot \sin(329{,}036°) = -3{,}00... \approx -3$

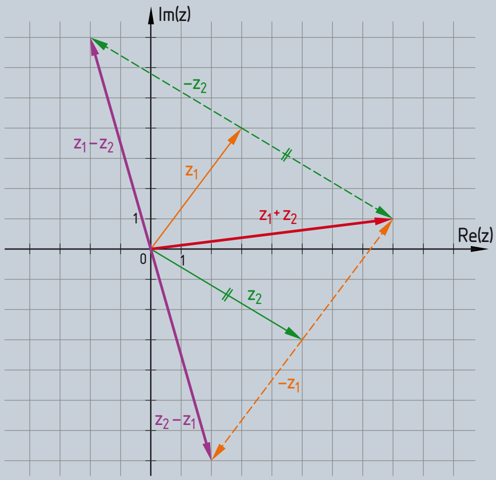
$z_2 = 5 - 3i$

$z_1 + z_2 = (3 + 4i) + (5 - 3i) = 3 + 4i + 5 - 3i = 8 + i$

$z_1 - z_2 = (3 + 4i) - (5 - 3i) = 3 + 4i - 5 + 3i = -2 + 7i$

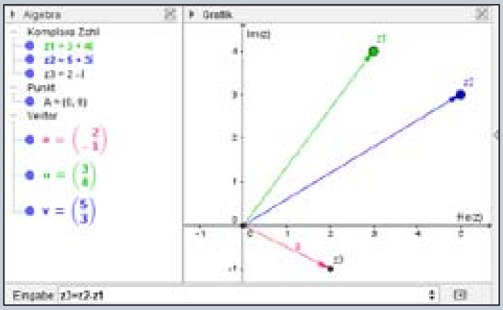
$z_2 - z_1 = (5 - 3i) - (3 + 4i) = 5 - 3i - 3 - 4i = 2 - 7i$

2)



7.38 Stelle $z_1 = 3 + 4i$ und $z_2 = 5 + 3i$ mithilfe von GeoGebra als komplexe Zeiger dar. Berechne $z_3 = z_2 - z_1$ und stelle den Zeiger dar. B

Lösung:



- GeoGebra interpretiert i als die imaginäre Einheit, solange keine Variable i verwendet wurde.
- Die komplexe Zahl wird als Punkt dargestellt. Um die Zeiger darzustellen, verwendet man Vektorbefehle (siehe Band 1, Abschnitt 9).
- Der Zeiger, der die Differenz darstellt, wird automatisch mit a bezeichnet.

7.39 Gib zwei komplexe Zahlen $z = a + bi$ mit $a, b \neq 0$ an, deren Summe A B
1) i, ***2)*** 1, ***3)*** $-i$, ***4)*** -1 ergibt.

7.40 Berechne die Summe und die Differenzen $z_1 - z_2$ und $z_2 - z_1$. Überprüfe deine Ergebnisse durch grafisches Addieren bzw. Subtrahieren. B D

a) $z_1 = 2 + 3i;\ z_2 = -3 + i$ **c)** $z_1 = -4 - 2i;\ z_2 = 5 - 5i$ **e)** $z_1 = -5 + i;\ z_2 = 1 + 2i$
b) $z_1 = -2 + i;\ z_2 = 5 + 6i$ **d)** $z_1 = 3 + 2i;\ z_2 = -4$ **f)** $z_1 = 4 - 3i;\ z_2 = 3i$

7.41 Gegeben sind: $z_1 = -3 - i;\ z_2 = 4 + 6i;\ z_3 = 5 - 2i;\ z_4 = -1;\ z_5 = -7i;\ z_6 = 2 - 4i;\ z_7 = 8i$ A B
Berechne zuerst den gesuchten Term und veranschauliche dann den Rechengang grafisch.

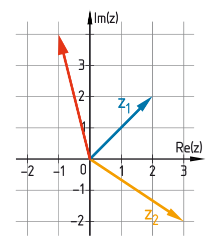
a) $z_1 - z_3 + z_2 - z_6$ **c)** $z_5 + z_7 + z_4 - z_1$ **e)** $z_3 - z_5 + z_4 - z_1$
b) $z_3 + z_6 - z_4 - z_2$ **d)** $z_7 - z_1 + z_5 - z_6$ **f)** $z_4 + z_2 - z_3 + z_7$

7.42 Berechne die Summe und die Differenzen $z_1 - z_2$ und $z_2 - z_1$. Überprüfe deine Ergebnisse durch grafisches Addieren bzw. Subtrahieren. B D

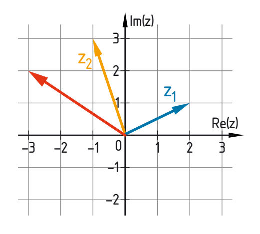
a) $z_1 = (5; 30°);\ z_2 = (1{,}4; 45°)$ **d)** $z_1 = 14 \cdot e^{j \cdot 1{,}73};\ z_2 = 8 \cdot e^{j \cdot 2{,}46}$
b) $z_1 = (2; 15°);\ z_2 = (6; 100°)$ **e)** $z_1 = 2 \cdot e^{j \cdot 2{,}5};\ z_2 = 4 \cdot e^{j \cdot 3{,}7}$
c) $z_1 = (12; 145°);\ z_2 = (3; 90°)$ **f)** $z_1 = e^{j \cdot 1{,}35};\ z_2 = 6 \cdot e^{j \cdot 0{,}66}$

7.43 Der rote Zeiger stellt das Ergebnis welcher Rechnung dar? Ordne zu. C

1



2



A	$z_1 + z_2$
B	$z_1 - z_2$
C	$z_2 - z_1$
D	$-z_1 - z_2$

7.44 Finde zwei komplexe Zahlen mit $\mathrm{Re}(z) \neq 0$ und $\mathrm{Im}(z) \neq 0$, deren Summe A C
1) reell, ***2)*** rein imaginär ist. Gib die Zahlen in Komponenten- und Polarform an.

7.45 Skizziere die komplexen Zahlen $z_1 = r\,\angle 0°$, $z_2 = r\,\angle 90°$ und $z_3 = z_1 + z_2$ in der Gauß'schen Zahlenebene. Gib die Polarform von z_3 an, ohne vorher auf Komponentenform umzurechnen. A C

7.3.2 Multiplikation komplexer Zahlen

Multiplikation in Komponentenform $z = a + bi$

Sind zwei komplexe Zahlen $z_1 = a + bi$ und $z_2 = c + di$ in Komponentenform gegeben, so können sie wie Binome multipliziert werden.

$$z_1 \cdot z_2 = (a + b \cdot i) \cdot (c + d \cdot i) =$$
$$= a \cdot c + b \cdot i \cdot c + a \cdot d \cdot i + b \cdot i \cdot d \cdot i =$$
$$= ac + bc \cdot i + ad \cdot i + bd \cdot i^2 = ac + bc \cdot i + ad \cdot i - bd =$$
$$= ac - bd + (bc + ad) \cdot i$$

- $i^2 = -1$

Multiplikation in Komponentenform

Die komplexen Zahlen $z_1 = a + bi$ und $z_2 = c + di$ werden wie Binome multipliziert, wobei $i^2 = -1$ berücksichtigt wird.

B

7.46 Berechne $z = (2 + 3i) \cdot (4 - 7i)$.

Lösung:

$$z = (2 + 3i) \cdot (4 - 7i) = 2 \cdot 4 + 3i \cdot 4 - 2 \cdot 7i - 3i \cdot 7i =$$
$$= 8 + 12i - 14i - 21i^2 = 8 + 12i - 14i + 21 = 29 - 2i$$

- $-21i^2 = -21 \cdot (-1) = 21$

Multiplikation in Polarform

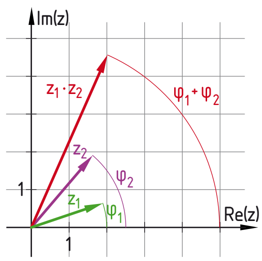
Die Multiplikation in Exponentialform erfolgt nach den Rechenregeln für Potenzen.

$$z_1 = r_1 \cdot e^{i \cdot \varphi_1}, \quad z_2 = r_2 \cdot e^{i \cdot \varphi_2}$$
$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot e^{i \cdot \varphi_1} \cdot r_2 \cdot e^{i \cdot \varphi_2} = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i \cdot \varphi_1 + i \cdot \varphi_2} = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i \cdot (\varphi_1 + \varphi_2)}$$

Bei der Multiplikation werden also die **Beträge** der beiden Zahlen miteinander **multipliziert** und die **Argumente addiert**.

Analog gilt für die weiteren Schreibweisen:

$$z_1 \cdot z_2 = (r_1 \underline{/\varphi_1}) \cdot (r_2 \underline{/\varphi_2}) = (r_1 \cdot r_2) \underline{/(\varphi_1 + \varphi_2)} \text{ bzw.}$$
$$z_1 \cdot z_2 = (r_1; \varphi_1) \cdot (r_2; \varphi_2) = (r_1 \cdot r_2; \varphi_1 + \varphi_2)$$



Um den Hauptwert zu erhalten, muss man gegebenenfalls Vielfache von 2π bzw. 360° subtrahieren.

Wie die grafische Darstellung verdeutlicht, entspricht die Multiplikation zweier komplexer Zahlen einer **Drehstreckung**. Dabei wird der Zeiger z_1 um den Faktor $|z_2| = r_2$ gestreckt und gleichzeitig um den Winkel φ_2 gedreht.

ZB

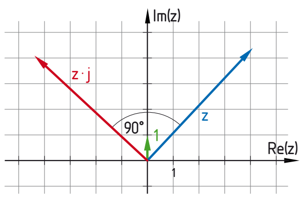
Multiplikation einer komplexen Zahl z mit der imaginären Einheit j

Polarform von j: (1; 90°)

Polarform von z: $(r; \varphi)$

$z \cdot j = (r; \varphi) \cdot (1; 90°) = (r \cdot 1; \varphi + 90°) = (r; \varphi + 90°)$

Durch die Multiplikation mit j wird der Zeiger um 90° in positiver Richtung gedreht, die Länge bleibt gleich.



Die **Multiplikation komplexer Zahlen** entspricht einer Drehstreckung.
Die Multiplikation mit i bzw. j entspricht einer Drehung um 90° in positiver Richtung.

Multiplikation in Polarform

$z_1 = r_1 \cdot e^{i \cdot \varphi_1} = (r_1; \varphi_1) = r_1 \underline{/\varphi_1}; \quad z_2 = r_2 \cdot e^{i \cdot \varphi_2} = (r_2; \varphi_2) = r_2 \underline{/\varphi_2}$

$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i \cdot (\varphi_1 + \varphi_2)} = (r_1 \cdot r_2; \varphi_1 + \varphi_2) = r_1 \cdot r_2 \underline{/(\varphi_1 + \varphi_2)}$

$\quad = r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$

bzw. $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{j \cdot (\varphi_1 + \varphi_2)} = r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + j \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$

7.47 Berechne das Produkt der komplexen Zahlen: $z_1 = 4{,}5 \cdot e^{i \cdot 5}$ und $z_2 = 1{,}8 \cdot e^{i \cdot 4}$

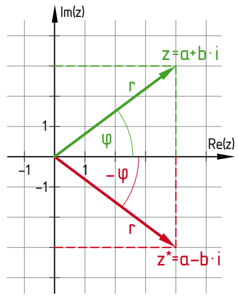
Lösung:

$z = z_1 \cdot z_2 = 4{,}5 \cdot e^{i \cdot 5} \cdot 1{,}8 \cdot e^{i \cdot 4} =$
$\quad = 4{,}5 \cdot 1{,}8 \cdot e^{i \cdot 5} \cdot e^{i \cdot 4} =$
$\quad = 8{,}1 \cdot e^{i \cdot 9} = 8{,}1 \cdot e^{i \cdot (9 - 2\pi)}$
$z \approx 8{,}1 \cdot e^{i \cdot 2{,}7}$ ... Hauptwert

- Die Beträge werden multipliziert, die Winkel werden addiert.
- Hauptwert von z berechnen.

Konjugiert komplexe Zahlen

Unterschiedet sich zwei komplexe Zahlen lediglich durch das Vorzeichen des Imaginärteils, also $z = a + b \cdot i$ und $z^* = a - b \cdot i$, so nennt man **z*** die **konjugiert komplexe Zahl** zu **z**. Grafisch interpretiert entspricht das einer Spiegelung an der reellen Achse.



Die Zeiger von **z** und **z*** sind gleich lang, der Winkel **φ^*** = **$-\varphi$**.

Multipliziert man $z = r \underline{/\varphi}$ mit $z^* = r \underline{/-\varphi}$, so gilt:

$z \cdot z^* = (r \cdot r) \underline{/(\varphi + (-\varphi))} = r^2 \underline{/0} \Rightarrow z \cdot z^* = |z|^2 \in \mathbb{R}$

Oft wird statt z* die (nicht normgerechte) Schreibweise $\bar{z}$ verwendet.

Die **Multiplikation konjugiert komplexer Zahlen** $z = a + b \cdot i$ und $z^* = a - b \cdot i$ ergibt das Quadrat des Betrags von z, also eine reelle Zahl.

$z \cdot z^* = |z|^2 = a^2 + b^2$

Aufgaben 7.48 – 7.50: Berechne jeweils das Produkt der beiden Zahlen.

7.48 **a)** $z_1 = 7 - 3i$; $z_2 = -1 + 5i$ **b)** $z_1 = 18 - i$; $z_2 = -14 + 22i$ **c)** $z_1 = 4 + 6i$; $z_2 = 9 - 2i$

7.49 **a)** $z_1 = (2; 15°)$; $z_2 = (7; 53°)$ **b)** $z_1 = (3; 240°)$; $z_2 = (6; 265°)$ **c)** $z_1 = 2 \underline{/35°}$; $z_2 = 4 \underline{/\frac{\pi}{6}}$

7.50 **a)** $z_1 = 13 \cdot e^{j \cdot 0{,}8}$; $z_2 = e^{j \cdot 0{,}6}$ **b)** $z_1 = 3{,}4 \cdot e^{j \cdot 1{,}43}$; $z_2 = 4 \cdot e^{j \cdot \frac{3\pi}{4}}$ **c)** $z_1 = 2 \cdot e^{i \cdot \frac{3\pi}{2}}$; $z_2 = 3{,}5 \cdot e^{i \cdot \frac{5\pi}{6}}$

7.51 Multipliziere $z = -4 + 7i$ mit den angegebenen Zahlen. Erkläre, wie diese Multiplikationen grafisch interpretiert werden können.

1) $z_1 = -i$ **2)** $z_2 = \left(1; \frac{\pi}{2}\right)$ **3)** $z_3 = -1$ **4)** $z_4 = 2 \underline{/90°}$ **5)** $z_5 = 4 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{2}}$

7.52 Gib z* an und berechne $z \cdot z^*$.

a) $z = 3 + 5i$ **b)** $z = 4i$ **c)** $z = 1 + i$ **d)** $z = 3i - 4$ **e)** $z = 5$

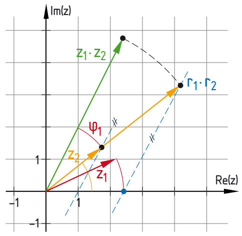
7.53 Formuliere die angegebenen Zusammenhänge mit eigenen Worten und beweise sie.

a) $z + z^* = 2a$ **b)** $z - z^* = 2bi$ **c)** $(z^*)^* = z$

7.54 Das Produkt zweier komplexer Zahlen mit $\mathrm{Re}(z) \neq 0$ und $\mathrm{Im}(z) \neq 0$, die nicht konjugiert komplex sind, soll reell sein. Beschreibe, wie diese beiden Zahlen zusammenhängen.

7.55 Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch? Gib jeweils Beispiele bzw. Gegenbeispiele an und begründe deine Antworten.
1) Der Multiplikation einer komplexen Zahl mit $(-j)$ entspricht eine Drehung um 90° in negative Richtung.
2) Wird eine komplexe Zahl mit einer reellen Zahl multipliziert, ändert sich das Argument, nicht aber der Betrag der Zahl.
3) Für alle komplexen Zahlen gilt: $\mathrm{Re}(z_1 \cdot z_2) = \mathrm{Re}(z_1) \cdot \mathrm{Re}(z_2)$

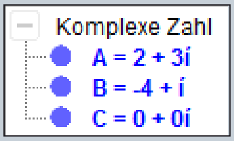
7.56 Für welche Zahl z_2 hat die Multiplikation das angegebene Ergebnis? Begründe deine Antwort.
a) $z_1 = a + bi$; $z_1 \cdot z_2 = -b + ai$
b) $z_1 = r\underline{/\varphi}$; $z_1 \cdot z_2 = 2r\underline{/\varphi}$
c) $z_1 = r\underline{/\varphi}$; $z_1 \cdot z_2 = 1\underline{/0}$
d) $z_1 = a + bi$; $z_1 \cdot z_2 = 2b - 2ai$

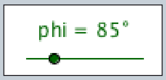


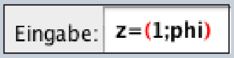
7.57 ***1)*** Beschreibe anhand der Abbildung, wie komplexe Zahlen grafisch multipliziert werden können.
2) Multipliziere $z_1 = 1 + 3i$ mit $z_2 = 2 + 1{,}5i$ grafisch und überprüfe dein Ergebnis durch eine Rechnung.

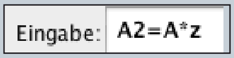
7.58 Erstelle in GeoGebra eine Animation, in der sich das Dreieck mit den Eckpunkten A(2|3), B(–4|1) und C(0|0) um den Punkt C dreht. Arbeite dabei mit der Multiplikation komplexer Zahlen.

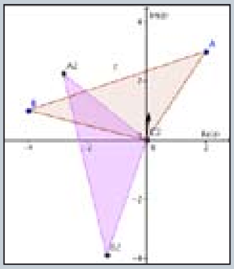
Lösung:











- Die Eckpunkte des Dreiecks werden als komplexe Zahlen in der Gauß'schen Zahlenebene interpretiert. Bei der Eingabe, zB **A = 2 + 3i**, werden die Punkte automatisch dargestellt. Das Dreieck wird mithilfe von **Vieleck** erstellt.
- Der Drehung entspricht die Multiplikation mit $z = 1\underline{/\varphi}$. Für **phi** wird ein Schieberegler definiert, der von 0° bis 360° läuft. Danach wird die Variable z in Polarkoordinaten eingegeben, indem ein Strichpunkt (**;**) als Trennzeichen verwendet wird: **z = (1;phi)**
- Die Eckpunkte des rotierenden Dreiecks werden jeweils durch Multiplizieren mit z ermittelt, zB: **A2 = A*z**
- Wird der Schieberegler auf einen beliebigen Wert $\neq 0$ eingestellt, kann mithilfe von **Vieleck** das Dreieck mit den Eckpunkten A2, B2 und C2 eingezeichnet werden.
- Beim Schieberegler kann mittels rechter Maustaste **Animation ein** aktiviert werden, sodass sich das Dreieck dreht.

7.59 Ändere die Animation aus 7.58 so ab, dass
a) das Dreieck gegen den Uhrzeigersinn rotiert und dabei kontinuierlich größer wird.
b) das Dreieck um den Eckpunkt A rotiert. Hinweis: $B2 = (B - A) \cdot z + A$, C2 analog

7.3.3 Division komplexer Zahlen

Die Division ist wie die Multiplikation in allen Darstellungsformen möglich. Wie bei den reellen Zahlen wird vorausgesetzt, dass der Divisor ungleich null ist.

Division in Komponentenform $z = a + bi$

Der Quotient zweier komplexer Zahlen $z = \frac{a + bi}{c + di}$ ist im Allgemeinen keine reelle Zahl. Damit der Quotient in der Form $z = \text{Re}(z) + \text{Im}(z) \cdot i$ angegeben werden kann, muss der Bruch so umgeformt werden, dass im Nenner eine reelle Zahl steht.

Es wurde bereits gezeigt, dass das Produkt konjugiert komplexer Zahlen eine reelle Zahl ist:

$$(c + di) \cdot (c - di) = c^2 - d^2 i^2 = c^2 + d^2$$

Wird nun der Bruch $z = \frac{a + bi}{c + di}$ mit $(c - di)$ erweitert, so erhält man eine reelle Zahl im Nenner und kann Realteil und Imaginärteil der Zahl getrennt angeben.

ZB

$$\frac{13 - i}{3 + 5i} = \frac{(13 - i)}{(3 + 5i)} \cdot \frac{(3 - 5i)}{(3 - 5i)} =$$
$$= \frac{39 - 3i - 65i + 5i^2}{3^2 - (5i)^2} = \frac{39 - 3i - 65i - 5}{3^2 + 5^2} =$$
$$= \frac{34 - 68i}{9 + 25} = \frac{34 - 68i}{34} =$$
$$= \frac{34}{34} - \frac{68i}{34} = 1 - 2i$$

- Der Bruch wird mit der konjugiert komplexen Zahl des Nenners erweitert.
- Im Nenner erhält man dadurch eine reelle Zahl („Quadrat des Realteils + Quadrat des Imaginärteils").
- Nun kann man Realteil und Imaginärteil getrennt anschreiben.

Bei der **Division** $\frac{z_1}{z_2}$ mit $z_1 = a + bi$ und $z_2 = c + di$ wird der Bruch mit der konjugiert komplexen Zahl des Nenners $z_2^* = c - di$ erweitert.
Das Ergebnis wird in der Form $z = \text{Re}(z) + \text{Im}(z) \cdot i$ angegeben.

7.60 Ermittle den Kehrwert von $z = a + bi$ in Komponentenform. Welchen Zusammenhang kannst du aufgrund des Ergebnisses erkennen? B C

Lösung:

$$z = a + bi \Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{1}{a + bi}$$

$$\frac{1}{a + bi} = \frac{1 \cdot (a - bi)}{(a + bi) \cdot (a - bi)} =$$
$$= \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{z^*}{|z|^2}$$

- Erweitern mit der konjugiert komplexen Zahl des Nenners.

Bildet man den Kehrwert einer komplexen Zahl, so erhält man die konjugiert komplexe Zahl, gebrochen durch das Quadrat des Betrags der Zahl.

Division in Polarform

Die Division erfolgt wie die Multiplikation nach den Rechenregeln für Potenzen:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 \cdot e^{i \cdot \varphi_1}}{r_2 \cdot e^{i \cdot \varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{e^{i \cdot \varphi_1}}{e^{i \cdot \varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{(i \cdot \varphi_1 - i \cdot \varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i \cdot (\varphi_1 - \varphi_2)}$$

ZB $z_1 = 8 \cdot e^{j \cdot \pi}$; $z_2 = 2 \cdot e^{j \cdot \frac{\pi}{4}}$; $\frac{z_1}{z_2} = \frac{8}{2} \cdot e^{j \cdot \left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)} = 4 \cdot e^{j \cdot \frac{3\pi}{4}}$

Bei der Division komplexer Zahlen in Polarform werden die **Beträge** der beiden Zahlen **dividiert** und die **Argumente subtrahiert**.

Analog gilt für die weiteren Schreibweisen:

Division komplexer Zahlen in Polarform

$z_1 = r_1 \cdot e^{i \cdot \varphi_1} = (r_1; \varphi_1) = r_1 \angle\varphi_1; \quad z_2 = r_2 \cdot e^{i \cdot \varphi_2} = (r_2; \varphi_2) = r_2 \angle\varphi_2$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i \cdot (\varphi_1 - \varphi_2)} = \left(\frac{r_1}{r_2}; \varphi_1 - \varphi_2\right) = \frac{r_1}{r_2} \angle(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$

bzw. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{j \cdot (\varphi_1 - \varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + j \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$

7.61 Berechne den Quotienten der beiden Zahlen $z_1 = 18 \angle 29°$ und $z_2 = 8 \angle 112°$.

Lösung:

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{18 \angle 29°}{8 \angle 112°} = \frac{18}{8} \angle(29° - 112°) =$

$= 2{,}25 \angle(-83°) = 2{,}25 \angle 277°$

- Die Beträge werden dividiert, die Winkel werden subtrahiert.
- Die Addition von 360° liefert den Hauptwert.

7.62 Zeige, dass gilt: $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$

Lösung:

$z = r \cdot e^{j \cdot \varphi}$ mit $|z| = r$

$\frac{1}{z} = \frac{1 \cdot e^{j \cdot 0}}{r \cdot e^{j \cdot \varphi}} = \frac{1}{r} \cdot e^{j \cdot (-\varphi)} \Rightarrow \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{r} = \frac{1}{|z|}$ q. e. d.

- quod erat demonstrandum (latein: was zu zeigen war)

7.63 Berechne jeweils den Quotienten $\frac{z_1}{z_2}$.

a) $z_1 = 6 + 7i$; $z_2 = -i$ **c)** $z_1 = -3 - 9i$; $z_2 = i$ **e)** $z_1 = 23 - i$; $z_2 = -3i$
b) $z_1 = 1$; $z_2 = -9 + 5j$ **d)** $z_1 = j$; $z_2 = -3 + 11j$ **f)** $z_1 = -j$; $z_2 = 7 + 15j$

Aufgaben 7.64 – 7.66: Berechne jeweils die Quotienten $\frac{z_1}{z_2}$ und $\frac{z_2}{z_1}$.

7.64 **a)** $z_1 = 32 \angle 120°$; $z_2 = 4 \angle \frac{9\pi}{4}$ **b)** $z_1 = 3 \angle \frac{\pi}{6}$; $z_2 = 4{,}5 \angle 1{,}3$ **c)** $z_1 = 7{,}7 \angle 80°$; $z_2 = 2 \angle 2°$

7.65 **a)** $z_1 = (1{,}3; 4°)$; $z_2 = (2; 77°)$ **b)** $z_1 = (2{,}6; 120°)$; $z_2 = (24; 256°)$ **c)** $z_1 = (7{,}7; 80°)$; $z_2 = (2; 2°)$

7.66 **a)** $z_1 = 3 \cdot e^{i \cdot 0{,}5}$; $z_2 = 9 \cdot e^{i \cdot 0{,}6}$ **b)** $z_1 = 10 \cdot e^{i \cdot 0{,}8}$; $z_2 = 6 \cdot e^{i \cdot \frac{7\pi}{8}}$ **c)** $z_1 = 4{,}5 \cdot e^{i}$; $z_2 = e^{i \cdot 4{,}5}$

7.67 Gib $\frac{1}{z}$ in Komponentenform und in Polarform an. Beschreibe deinen Rechenweg.

a) $z = i$ **b)** $z = -3i$ **c)** $z = 2 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{2}}$ **d)** $z = \frac{\sqrt{2}}{2} \angle 45°$

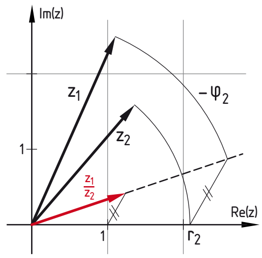
7.68 Begründe, durch welche komplexe Zahl man z dividieren muss, um w zu erhalten.

a) $z = r \angle\varphi$, $w = 1 \angle\varphi$ **b)** $z = a + bi$, $w = b - ai$ **c)** $z = e^{i\varphi}$, $w = r$

7.69 **1)** Beschreibe mit eigenen Worten, wie $\frac{z_1}{z_2}$ grafisch dargestellt werden kann.

2) Ermittle $\frac{z_1}{z_2}$ grafisch. Überprüfe das Ergebnis durch eine Rechnung.

a) $z_1 = 5 + 12i$; $z_2 = (4; 35°)$ **b)** $z_1 = (10; 50°)$; $z_2 = 2i$



7.70 Erkläre, welche grafische Bedeutung die Division einer komplexen Zahl durch die imaginäre Einheit j hat.

Verbindung der vier Grundrechnungsarten

7.71 Gegeben ist die komplexe Zahl z. Berechne $z + \frac{1}{z}$.

a) $9 - 7i$ **b)** $-3 + 5i$ **c)** $(6{,}5; 32°)$ **d)** $8{,}3 \angle 80°$ **e)** $4 \cdot e^{i \cdot 1{,}3}$ **f)** $e^{i \cdot 5{,}35}$

B

7.72 Gegeben ist die komplexe Zahl z. Berechne $z - \frac{1}{z}$.

a) $-1 + 3i$ **b)** $13 - 7i$ **c)** $27{,}7 \angle 39°$ **d)** $(13{,}4; 41°)$ **e)** $8{,}1 \cdot e^{i \cdot 4{,}44}$ **f)** $e^{i \cdot 3{,}21}$

B

7.73 Gib das Ergebnis in der Form $(r; \varphi)$ an.

$z_1 = 10 + 3i$, $z_2 = 9 - i$, $z_3 = -4 - 7i$ und $z_4 = -2 + 5i$

a) $2z_1 \cdot z_3 - 3z_4 + 1$ **b)** $4 - z_2 - z_4 \cdot z_1 - 7i$ **c)** $z_3 \cdot z_2 \cdot z_1 + z_4 + 5$ **d)** $-z_4 \cdot z_1 + 5z_4 - i$

B

7.74 Führe die Berechnungen in Komponentenform durch.

$z_1 = 5 + 12i$, $z_2 = 7 - 13i$, $z_3 = 24i$ und $z_4 = -8 + 5i$

a) $z_2 : z_1 - z_3 : z_4$ **b)** $z_1 \cdot z_4 + z_3 \cdot z_2$ **c)** $z_1 : z_2 - z_3 \cdot z_4$ **d)** $z_4 \cdot z_2 + z_1 : z_3$

B

7.75 Gib das Ergebnis in allen Darstellungsformen an.

$z_1 = 8 + 4i$, $z_2 = (18{,}6; 126{,}25°)$ und $z_3 = 17 \cdot e^{i \cdot 0{,}231}$

a) $(z_3 - z_2) \cdot z_3 + z_1$ **b)** $z_3 \cdot (z_1 + z_2) : z_2$ **c)** $(z_1 : z_3) : (z_2 + z_1)$ **d)** $(z_3 + z_1) : z_3 - z_1$

A B

7.76 Gib das Ergebnis in Komponentenform an.

a) $z = \frac{j}{1 + bj} + j$ **b)** $z = \frac{1 + aj}{a - j}$ **c)** $z = j \cdot \left(a + \frac{1}{bj}\right)$ **d)** $z = \frac{1}{bj} + \frac{cj}{d}$

B

7.77 Berechne den Ausdruck und gib den Real- und den Imaginärteil an.

a) $z = \frac{R \cdot j \cdot \omega L}{R + j \cdot \omega L}$ **b)** $z = j \cdot \omega L + \frac{1}{j \cdot \omega C}$ **c)** $z = \frac{j \cdot \omega L \cdot \frac{1}{j \cdot \omega C}}{j \cdot \omega L + \frac{1}{j \cdot \omega C}}$

B C

Vermischte Aufgaben

7.78 Welche der Behauptungen sind richtig, welche falsch? Begründe deine Antwort und gib Beispiele bzw. Gegenbeispiele an. Für alle komplexen Zahlen w, z gilt:

1) $w^* + z^* = (w + z)^*$ **3)** $(z^*)^* = -z$ **5)** $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{\mathrm{Re}(z)}$

2) $\mathrm{Im}(w^*) = -\mathrm{Im}(w)$ **4)** $|-z| = |z^*|$ **6)** $\arg(z \cdot z^*) = 0$

C D

7.79 Wie müssen a und b gewählt werden, damit $z = \frac{1}{z^*}$ gilt? Nenne drei Beispiele.

A B

7.80 **1)** Zeige folgende Aussage für $z = -4 + 12i$.

2) Beweise allgemein die Gültigkeit der Aussage.

a) $1 - z^* = (1 - z)^*$ **b)** $\left(\frac{1}{z}\right)^* = \frac{1}{z^*}$

B D

7.81 Beweise, dass für $z_2 \neq 0$ gilt: $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* = \frac{z_1^*}{z_2^*}$

D

7.82 Eine komplexe Zahl z liegt im 2. Quadranten. In welchem Quadranten liegt dann

a) $-z$? **b)** $\frac{1}{z}$? **c)** $-z^*$?

C

7.83 Gib den Zusammenhang zwischen den Argumenten der beiden komplexen Zahlen an und veranschauliche diesen grafisch.

a) z und z^* **b)** z und $-z^*$ **c)** z und $\frac{1}{z}$

A C

7.84 Kennzeichne alle Zahlen in der Gauß'schen Zahlenebene, die die Bedingung erfüllen.

a) $|z| - 1 < 4$ **b)** $z \cdot z^* = 9$ **c)** $z + z^* = 4$ **d)** $\mathrm{Im}(z + 2z^*) = 9$

B C

7.4 Potenzen komplexer Zahlen

7.4.1 Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

B **7.85** Berechne durch Ausmultiplizieren. **1)** $(5 + i)^2$ **2)** $(7; 11{,}3°)^2$ **3)** $(3{,}5 \cdot e^{i \cdot 0{,}66})^2$

Komplexe Zahlen können in allen Darstellungsformen multipliziert und daher auch potenziert werden. Ist z in Komponentenform gegeben, kann $z^n = (a + bi)^n$ mithilfe der binomischen Formeln berechnet werden. Da dies im Allgemeinen zeitaufwändig ist, werden komplexe Zahlen meist in Polarform potenziert. Es gilt:

$z = r \cdot e^{i \cdot \varphi}$

$z^n = (r \cdot e^{i \cdot \varphi})^n = r^n \cdot (e^{i \cdot \varphi})^n = r^n \cdot e^{i \cdot n \cdot \varphi}$

- Die Rechenregeln für Potenzen gelten auch für komplexe Zahlen.

Eine komplexe Zahl wird also potenziert, indem man den **Betrag potenziert** und das **Argument** mit dem Exponenten **multipliziert**. Analog gilt daher für die weiteren Schreibweisen:

$z = (r; \varphi) \;\rightarrow\; z^n = (r^n; n \cdot \varphi)$ bzw. $z = r\,\underline{/\varphi} \;\rightarrow\; z^n = r^n\,\underline{/n \cdot \varphi}$

$z = r \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)) \;\rightarrow\; z^n = r^n \cdot (\cos(n \cdot \varphi) + i \cdot \sin(n \cdot \varphi))$

Für r = 1 nennt man die letzte Formel den **Satz von de Moivre**, benannt nach Abraham de Moivre (französischer Mathematiker, 1667 – 1754). Sie wurde bereits im 18. Jh. angewendet.

Komplexe Zahlen werden **potenziert**, indem man den Betrag potenziert und das Argument mit dem Exponenten multipliziert.

$z^n = r^n \cdot e^{i \cdot n \cdot \varphi} = (r^n; n \cdot \varphi) = r^n\,\underline{/n \cdot \varphi} = r^n \cdot (\cos(n \cdot \varphi) + i \cdot \sin(n \cdot \varphi))$

bzw. $z^n = r^n \cdot e^{j \cdot n \cdot \varphi} = r^n \cdot (\cos(n \cdot \varphi) + j \cdot \sin(n \cdot \varphi))$

Satz von de Moivre: $(\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))^n = \cos(n \cdot \varphi) + i \cdot \sin(n \cdot \varphi)$

B **7.86** Berechne z^{17} für $z = -1{,}2 + 0{,}5i$.

Lösung:

$z = 1{,}3\,\underline{/157{,}38...°}$

- Die Zahl wird in Polarform angegeben.

$z^{17} = 1{,}3^{17}\,\underline{/157{,}38...° \cdot 17} =$

$= 1{,}3^{17} \cdot (\cos(157{,}38...° \cdot 17) + i \cdot \sin(157{,}38...° \cdot 17))$

$z^{17} \approx -78{,}69 + 35{,}92i$

- Der Betrag wird mit dem Exponenten potenziert. Der Winkel wird mit dem Exponenten multipliziert.

B **7.87** Berechne mithilfe der binomischen Formeln und in Polarform.

a) $(2 + 5i)^2$ **b)** $(i - 1)^3$ **c)** $(-2 + 3i)^2$ **d)** $(-2 - 3i)^3$

A B **7.88** Berechne die Potenz und stelle das Ergebnis **1)** in Komponentenform, **2)** in Polarform dar.

a) $(1 + 3i)^5$ **c)** $(3{,}3\,\underline{/20°})^3$ **e)** $\left(4; \frac{\pi}{3}\right)^5$ **g)** $(2 \cdot e^{2{,}5i})^5$

b) $(-2 + 4{,}3i)^4$ **d)** $(0{,}8\,\underline{/1{,}4})^6$ **f)** $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 45°\right)^2$ **h)** $(1{,}2 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{4}})^4$

C **7.89** Für welche Werte von n ist $(2\,\underline{/45°})^n$ **1)** eine rein reelle, **2)** eine rein imaginäre Zahl?

C **7.90** Für welche Werte von a liegt $\left(1\,\underline{/\frac{a\pi}{2}}\right)^3$ auf der **1)** positiven, **2)** negativen imaginären Achse?

D **7.91** Zeige, dass gilt: $z^{-n} = \frac{1}{z^n}$

7.4.2 Potenzen mit rationalen Exponenten (Wurzeln)

Bereits in Abschnitt 7.1 wurde festgestellt, dass die Definition der komplexen Einheit als $i^2 = -1$ Auswirkungen auf den Umgang mit Wurzeln hat. Im Folgenden wird diese Problematik nun genauer untersucht.

ZB: z^3 wird für $z_1 = 2\,\underline{/30°}$, $z_2 = 2\,\underline{/150°}$ und $z_3 = 2\,\underline{/270°}$ ermittelt und in der Form $z = a + bi$ angegeben.

$z_1 = (2, 30°)^3 = (2^3; 3 \cdot 30°) = (8; 90°) = 8i$
$z_2 = (2, 150°)^3 = (2^3; 3 \cdot 150°) = (8; 450°) = 8i$
$z_3 = (2, 270°)^3 = (2^3; 3 \cdot 270°) = (8; 810°) = 8i$

In allen drei Fällen erhält man als Ergebnis für die dritte Potenz $z = 8i$.

Ist nun umgekehrt z mit $z^3 = 8i$ gesucht, müssen also drei Lösungen z_1, z_2 und z_3 gefunden werden. Um die Rechenregeln für das Potenzieren komplexer Zahlen anwenden zu können, wird die Zahl in Polarform angegeben: $8i = 8\,\underline{/90°}$. Nun gilt:

$(8\,\underline{/90°})^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{3}}\,\underline{/\tfrac{90°}{3}} = \sqrt[3]{8}\,\underline{/30°} \Rightarrow z_1 = 2\,\underline{/30°}$

- $8\,\underline{/90°}$ ist der Hauptwert des komplexen Zeigers $z = 8i$, Wurzelziehen führt auf die Lösung z_1.

$(8\,\underline{/(90° + 360°)})^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{3}}\,\underline{/\tfrac{450°}{3}} = \sqrt[3]{8}\,\underline{/150°} \Rightarrow z_2 = 2\,\underline{/150°}$

- Arbeitet man nicht mit dem Hauptwert, sondern mit einem um 360° größeren Winkel, so erhält man die Lösung z_2.

$(8\,\underline{/(90° + 2 \cdot 360°)})^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{3}}\,\underline{/\tfrac{810°}{3}} = \sqrt[3]{8}\,\underline{/270°} \Rightarrow z_3 = 2\,\underline{/270°}$

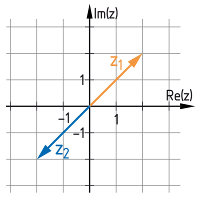
- Die Lösung z_3 erhält man, wenn man den Hauptwert um $2 \cdot 360°$ vergrößert und anschließend die Wurzel berechnet.

Die Argumente der drei Lösungen unterscheiden sich jeweils um $\frac{360°}{3} = 120°$ voneinander. Das nochmalige Addieren von 360° würde auf eine Lösung führen, die sich von der ersten um $3 \cdot 120° = 360°$ unterscheidet, also die gleiche komplexe Zahl beschreibt wie die erste Lösung.

Als die **n-ten Wurzeln** $z = \sqrt[n]{a + bi}$ bzw. $z = \sqrt[n]{(r; \varphi)}$ einer komplexen Zahl bezeichnet man alle n verschiedenen Lösungen der Gleichung $z^n = a + bi$ bzw. $z^n = (r; \varphi)$.

$z_1 = \left(\sqrt[n]{r}; \frac{\varphi}{n}\right) \quad z_2 = \left(\sqrt[n]{r}; \frac{\varphi}{n} + \frac{1 \cdot 360°}{n}\right) \quad z_3 = \left(\sqrt[n]{r}; \frac{\varphi}{n} + \frac{2 \cdot 360°}{n}\right) \quad \dots \quad z_n = \left(\sqrt[n]{r}; \frac{\varphi}{n} + \frac{(n-1) \cdot 360°}{n}\right)$

Das Berechnen der Quadratwurzel einer komplexen Zahl führt daher auf zwei Lösungen z_1 und z_2. Die Argumente dieser beiden Lösungen unterscheiden sich um $\frac{360°}{2} = 180°$, daher gilt $z_1 = -z_2$.



ZB: $\sqrt{4i}$ ist gesucht.
$z_1 = \sqrt{4\,\underline{/90°}} = 2\,\underline{/45°}$; $z_2 = \sqrt{4\,\underline{/(90° + 360°)}} = 2\,\underline{/225°}$

7.92 Berechne $z = \sqrt[4]{-6 + 8i}$ und beschreibe den Lösungsweg. BC

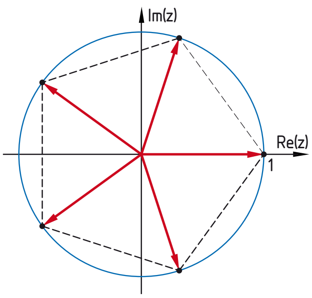
Lösung:

$-6 + 8i = 10\,\underline{/126{,}8...°}$
$z_1 = \sqrt[4]{10}\,\underline{/31{,}7...°} \approx 1{,}51 + 0{,}93i$
$z_2 = \sqrt[4]{10}\,\underline{/(31{,}7...° + 90°)} \approx -0{,}93 + 1{,}51i$
$z_3 = \sqrt[4]{10}\,\underline{/(31{,}7...° + 2 \cdot 90°)} \approx -1{,}51i - 0{,}93$
$z_4 = \sqrt[4]{10}\,\underline{/(31{,}7...° + 3 \cdot 90°)} \approx 0{,}93 - 1{,}51i$

Die Zahl unter der Wurzel wird in Polarform angegeben.
1. Lösung: Aus dem Radius die 4. Wurzel ziehen, den Winkel durch 4 dividieren.
Für die drei weiteren Lösungen jeweils $\frac{360°}{4} = 90°$ zum Winkel addieren.

Komplexe Zahlen

Grafische Interpretation der Lösungen der Gleichung $z^n = (r; \varphi)$



Trägt man die komplexen Lösungen der Gleichung $z^n = (r; \varphi)$ in die Gauß'sche Zahlenebene ein, so kann man zwei Eigenschaften erkennen:

- Alle Lösungen liegen auf einem Kreis mit dem Radius $\sqrt[n]{r}$.
- Die n Lösungen sind die Eckpunkte eines regelmäßigen n-Ecks.

Die Abbildung zeigt die Lösungen der Gleichung $z^5 = 1$, die – miteinander verbunden – ein regelmäßiges Fünfeck bilden.
Allgemein werden die Lösungen der Gleichung $z^n = 1$ als die n-ten **Einheitswurzeln** bezeichnet. Damit können beliebige regelmäßige n-Ecke (näherungsweise) gezeichnet werden, auch solche, deren Konstruktion mit Zirkel und Lineal nicht möglich ist.

B C D **7.93** ***1)*** Berechne die Lösungen der Gleichung $z^4 = 16i$.
2) Begründe, warum die Lösungen ein Quadrat bilden müssen. Überprüfe dies durch eine Zeichnung und beschreibe dein Vorgehen.

Lösung mit GeoGebra:

1) $z^4 = 16i = 16\,\angle 90°$

$z_1 = \sqrt[4]{16}\,\angle\frac{90°}{4} =$

$= 2\,\angle 22{,}5° \approx 1{,}85 + 0{,}77i$

$z_2 = 2\,\angle 112{,}5° \approx -0{,}77 + 1{,}85i$

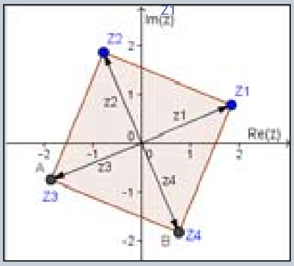
$z_3 = 2\,\angle 202{,}5° \approx -1{,}85 - 0{,}77i$

$z_4 = 2\,\angle 292{,}5° \approx 0{,}77 - 1{,}85i$

2) Die Punkte müssen ein Quadrat bilden, da der Betrag gleich bleibt und der Winkel jeweils um 90° erhöht wird.

Eingabe: Z1=(1.85,0.77)

Eingabe: z1=(1.85,0.77)



Die Punkte werden beginnend mit einem Großbuchstaben eingegeben, die Zeiger mit einem Kleinbuchstaben. Das Viereck wird mithilfe von **Regelmäßiges Vieleck** gezeichnet.

C **7.94** Dokumentiere, wie man die Ergebnisse in Komponentenform und in Polarform angeben kann.

a) $z = \sqrt{1}$ ***b)*** $z = \sqrt{i}$ ***c)*** $z = \sqrt{-1}$ ***d)*** $z = \sqrt{-i}$

B **7.95** Gib die Lösungen in Polarform an.

a) $z = \sqrt[3]{-1-2i}$ ***b)*** $z = \sqrt[5]{16+82i}$ ***c)*** $z = \sqrt[6]{-64}$ ***d)*** $z = \sqrt[5]{-243}$

D **7.96** Begründe, warum die Ergebnisse von ***1)*** $x = \sqrt{16}, x \in \mathbb{R}$ und ***2)*** $z = \sqrt{16}, z \in \mathbb{C}$ nicht gleich sind.

B **7.97** Für eine Zahl $z = r \cdot e^{i \cdot \varphi}$ gilt $z^2 = 2 \cdot \sqrt{2} + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot i$. Wie lautet z?

D **7.98** $\sqrt{a}$ wurde für $a \in \mathbb{R}^-$ als $\pm\sqrt{|a|} \cdot i$ definiert (siehe Seite 185). Zeige, dass das Anwenden der allgemeinen Vorschrift für die Berechnung der komplexen Wurzeln auf das gleiche Ergebnis führt.

B C **7.99** ***1)*** Berechne z und gib die Zahl in Polarform an.
2) Gib alle weiteren Wurzeln an. Beschreibe, welcher Zusammenhang zwischen diesen besteht.

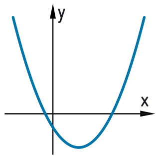
a) $3 + 2i = \sqrt[5]{z}$ ***b)*** $-80i = \sqrt[6]{z}$ ***c)*** $-25 + 19i = \sqrt[8]{z}$ ***d)*** $96 - 32i = \sqrt[10]{z}$

7.5 Lösen von Gleichungen in $\mathbb{C}$

7.5.1 Quadratische Gleichungen mit reellen Koeffizienten

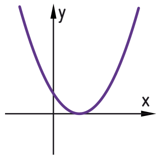
7.100 Stelle die Funktionen ***1)*** $y = x^2 + 2x - 3$ ***2)*** $y = x^2 + 4x + 4$ ***3)*** $y = x^2 + x + 1$ grafisch dar. Welche Unterschiede bezüglich der Nullstellen gibt es bei diesen drei Funktionen?

In Abschnitt 3.2 wurden quadratische Gleichungen mit den reellen Zahlen als Grundmenge behandelt. In diesem Fall entsprechen die Lösungen der Gleichung den Nullstellen der zugehörigen quadratischen Funktion. Die Anzahl der Lösungen der Gleichung $x^2 + p \cdot x + q = 0$ hängt von der Diskriminante D in der Lösungsformel ab: $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ mit $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$



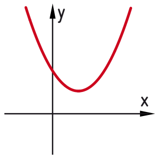
$D > 0$

Die Gleichung hat zwei verschiedene reelle Lösungen.



$D = 0$

Die Gleichung hat eine reelle (Doppel-)Lösung.



$D < 0$

Die Gleichung hat keine reelle Lösung.

Geht man von der Menge $\mathbb{C}$ als Grundmenge aus, so hat $\sqrt{D}$ sowohl für $D > 0$ als auch für $D < 0$ zwei Lösungen. Obwohl es daher nicht nötig wäre, vor der Wurzel „±" zu schreiben, wird die Formel in der üblichen Weise angegeben.

Für $D < 0$ gilt:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \underbrace{i \cdot \sqrt{\left|\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q\right|}}_{\pm b \cdot i} = -\frac{p}{2} \pm i \cdot \sqrt{q - \left(\frac{p}{2}\right)^2}$$

- Die beiden Lösungen der quadratischen Gleichung sind dann **konjugiert komplexe Zahlen**.

7.101 Ermittle die Lösungen der Gleichung ***1)*** in $\mathbb{R}$, ***2)*** in $\mathbb{C}$.

a) $x^2 + 9 = 0$ **b)** $x^2 + 4x + 13 = 0$ **c)** $4x^2 - 12x + 73 = 0$

Lösung:

a) $x^2 + 9 = 0$

$x^2 = -9$

1) $x_{1,2} = \pm\sqrt{-9}$

$L = \{\,\}$

2) $x_{1,2} = \sqrt{-9} = \pm 3i$

$x_1 = -3i$

$x_2 = 3i$

$L = \{\pm 3i\}$

b) $x^2 + 4x + 13 = 0$

1) $x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4 - 13} =$

$= -2 \pm \sqrt{-9}$

$L = \{\,\}$

2) $x_{1,2} = -2 + \sqrt{4 - 13} =$

$= -2 + \sqrt{-9} = -2 \pm 3i$

$x_1 = -2 + 3i,\ x_2 = -2 - 3i$

$L = \{-2 \pm 3i\}$

c) $4x^2 - 12x + 73 = 0$

1) $x_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 1\,168}}{8} =$

$= \frac{12 \pm \sqrt{-1\,024}}{8}$

$L = \{\,\}$

2) $x_{1,2} = \frac{12 + \sqrt{144 - 1\,168}}{8} =$

$= \frac{12 + \sqrt{-1\,024}}{8} = \frac{12 \pm 32i}{8}$

$x_1 = 1{,}5 + 4i,\ x_2 = 1{,}5 - 4i$

$L = \{1{,}5 \pm 4i\}$

Aufgaben 7.102 – 7.104: Berechne jeweils die Lösungen der Gleichung in $\mathbb{C}$.

7.102 **a)** $x^2 = -2$ **b)** $16 + 9x^2 = 0$ **c)** $\frac{x^2}{3} + 2 = 1$

7.103 **a)** $x^2 - 10x + 74 = 0$ **c)** $x^2 - 4x + 3 = 0$ **e)** $x^2 + 4x + 7 = 0$
b) $4x^2 - 20x + 29 = 0$ **d)** $10x^2 + 80x + 1\,796 = 0$ **f)** $5x^2 - 14x + 8 = 0$

7.104 **a)** $12 - 5z^2 - 4 \cdot (3 - z)^2 = (3z - 1)^2 - (3z - 2) \cdot (3z + 2)$
b) $(3z - 1) \cdot (6 + 4z) + (4 + z)^2 = (-5 + 2z)^2 - 68$

TE ●B●● Mathcad, GeoGebra: www.hpt.at

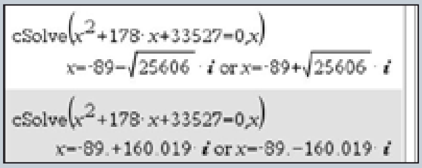
7.105 Löse die Gleichung $x^2 + 178x + 33\,527 = 0$ ***1)*** in $\mathbb{R}$, ***2)*** in $\mathbb{C}$.

Lösung mit TI-Nspire:

1) $G = \mathbb{R}$

$L = \{\,\}$

2) $G = \mathbb{C}$



$L = \{-89 \pm 160{,}019i\}$

- Bei der Lösung einer Gleichung mit **solve** werden ausschließlich reelle Lösungen angezeigt, auch wenn als Ausgabeformat **Kartesisch** oder **Polar** gewählt wurde.
- Die komplexen Lösungen erhält man mit dem Befehl **cSolve**. Der Befehl kann über die Tastatur eingegeben werden oder dem Menü **3: Algebra**, **C: Komplex**, **1: Löse** entnommen werden. Die Lösung wird den gewählten Einstellungen entsprechend ausgegeben.

TE ●B●● **7.106** Löse die Gleichung mithilfe von Technologieeinsatz ***1)*** in $\mathbb{R}$, ***2)*** in $\mathbb{C}$.

a) $x^2 - 0{,}04x + 1{,}25 = 0$ ***b)*** $x^2 + 2 \cdot 10^{-3}x + 1{,}1 \cdot 10^{-2} = 0$

●B●● **7.107** Zerlege den Ausdruck in Linearfaktoren.

a) $z^2 + 5z + 10$ ***b)*** $z^2 - 20z + 101$ ***c)*** $4z^2 + 10z + 29$

AB●● **7.108** ***1)*** Ermittle die Lösung der folgenden Textaufgabe:
Das Produkt zweier Zahlen ist 34, ihre Summe beträgt 10. Wie lauten die beiden Zahlen?

2) Erfinde drei ähnliche Aufgaben so, dass deren Lösungen den drei möglichen Lösungsfällen von quadratischen Gleichungen entsprechen.

●BC● **7.109** ***1)*** Ermittle die komplexen Lösungen der Gleichung $x^2 + 6x + 13 = 0$ mittels quadratischer Ergänzung.

2) Gib die Scheitelpunktform der Parabel $y(x) = x^2 + 6x + 13$ an und stelle die Parabel grafisch dar. Beschreibe, welche Zusammenhänge zwischen der Lage der Parabel und den Lösungen der Gleichung bestehen.

●●C● **7.110** Kreuze jene Aussage über eine quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$, $G = \mathbb{C}$, an, die wahr ist.

Der Imaginärteil der Lösung kann nie 0 sein.	☐
Die Lösungen sind rein imaginär, wenn $p = 0$ und $q > 0$ ist.	☐
Es ist möglich, dass eine Lösung der Gleichung reell und die andere komplex ist.	☐
Die Lösungen können konjugiert komplexe Zahlen mit unterschiedlichen Realteilen sein.	☐
Der Realteil der Lösung ist immer $-\frac{p}{2}$.	☐

●●●D **7.111** Beweise, dass der Satz von Vieta auch gilt, wenn die Lösungen einer quadratischen Gleichung konjugiert komplexe Zahlen sind.

●●CD **7.112** Beschreibe, in welchem Fall ein Term der Form $\frac{x^2 + p_1x + q_1}{x^2 + p_2x + q_2}$ gekürzt werden kann. Ist es möglich, dass ein Bruch, der für $G = \mathbb{R}$ nicht kürzbar ist, für $G = \mathbb{C}$ gekürzt werden kann? Begründe deine Antwort.

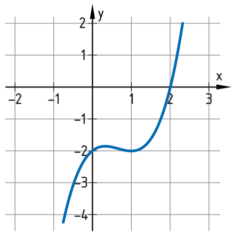
7.5.2 Gleichungen höheren Grads, Fundamentalsatz der Algebra

Die klassische Algebra beschäftigt sich mit dem Lösen von Gleichungen. Quadratische Gleichungen in $\mathbb{C}$ haben immer genau zwei Lösungen, wenn Doppellösungen als zwei Lösungen (Vielfachheit 2) gezählt werden. Weiters kann eine Gleichung mit den Lösungen z_1 und z_2 als Produkt $(z - z_1) \cdot (z - z_2) = 0$ angeschrieben werden. Analoge Überlegungen lassen sich auch für Gleichungen höheren Grads durchführen. Da viele dieser Überlegungen auch für das Arbeiten in $\mathbb{R}$ von Bedeutung sind, wird im Folgenden die Gleichungsvariable oft mit x bezeichnet, auch wenn komplexe Lösungen möglich sind.

Polynomfunktionen 3. Grads müssen mindestens eine reelle Nullstelle aufweisen (vergleiche Abschnitt 2.4), die entsprechenden Gleichungen haben daher mindestens eine reelle Lösung x_1 und enthalten den Linearfaktor $(x - x_1)$. Wird durch diesen Faktor dividiert, ist die verbleibende Gleichung eine quadratische Gleichung, die zwei Lösungen haben muss.

ZB

Die grafische Lösung der Gleichung $x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0$ zeigt eine Nullstelle $x_1 = 2$ (siehe Abbildung). Der Term $x^3 - 2x^2 + x - 2$ muss sich daher in der Form $(x - 2) \cdot (x^2 + px + q)$ anschreiben lassen.



Mittels Polynomdivision erhält man:
$x^3 - 2x^2 + x - 2 = (x - 2) \cdot (x^2 + 1)$

Die weiteren Lösungen der gegebenen Gleichung erhält man dann durch Nullsetzen des verbleibenden Faktors:
$x^2 + 1 = 0 \;\Rightarrow\; x_2 = +i, x_3 = -i$

An obigem Beispiel erkennt man:

- Kennt man von einer Polynomgleichung eine Lösung x_1, so kann durch den Faktor $(x - x_1)$ dividiert werden. Dadurch reduziert sich der Grad der Polynomgleichung um 1.
- Ergibt sich bei der Zerlegung ein Faktor, der ein quadratischer Ausdruck ist und nicht auf reelle Lösungen führt („irreduzibler quadratischer Faktor"), so hat die entsprechende Gleichung konjugiert komplexe Lösungen. Mit $z = a + b \cdot i$ muss auch $z^* = a - b \cdot i$ Lösung sein.
- Sind die Lösungen von $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$ ganzzahlig, so müssen die reellen Lösungen x_i Teiler von a_0 sein.

Sind $z_1, \ldots, z_n$ die Lösungen der Gleichung $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1z + a_0 = 0$ mit $a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{C}$, so gilt: $(z - z_1) \cdot (z - z_2) \cdot (z - z_3) \cdot \ldots \cdot (z - z_n) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1z + a_0$

Ist $z = a + b \cdot i$ eine Lösung einer Polynomgleichung $a_nz^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$ mit reellen Koeffizienten, so ist auch die konjugiert komplexe Zahl $z^* = a - b \cdot i$ eine Lösung der Gleichung.

Carl Friedrich Gauß gelang im Zuge seiner Dissertation erstmals der Beweis, dass jede algebraische Gleichung n-ten Grads n Lösungen hat. Diese Aussage wird wegen ihrer großen Bedeutung als **Fundamentalsatz der Algebra** bezeichnet.

Fundamentalsatz der Algebra (Nullstellensatz für Polynome):
Die Gleichung $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$ mit $a_i \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$ hat mindestens eine komplexe Lösung (Nullstelle). Sie hat genau n komplexe Lösungen (Nullstellen), wenn man die Vielfachheit der Lösungen (Nullstellen) mitzählt.

Komplexe Zahlen

Eine Gleichung ungeraden Grads wie zum Beispiel die Gleichung 3. Grads $3x^3 + x - 2 = 0$ hat immer mindestens eine reelle Lösung. Eine Gleichung geraden Grads wie zum Beispiel die Gleichung 4. Grads $x^4 - 6x^2 + 10 = 0$ muss keine reelle Lösung haben. Die Lösungen einer Gleichung 3. bzw. 4. Grads können mit geeigneten Formeln ermittelt werden. Gleichungen 5. Grads oder höher können im Allgemeinen nur mehr mithilfe von Näherungsverfahren gelöst werden (siehe Band 3).

A D **7.113** Gib je ein Beispiel für eine Gleichung 3. Grads mit einer bzw. drei reellen Lösungen an. Begründe, warum es keine Gleichung 3. Grads mit genau 2 reellen Lösungen (mit Vielfachheit gezählt) geben kann.

B **7.114** Von der Gleichung $x^4 + x^3 - 4x^2 + 2x - 12 = 0$ ist bekannt, dass ihre reellen Lösungen ganzzahlig sind. Finde durch Probieren eine dieser Lösungen heraus und dividiere durch den entsprechenden Linearfaktor. Setze mit der entstehenden Gleichung ebenso fort und ermittle so alle Lösungen der Gleichung ohne Technologieeinsatz.

B D **7.115** Überprüfe, ob die gegebene Zahl eine Lösung der Gleichung ist. Berechne alle Lösungen.
a) $z^3 - 6z^2 - 5z + 39 = 0$ mit $z_1 = 3 + 2i$ **b)** $z^3 - 10z^2 + 36z - 40 = 0$ mit $z_1 = 4 - 2i$

B **7.116** Berechne alle Lösungen der Gleichung $2z^5 + 3z^4 + 2z^3 + 2z^2 - 1 = 0$ mit $z_1 = i$, $z_2 = -1$.

D **7.117** Beweise: Wenn z eine komplexe Lösung der Gleichung $az^3 + bz^2 + cz + d = 0$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ist, dann ist auch die konjugiert komplexe Zahl z^* eine Lösung dieser Gleichung.

7.5.3 Gleichungen mit komplexen Koeffizienten

Lineare Gleichungen (Gleichungssysteme) mit komplexen Koeffizienten können wie Gleichungen (Gleichungssysteme) mit reellen Koeffizienten behandelt werden.

Quadratische Gleichungen mit komplexen Koeffizienten können mit den bekannten Formeln für quadratische Gleichungen gelöst werden. Die Lösungen sind zwei komplexe Zahlen.

B **7.118** Löse die Gleichung $x^2 + 8x + ix + 29i - 3 = 0$.

Lösung:

$x^2 + (8 + i) \cdot x + (-3 + 29i) = 0$ • $p = 8 + i, q = -3 + 29i$

$x_{1,2} = -\frac{8+i}{2} \pm \sqrt{\frac{(8+i)^2}{4} - (-3 + 29i)}$

$x_{1,2} = -4 - 0{,}5i \pm \sqrt{18{,}75 - 25i}$ • $D = 18{,}75 - 25i = (31{,}25; 306{,}869...°)$

$x_{1,2} = -4 - 0{,}5i \pm \sqrt{(31{,}25; 306{,}869...°)}$ $\sqrt{D}$: $(5{,}590...; 153{,}434...°) = -5 + 2{,}5i$

$x_{1,2} = -4 - 0{,}5i \pm (-5 + 2{,}5i)$ $(5{,}590...; 333{,}434...°) = 5 - 2{,}5i$

$x_1 = 1 - 3i$ $x_2 = -9 + 2i$

Aufgaben 7.119 – 7.122: Löse die Gleichungen bzw. die Gleichungssysteme in $\mathbb{C}$.

B **7.119** **a)** $x^2 + 2ix + 35 = 0$ **b)** $x^2 + 20ix + 96 = 0$ **c)** $5x^2 + 28ix - 15 = 0$

B **7.120** **a)** $x^2 - (18 - 5i) \cdot x - 90i = 0$ **b)** $x^2 - (9 + 4i) \cdot x - 36i = 0$

B **7.121** **a)** $x^2 + 5x + 3ix - 6 + 4i = 0$ **b)** $x^2 - x + 9ix + 10 - 3i = 0$

B **7.122** **a)** I: $(15 + 4i) \cdot x + (-8 - 9i) \cdot y = 1 - 29i$
II: $(-9 + 5i) \cdot x - (18 - 13i) \cdot y = 112 + 222i$
b) I: $(-7 + 6i) \cdot x + (3 - 5i) \cdot y = -108 - 75i$
II: $(2 - 4i) \cdot x - (-9 + 6i) \cdot y = -96 - 156i$

Zusammenfassung

Imaginäre Einheit: $i^2 = -1$ bzw. $j^2 = -1$

Imaginäre Zahlen: $z = b \cdot i$ bzw. $z = b \cdot j$ mit $b \in \mathbb{R}$

Komplexe Zahlen: $z = a + bi = \text{Re}(z) + \text{Im}(z) \cdot i$ bzw. $z = a + bj$; $a, b \in \mathbb{R}$
Menge der komplexen Zahlen: $\mathbb{C}$

Darstellungsformen:
- Grafisch: Als Punkt oder Zeiger in der **Gauß'schen Zahlenebene**
- Komponentenform: $z = a + b \cdot i$
- Polarformen: $z = (r; \varphi) = r \underline{/\varphi} = r \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)) = r \cdot e^{i \cdot \varphi}$

Umrechnungen:

$z = a + bi \quad \rightarrow \quad z = (r; \varphi)$

Betrag: $|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$

Winkel $\varphi = \arg(z)$: $\tan(\varphi) = \frac{b}{a}$, $a \neq 0$

$z = (r; \varphi) \quad \rightarrow \quad z = a + bi$

Realteil: $a = r \cdot \cos(\varphi)$

Imaginärteil: $b = r \cdot \sin(\varphi)$

Euler'sche Formel: $e^{i \cdot \varphi} = \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)$ bzw. $e^{j \cdot \varphi} = \cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi)$

Konjugiert komplexe Zahl zu $z = a + bi$: $z^* = a - bi$

Addition und **Subtraktion:** Es werden jeweils die Realteile und Imaginärteile addiert bzw. subtrahiert. Für $z_1 = a + bi$ und $z_2 = c + di$ gilt:
$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d) \cdot i$ bzw. $z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d) \cdot i$
Grafisch werden komplexe Zahlen wie Vektoren addiert bzw. subtrahiert.

Multiplikation: Die Zahlen $z_1 = a + bi$ und $z_2 = c + di$ werden wie Binome miteinander multipliziert.
Für $z_1 = (r_1; \varphi_1)$ und $z_2 = (r_2; \varphi_2)$ gilt:
$z_1 \cdot z_2 = (r_1 \cdot r_2; \varphi_1 + \varphi_2) = r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i \cdot (\varphi_1 + \varphi_2)}$

Bei der **Division** $\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{c + di}$ wird der Bruch mit der konjugiert komplexen Zahl des Nenners $z_2^* = c - di$ erweitert.
Für $z_1 = (r_1; \varphi_1)$ und $z_2 = (r_2; \varphi_2)$ gilt:
$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}; \varphi_1 - \varphi_2\right) = \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2)) = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i \cdot (\varphi_1 - \varphi_2)}$

Berechnungen von **Potenzen** komplexer Zahlen:
$z^n = [r \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))]^n = r^n \cdot (\cos(n \cdot \varphi) + i \cdot \sin(n \cdot \varphi))$
$z^n = (r; \varphi)^n = (r^n; n \cdot \varphi)$
Satz von de Moivre: $(\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))^n = \cos(n \cdot \varphi) + i \cdot \sin(n \cdot \varphi)$

n-te Wurzeln (Lösungen) der Gleichung $z^n = (r; \varphi)$:
$z_1 = \left(\sqrt[n]{r}; \frac{\varphi}{n}\right) \quad z_2 = \left(\sqrt[n]{r}; \frac{\varphi}{n} + \frac{1 \cdot 360°}{n}\right) \quad z_3 = \left(\sqrt[n]{r}; \frac{\varphi}{n} + \frac{2 \cdot 360°}{n}\right) \quad \dots \quad z_n = \left(\sqrt[n]{r}; \frac{\varphi}{n} + \frac{(n-1) \cdot 360°}{n}\right)$

Lösungen von **quadratischen Gleichungen** in $\mathbb{C}$:
In $\mathbb{C}$ hat eine quadratische Gleichung immer 2 Lösungen (unter Berücksichtigung der Vielfachheit). Ist $D < 0$, so sind es konjugiert komplexe Lösungen.

Weitere Aufgaben

7.123 Ordne der gegebenen komplexen Zahl den äquivalenten Ausdruck zu.

1	$z = 2 - 2j$		A	$z = \sqrt{8} \cdot e^{j \cdot \frac{\pi}{4}}$
			B	$z = -2 + 2j$
2	$z = \sqrt{8} \cdot e^{j \cdot \frac{3\pi}{4}}$		C	$z = (2; 315°)$
			D	$z = \sqrt{8} \cdot (\cos(315°) + j \cdot \sin(315°))$

7.124 Stelle z grafisch dar und gib die Zahl in allen Darstellungsformen an.
a) $z = -4i$ **b)** $z = (4; 320°)$ **c)** $z = 7 \cdot (\cos(29°) + i \cdot \sin(29°))$ **d)** $z = 6 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{6}}$

7.125 Berechne den Term für $z_1 = 4 - 2i$; $z_2 = -1 + 5i$ und überprüfe durch eine Zeichnung.
a) $z_1 + z_2$ **b)** $z_1 - z_2$ **c)** $z_1 + z_2^*$ **d)** $z_2^* - z_1^*$

7.126 Führe folgende Rechnungen für die Zahlen $z_1 = 7 - 2i$, $z_2 = 3 \angle 40°$ und $z_3 = 2 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{6}}$ durch. Gib das Ergebnis in den Formen $z = a + bi$ und $z = r \angle \varphi$ an. Arbeite ohne Technologieeinsatz.
a) $z_1 + z_2 - z_3$ **b)** $z_1 \cdot z_2 + z_3$ **c)** $\frac{z_2 + z_3}{z_1}$

7.127 Berechne $z = \frac{7 + 26i}{-4 + 3i}$ ohne Technologieeinsatz und beschreibe deinen Rechenweg.

7.128 Berechne die gesuchte Potenz ohne Technologieeinsatz und gib Re(z) und Im(z) an.
a) $z = i^{17}$ **b)** $z = 1^{-i}$ **c)** $z = (2 \angle 18°)^5$ **d)** $z = (3 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{6}})^{-3}$ **e)** $\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + j \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^{-4}$

7.129 Ermittle die Lösungen der Gleichung in $\mathbb{C}$.
a) $x^2 - 22x + 185 = 0$ **c)** $x^2 - 4x + 20 = 0$ **e)** $144x^2 - 384x + 337 = 0$
b) $x^2 + 4x + 85 = 0$ **d)** $9x^2 + 6x + 50 = 0$ **f)** $2x^2 - 2x + 1 = 0$

7.130 Zeige, dass für eine quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ mit $p, q \in \mathbb{R}$ mit den komplexen Lösungen $x_{1,2} = a \pm bi$ gilt: $p = -2a$ und $q = a^2 + b^2$

7.131 Die Gleichung $x^2 - 2x + q = 0$ mit $q \in \mathbb{R}$ hat die Lösung $x_1 = 1 + i$. Ermittle x_2 und q.

7.132 Kennzeichne den angegebenen Bereich in der Gauß'schen Zahlenebene.
a) $\mathrm{Re}(z) = |\mathrm{Im}(z)|$ **b)** $|z| \leqslant 4$ **c)** $\arg(z) = \frac{\pi}{4}$ **d)** $z \cdot z^* = 25$

7.133 Zeige: **a)** $z \cdot z^* = (\mathrm{Re}(z))^2 + (\mathrm{Im}(z))^2$ **b)** $\arg\left(\frac{z}{z^*}\right) = 2 \cdot \arg(z)$

7.134 Beweise $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$
Hinweis: Verwende den ersten Summensatz.

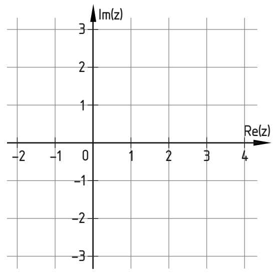
7.135 Löse die Gleichung.
a) $x^2 - (4 + 4i) \cdot x + 21 + 12i = 0$ **b)** $2x^2 + (17 - 33i) \cdot x = -84 + 72$

7.136 Die gegebene Gleichung hat mindestens eine ganzzahlige Lösung. Ermittle alle Lösungen für $G = \mathbb{C}$ ohne Technologieeinsatz.
a) $x^3 - 2x^2 + 4x - 8 = 0$ **b)** $x^5 + 3x^4 + x + 3 = 0$

7.137 Stelle alle Wurzeln in der Form $z = a + bi$ dar.
a) $z = \sqrt[7]{-2\,187}$ **b)** $z = \sqrt[3]{(421{,}875; 75{,}6°)}$ **c)** $z = \sqrt[4]{74 + 99i}$

TE **7.138** Stelle alle Lösungen der Gleichung $z^5 = -1\,024$ grafisch dar und zeige mittels Technologieeinsatz, dass sie ein regelmäßiges Fünfeck bilden.

Wissens-Check

		gelöst
1	Ich kann die Begriffe imaginäre Einheit und komplexe Zahl erklären.	
2	Ich kann komplexe Zahlen in der Gauß'schen Zahlenebene einzeichnen. ZB: $z_1 = 4 - 3i$ und $z_2 = 4\,\underline{/30°}$ 	
3	Ermittle die angegebene Potenz von i. A) i^{35} B) i^{4n+2}	
4	Ich kann erklären, wie man eine komplexe Zahl von Komponentenform in Polarform umwandelt und umgekehrt. ZB: $z = 6 - 8j$	
5	Führe die Rechnungen für $z_1 = 4 + 3j$ und $z_2 = -2 + 5j$ rechnerisch und grafisch durch. A) $z_1 + z_2$ B) $z_1 - z_2$	
6	Um einen komplexen Zeiger um $\frac{\pi}{4}$ zu drehen und auf die doppelte Länge zu strecken, muss man ihn mit z = ______ multiplizieren.	
7	Gib an, für welche komplexen Zahlen $z = a + bi$ die Aussage wahr ist: $\arg(z) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$	
8	Wie lautet die konjugiert komplexe Zahl z* zu $z = 4 - 5j$ und welche Eigenschaften hat z*?	
9	Berechne und gib das Ergebnis in Komponentenform an. $z = \frac{-13 + i}{2i - 1}$	
10	Ermittle Realteil und Imaginärteil der komplexen Zahl: $z = (2\,\underline{/45°})^2$ Re(z) = ______ Im(z) = ______	
11	Gib alle Lösungen der Gleichung $z^4 = 16$ in Komponentenform an.	
12	Begründe, ob die Aussage wahr ist: Sind w und z zwei verschiedene Lösungen einer quadratischen Gleichung mit reellen Koeffizienten, dann muss $\mathrm{Re}(w) = \mathrm{Re}(z)$ gelten.	
13	Ich kann die Aussage des Fundamentalsatzes der Algebra mit eigenen Worten wiedergeben.	

Lösung:
1) siehe Seiten 184 und 186   2) siehe Seite 187   3) A) $-i$, B) -1 4) siehe Seite 191, $z = (10;\ 306{,}87°)$
5) A) $2 + 8j$, B) $6 - 2j$ 6) $z = 2\,\underline{/\frac{\pi}{4}}$ 7) $a > 0,\ b \neq 0$ 8) $z^* = 4 + 5j$; siehe Seite 197
9) $z = 3 + 5i$ 10) $\mathrm{Re}(z) = 0$; $\mathrm{Im}(z) = 4$ 11) $2;\ -2;\ 2i;\ -2i$
12) falsch; gilt nur für konjugiert komplexe Lösungen, nicht bei reellen Lösungen   13) siehe Seite 207