# 7 Trigonometrie

Bei vielen naturwissenschaftlichen Berechnungen lassen sich auftretende geometrische Zusammenhänge auf rechtwinklige Dreiecke zurückführen. Auch bei der Planung von Gebäuden oder der Geländevermessung kann man auf diese Weise arbeiten. Mithilfe von geeigneten Skizzen kann man solche Gegebenheiten in Form von rechtwinkligen Dreiecken darstellen und zum Beispiel Steigungswinkel ermitteln. Die **Trigonometrie** („Dreiecksmessung“) befasst sich mit den Zusammenhängen zwischen Winkeln und Seiten von Dreiecken. In diesem Band beschränken wir uns auf die Anwendungen in rechtwinkligen Dreiecken.

## 7.1 Winkelfunktionen im rechtwinkligen Dreieck

BCD **7.1** Zeichne ein rechtwinkliges Dreieck mit $\alpha = 35°$ in beliebiger Größe.

***1)*** Miss die längere Kathete und die Hypotenuse ab, berechne das Verhältnis $\frac{\text{längere Kathete}}{\text{Hypotenuse}}$. Vergleiche dein Ergebnis mit den Ergebnissen deiner Mitschülerinnen und Mitschüler.

***2)*** Miss auch die kürzere Kathete, berechne das Verhältnis $\frac{\text{kürzere Kathete}}{\text{Hypotenuse}}$ und vergleiche.

***3)*** Formuliere mit eigenen Worten, was der Vergleich jeweils zeigt.

Wir betrachten die Seiten des in Abb. 7.1 dargestellten rechtwinkligen Dreiecks in Bezug auf ihre jeweiligen Lagen zu den Winkeln $\alpha$ und $\beta$:

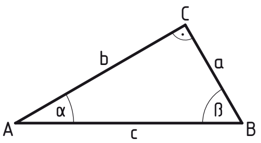


Abb. 7.1

- Die Kathete a liegt **gegen**über von $\alpha$. Sie wird als **Gegenkathete** von $\alpha$ bezeichnet.
- Die Kathete b liegt am Winkel $\alpha$ **an** und wird als **Ankathete** von $\alpha$ bezeichnet.
- Analog ist für den Winkel $\beta$ die Seite b die Gegenkathete und a die Ankathete.
- Dem rechten Winkel gegenüber liegt die längste Seite c, die **Hypotenuse**.

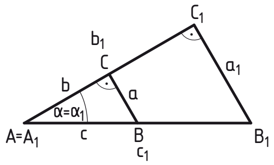


Abb. 7.2

Wir betrachten allgemein die **ähnlichen Dreiecke** ABC und $A_1B_1C_1$ mit dem Winkel $\alpha = \alpha_1$ in Abb. 7.2. Mithilfe des **Strahlensatzes** erkennt man folgende Beziehungen:

$\frac{a}{c} = \frac{a_1}{c_1} = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$, $\frac{b}{c} = \frac{b_1}{c_1} = \frac{\text{Ankathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$

und $\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Ankathete von } \alpha}$

Diese Verhältnisse ändern sich nicht, wenn sich die Größe der Dreiecke ändert. Sie sind ausschließlich von der Größe des Winkels abhängig.

Daher erhalten diese Verhältnisse besondere Bezeichnungen und Abkürzungen:

| | | |
|---|---|---|
| $\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$ | $\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$ | $\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Ankathete von } \alpha}$ |
| sprich: „**Sinus** von Alpha“ | „**Cosinus** von Alpha“ | „**Tangens** von Alpha“ |

Die Werte von $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$ und $\tan(\alpha)$ ergeben sich durch Division zweier Längen. Sie sind daher dimensionslose Verhältniszahlen, also Zahlen ohne Einheiten.

Manchmal wird für das Verhältnis $\frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}}$ die Bezeichnung $\cot(\alpha)$ [sprich: „Cotangens von Alpha"] verwendet. Da dieses Verhältnis der Kehrwert des Verhältnisses $\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$ ist, kann es auch einfach als Kehrwert des Tangens, also $\frac{1}{\tan(\alpha)} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}}$, berechnet werden.

Die oben festgelegten Seitenverhältnisse legen für jeden Winkel $\alpha$ genau einen Wert fest. Es handelt sich dabei um Funktionen, die als **Sinusfunktion**, **Cosinusfunktion** und **Tangensfunktion** bezeichnet werden. Man nennt diese Funktionen **Winkelfunktionen**, **Kreisfunktionen** oder **trigonometrische Funktionen**. Häufig wird anstelle der für Funktionen exakten Schreibweise $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$ bzw. $\tan(\alpha)$ vereinfachend $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ bzw. $\tan \alpha$ geschrieben.

ZB: $\alpha = 35°$: $\sin(35°) = 0{,}573...$ $\cos(35°) = 0{,}819...$ $\tan(35°) = 0{,}700...$

Die Größen der Winkel im rechtwinkligen Dreieck liegen zwischen 0° und 90°. Die oben angeführten Festlegungen gelten für Winkel aus diesem Bereich. Erst in Band 2 werden wir die Winkelfunktionen auch für beliebige Winkel definieren.

### Berechnung des Winkels aus dem Seitenverhältnis

Jedem Winkel $\alpha$ kann genau ein Seitenverhältnis $\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$, also genau ein Wert $\sin(\alpha)$ zugeordnet werden: $\alpha \mapsto \sin(\alpha)$

Umgekehrt kann der Wert x des Seitenverhältnisses $\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$ vorgegeben sein. Diesem wird eindeutig ein spitzer Winkel $\alpha$ zugeordnet.

Auch diese Zuordnung ist eine Funktion, die **Arcussinusfunktion**. Sie ist die Umkehrung der Sinusfunktion und wir schreiben $\alpha = \arcsin(x)$.

Analog gibt es zu den Zuordnungen $\alpha \mapsto \cos(\alpha)$ bzw. $\alpha \mapsto \tan(\alpha)$ eine Umkehrung:

$\frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} \mapsto \alpha$ ... **Arcuscosinusfunktion**; $x = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$, $\alpha = \arccos(x)$

$\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} \mapsto \alpha$ ... **Arcustangensfunktion**; $x = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$, $\alpha = \arctan(x)$

Ist zum Beispiel der Wert von $\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{4\text{ cm}}{8\text{ cm}} = 0{,}5$, so beträgt der Winkel $\alpha = 30°$ und wir schreiben $\arcsin(0{,}5) = 30°$.

Da bei den Seitenverhältnissen $\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$ bzw. $\frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$ stets der Nenner größer als der Zähler ist, liegen deren Werte zwischen 0 und 1. Zum Beispiel ist daher $\arcsin(2)$ nicht sinnvoll.

Die **Arcusfunktionen** sind die Umkehrungen der Winkelfunktionen.

Die Berechnung der Winkelfunktionswerte bzw. der Winkel führen wir mit dem Taschenrechner durch. Die meisten Taschenrechner haben eigene Tasten für Sinus, Cosinus und Tangens. Für den Cotangens gibt es meist keine eigene Taste. Die Arcusfunktionen sind meistens mit $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ und $\tan^{-1}$ beschriftet. Beachte, dass der Exponent $(-1)$ hier nicht den Kehrwert des Funktionswerts angibt, sondern für die Umkehrung der Zuordnungsrichtung steht.

ZB TI-30: $\sin(30°)$: $\boxed{\text{sin}}\,\boxed{3}\,\boxed{0}\,\boxed{)}\,\boxed{=}$ $\arcsin(0{,}5)$: $\boxed{\text{2nd}}\,\boxed{\text{sin}}\,\boxed{0}\,\boxed{\cdot}\,\boxed{5}\,\boxed{)}\,\boxed{=}$

Winkel können im Gradmaß, im Bogenmaß oder in Gon angegeben sein. Beachte daher beim Berechnen, dass am Taschenrechner das richtige Winkelmaß eingestellt ist.

# Trigonometrie

Die Berechnung ohne Technologieeinsatz ist mit Mitteln der höheren Mathematik zwar möglich, aber aufwändig. Selbst vor der Entwicklung des Taschenrechners wurden die Werte aus Tabellen entnommen.

Beachte, dass, wie zum Beispiel bei der Wurzelberechnung, die meisten der erhaltenen Werte nur Näherungswerte sind, da reelle Zahlen im Allgemeinen nur mit begrenzter Genauigkeit angegeben werden können.

Aufgaben 7.2 – 7.3: Gib die entsprechenden Seitenverhältnisse an.

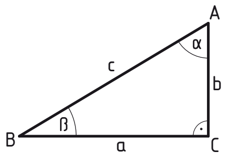


Abb. 7.3

C **7.2** Verwende Abb. 7.3.
**a)** sin(β) **b)** cos(α) **c)** tan(α) **d)** tan(β) **e)** cos(β) **f)** sin(α)

C **7.3** Verwende Abb. 7.4.
**a)** sin(ε) **b)** cos(ε) **c)** tan(ψ) **d)** tan(ε) **e)** cos(ψ) **f)** sin(ψ)

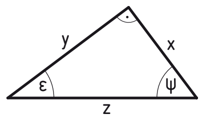


Abb. 7.4

C **7.4** Überlege, welche Winkelfunktionen durch das jeweilige Verhältnis beschrieben werden. Gib alle an, falls mehrere möglich sind.
**a)** Verwende Abb. 7.3. **1)** $\frac{b}{c}$ **2)** $\frac{a}{b}$ **3)** $\frac{a}{c}$ **4)** $\frac{b}{a}$
**b)** Verwende Abb. 7.4. **1)** $\frac{y}{x}$ **2)** $\frac{x}{z}$ **3)** $\frac{y}{z}$ **4)** $\frac{x}{y}$

AC **7.5** Verwende Abb. 7.5 und beantworte die Fragen.
**1)** Welche Strecke ist die Gegenkathete zum Winkel α?
**2)** Welche Strecke ist die Ankathete des Winkels $\gamma_1$?
**3)** $c_1$ ist die Ankathete welchen Winkels?
**4)** h ist die Ankathete welchen Winkels?
**5)** Mit der Gegenkathete $c_1$ und der Ankathete h kann der Tangens welchen Winkels berechnet werden?
**6)** Mit der Ankathete $c_2$ und der Hypotenuse b kann welche Winkelfunktion welchen Winkels berechnet werden?

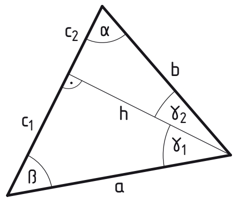


Abb. 7.5

C **7.6** Verwende Abb. 7.5 und gib das Seitenverhältnis an.
**a)** sin(β) **c)** tan(α) **e)** $\sin(\gamma_2)$ **g)** $\tan(\gamma_1)$
**b)** $\cos(\gamma_1)$ **d)** $\tan(\gamma_2)$ **f)** $\cos(\gamma_2)$ **h)** cos(β)

C **7.7** Verwende Abb. 7.5 und gib den fehlenden Winkel an.
**a)** $\frac{h}{a}$ = cos ? **b)** $\frac{h}{b}$ = sin ? **c)** $\frac{c_2}{b}$ = cos ? **d)** $\frac{c_1}{h}$ = tan ? **e)** $\frac{c_2}{h}$ = tan ?

C **7.8** Klaus hat bei seiner Hausübung ein rechtwinkliges Dreieck irrtümlich falsch beschriftet (siehe Abb. 7.6). Wie lauten nun die gesuchten Seitenverhältnisse?
**1)** sin(α) **2)** cos(β) **3)** tan(α) **4)** sin(β)

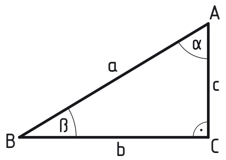


Abb. 7.6

B **7.9** Berechne mit dem Taschenrechner.
**a)** sin(22°) **b)** tan(82,5°) **c)** cos(0,0002°) **d)** tan(45°) **e)** sin(30°)

B **7.10** Rechne das gegebene Winkelmaß in Grad um und ermittle den Funktionswert.
**a)** sin(39°12′23″) **b)** tan(79°29′1″) **c)** sin(33°21″) **d)** cos(56°52′41″) **e)** cos(8°4′2″)

**7.11** Der Winkel ist im Bogenmaß gegeben. Ermittle den Funktionswert. B

**a)** $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$ **b)** $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ **c)** $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$ **d)** $\sin(0{,}436)$ **e)** $\tan(1{,}309)$

**7.12** Ermittle mit dem Taschenrechner die Größe des Winkels in Grad. B

**a)** $\sin(\alpha) = 0{,}5$ **c)** $\cos(\delta) = 0{,}42$ **e)** $\tan(\varphi) = 1$

**b)** $\sin(\beta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ **d)** $\cos(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ **f)** $\tan(\alpha) = \frac{1}{3}$

**7.13** Zeige mithilfe von Verhältnissen, dass $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ gilt. D

**7.14** **1)** Überlege und erkläre, ob das Verhältnis $\frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$ bzw. $\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$ alle Werte aus den reellen Zahlen annehmen kann. CD

**2)** Gib an, ob die Ermittlung der Größen der Winkel möglich ist.

**A)** $\cos(\alpha) = \frac{4}{5}$ **B)** $\sin(\beta) = \frac{8}{7}$ **C)** $\cos(\gamma) = 1{,}5$ **D)** $\sin(\delta) = 0{,}3$

**7.15** Die Werte der Winkelfunktionen können für 30°, 45° und 60° aus speziellen rechtwinkligen Dreiecken genau ermittelt werden. BCD

**1)** Welche besonderen Eigenschaften haben die in den Abbildungen 7.7 bzw. 7.8 skizzierten Dreiecke jeweils?

**2)** Gib an, wie die in der Tabelle eingetragenen Werte mithilfe der skizzierten Dreiecke ermittelt wurden.

**3)** Berechne die fehlenden Werte.
Verwende für diese Aufgabe keinen Taschenrechner.

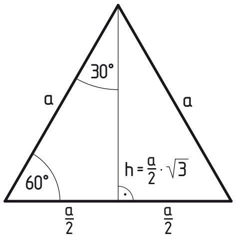



Abb. 7.7

| | **sin(α)** | **cos(α)** | **tan(α)** |
|---|---|---|---|
| α = 30° | | $\frac{\frac{a}{2}\cdot\sqrt{3}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ | |
| α = 45° | $\frac{a}{a\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ | | |
| α = 60° | | | |

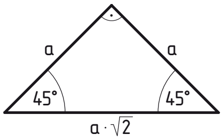



Abb. 7.8

**7.16** Abb. 7.9 zeigt einen Einheitskreis im ersten Quadranten (vergleiche Abschnitt „4.5.3 Bogenmaß“, Seite 163). BCD

Übertrage die Zeichnung in dein Heft. Wähle dabei für den Radius des Viertelkreises r = 1 Einheit = 4 cm und für den Winkel $\varphi = 30°$.

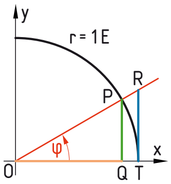



Abb. 7.9

**1)** Miss die Strecken OQ, PQ und RT ab und gib sie in Einheiten an.

**2)** Ermittle mithilfe deines Taschenrechners $\sin(\varphi)$, $\cos(\varphi)$ und $\tan(\varphi)$ und vergleiche die Ergebnisse mit den gemessenen Werten aus **1)**. Was fällt dir auf?

**3)** Überlege, mit welchen Funktionsnamen man die Strecken OQ, PQ und RT beschriften könnte.

**4)** Gib an, wie sich die Strecken OQ, PQ und RT verändern, wenn der Winkel $\varphi$ immer größer wird. Welche maximalen Werte können sie jeweils erreichen?

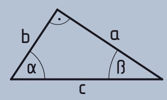
**5)** Die Punkte O, Q und P bilden ein rechtwinkliges Dreieck. Finde mithilfe des Satzes von Pythagoras einen Zusammenhang zwischen $\sin(\varphi)$ und $\cos(\varphi)$.

## 7.2 Berechnungen mit rechtwinkligen Dreiecken

### 7.2.1 Dreiecksberechnungen

Mithilfe der im letzten Abschnitt erarbeiteten Zusammenhänge und Formeln können von jedem rechtwinkligen Dreieck alle fehlenden Größen berechnet werden. Außerdem sind viele Figuren in rechtwinklige Dreiecke zerlegbar. Auch viele nichtgeometrische Aufgaben sind auf die Berechnung rechtwinkliger Dreiecke zurückzuführen und daher mithilfe der Trigonometrie lösbar.

ABC **7.17** Von einem rechtwinkligen Dreieck sind die Länge der Seite $c = 5{,}70$ cm und die Größe des Winkels $\alpha = 56{,}4°$ gegeben. Berechne die Längen der Seiten a und b und die Größe des Winkels β. Beschreibe deine Rechenschritte.




Lösung:

Die Kathete a liegt dem Winkel α gegenüber, ist also dessen Gegenkathete. Da α gegeben ist, kann man a mithilfe der Sinusfunktion berechnen:

$\sin(\alpha) = \frac{a}{c} \Rightarrow a = c \cdot \sin(\alpha)$

$a = 5{,}7 \text{ cm} \cdot \sin(56{,}4°) = 4{,}747... \text{ cm} \approx 4{,}75 \text{ cm}$

Die Kathete b liegt am Winkel α an, ist also dessen Ankathete. Da α gegeben ist, kann man b mithilfe der Cosinusfunktion berechnen:

$\cos(\alpha) = \frac{b}{c} \Rightarrow b = c \cdot \cos(\alpha)$

$b = 5{,}7 \text{ cm} \cdot \cos(56{,}4°) = 3{,}154... \text{ cm} \approx 3{,}15 \text{ cm}$

Die Winkelsumme in einem Dreieck beträgt 180°. Man erhält β durch Subtrahieren der bekannten Winkel α und 90° von 180°:

$\beta = 180° - (90° + \alpha) = 90° - \alpha = 90° - 56{,}4° = 33{,}6°$

Aufgaben 7.18 – 7.20: Fertige – falls nötig – jeweils eine Skizze an. Beschreibe deine Rechenschritte.

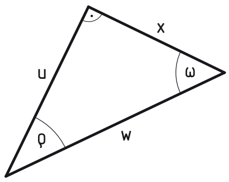
ABC **7.18** Von einem rechtwinkligen Dreieck sind die Länge einer Seite und die Größe eines Winkels gegeben. Berechne die Längen der beiden anderen Seiten und die Größe des fehlenden Winkels.

**a)** $c = 12$ cm, $\alpha = 17°$ **b)** $a = 37$ mm, $\alpha = 33°$ **c)** $b = 111$ m, $\alpha = 29{,}9°$

ABC **7.19** Von einem rechtwinkligen Dreieck sind zwei Bestimmungsstücke gegeben. Berechne die fehlenden Seitenlängen bzw. die Größen der fehlenden Winkel.

**a)** $w = 5{,}67$ m, $\rho = 38°$ **c)** $u = 45{,}98$ dm, $x = 65{,}67$ dm

**b)** $x = 1{,}1$ cm, $\omega = 72{,}2°$ **d)** $w = 0{,}07$ m, $u = 0{,}06$ m




ABC **7.20** Von einem rechtwinkligen Dreieck sind die Länge einer der beiden Hypotenusenabschnitte p oder q und ein weiteres Bestimmungsstück gegeben. Berechne die Länge der Seite a bzw. b bzw. die Höhe $h_c$ und die Größen der Winkel α und β.

**a)** $p = 18$ cm, $h_c = 24$ cm **b)** $q = 6{,}4$ m, $h_c = 4{,}8$ m **c)** $p = 25$ dm, $a = 65$ dm

**7.21** Von einem gleichschenkligen Dreieck sind zwei Bestimmungsstücke gegeben. Berechne die Längen der fehlenden Seiten, die Höhen, die Größen der fehlenden Winkel und den Flächeninhalt. Fertige eine Skizze an und beschreibe deine Rechenschritte. ABC

**a)** $a = 334$ mm, $c = 72$ mm **c)** $h_c = 5{,}2$ cm, $\gamma = 64°$ **e)** $h_a = 4$ dm, $c = 5{,}6$ dm
**b)** $c = 39$ cm, $\alpha = 35°$ **d)** $a = 2{,}4$ m, $c = 1{,}9$ m **f)** $h_c = 56{,}73$ cm, $a = 75{,}7$ cm

**7.22** **1)** Gib ohne zu rechnen an, ob die Lösungen zu den folgenden Aufgaben bei Berechnungen in einem rechtwinkligen Dreieck stimmen können. Begründe deine Antwort. BCD

**2)** Überprüfe deine Vermutung durch eine Rechnung.

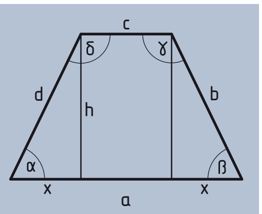
**a)** Gegeben: $a = 3$ cm, $b = 4$ cm
Gesucht: $\alpha$, $\beta$, c
Lösung: $\alpha = 48{,}59°$; $\beta = 53{,}13°$; $c = 6$ cm

**b)** Gegeben: $b = 5$ m, $\beta = 22{,}62°$
Gesucht: c, a, $\alpha$
Lösung: $c = 5{,}42$ m; $a = 12$ m; $\alpha = 67{,}38°$

### 7.2.2 Berechnungen in ebenen Figuren

Viele ebene Figuren lassen sich in rechtwinklige Dreiecke zerlegen, sodass fehlende Größen berechnet werden können.

**7.23** Von einem gleichschenkligen Trapez kennt man die Größe des Winkels $\alpha = 64{,}2°$, die Länge der Seite $d = 4{,}1$ m und die Länge der Seite $c = 2{,}3$ m. Berechne die Höhe h, die Länge der Seite a und die Größe des Winkels $\delta$. AB




Lösung:

$\sin(\alpha) = \frac{h}{d} \Rightarrow h = d \cdot \sin(\alpha)$

$h = 4{,}1 \text{ m} \cdot \sin(64{,}2°) = 3{,}691\ldots \text{ m} \approx 3{,}69 \text{ m}$

$\cos(\alpha) = \frac{x}{d} \Rightarrow x = d \cdot \cos(\alpha)$

$x = 4{,}1 \text{ m} \cdot \cos(64{,}2°) = 1{,}784\ldots \text{ m}$

$a = c + 2 \cdot x = 2{,}3 \text{ m} + 2 \cdot 1{,}784\ldots \text{ m} = 5{,}868\ldots \text{ m} \approx 5{,}87 \text{ m}$

$\alpha + \delta = 180° \Rightarrow \delta = 180° - \alpha \Rightarrow \delta = 180° - 64{,}2° = 115{,}8°$

- Das Trapez wird in zwei rechtwinklige Dreiecke und ein Rechteck zerlegt. h und a werden berechnet.
- $\delta$ ist ein Parallelwinkel zu $\alpha$.

Aufgaben 7.24 – 7.26: Fertige jeweils eine Skizze an.

**7.24** Von einem Rechteck kennt man die Länge d der Diagonale und die Größe des Winkels $\varphi$, unter dem sie einander schneiden. Berechne die Länge und die Breite des Rechtecks. AB

**a)** $d = 64$ mm, $\varphi = 22°$ **b)** $d = 3{,}66$ m, $\varphi = 82°$ **c)** $d = 0{,}3$ dm, $\varphi = 45°$

**7.25** Die Längen der Diagonalen e und f einer Raute sind gegeben. Berechne die Länge der Seite a und die Größen der Winkel $\alpha$ und $\beta$. AB

**a)** $e = 36$ mm, $f = 19$ mm **b)** $e = 7{,}1$ cm, $f = 65$ mm **c)** $e = 24$ cm, $f = 3{,}5$ dm

**7.26** Von einem Deltoid sind drei Bestimmungsstücke gegeben. Berechne die Seitenlängen, die Längen der Diagonalen sowie die Größen der Winkel. AB

**a)** $a = 13$ mm, $b = 19$ mm, $\alpha = 56°$ **c)** $f = 66$ mm, $\alpha = 126°$, $\beta = 72°$
**b)** $b = 4{,}5$ cm, $e = 5{,}3$ cm, $f = 3{,}6$ cm **d)** $a = 2{,}5$ m, $e = 2{,}7$ m, $f = 3{,}4$ m

AB **7.27** Berechne die Längen der Diagonalen eines Parallelogramms mit folgenden Bestimmungsstücken. Fertige zuerst eine Skizze an.

**a)** $a = 44$ mm, $b = 26$ mm, $\alpha = 62°$
**b)** $a = 45{,}7$ cm, $b = 3{,}85$ dm, $\beta = 114°$
**c)** $a = 8{,}5$ m, $b = 6{,}3$ m, $\alpha = 48{,}8°$
**d)** $a = 14$ dm, $b = 36{,}4$ dm, $\beta = 145°$

AB **7.28** Von einem Trapez kennt man die Längen zweier Seiten und die Größen zweier Winkel. Berechne die Längen der beiden fehlenden Seiten, die Größen der fehlenden Winkel, die Höhe sowie den Flächeninhalt. Fertige zuerst eine Skizze an.

**a)** $a = 53$ m, $b = 25$ m, $\alpha = 67°$, $\beta = 38°$
**b)** $d = 312$ m, $c = 244$ m, $\alpha = 72{,}5°$, $\gamma = 61{,}2°$

AB **7.29** Berechne die Länge der Diagonale eines regelmäßigen Fünfecks (Abb 7.10), wenn die Seitenlänge $a = 42$ mm ist.

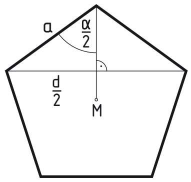
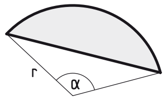



Abb. 7.10

AB **7.30** Der Umkreisradius eines regelmäßigen Achtecks beträgt $r = 24$ m. Berechne die Seitenlänge.

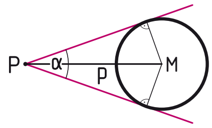
AB **7.31** Der Umkreisradius eines gleichseitigen Dreiecks beträgt $r = 14{,}5$ cm. Berechne den Inkreisradius und die Seitenlänge des Dreiecks.

AB **7.32** Berechne den Flächeninhalt eines Kreisabschnitts, wenn der Radius $r = 4{,}2$ cm und $\alpha = 122°$ gegeben sind.




ABCD **7.33** Ein Punkt P hat vom Mittelpunkt M eines Kreises mit dem Radius $r = 6$ m den Abstand p.

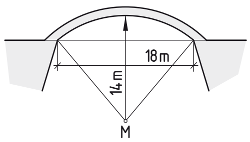
**1)** Berechne die Größe des Winkels $\alpha$, unter dem die beiden aus P an den Kreis gelegten Tangenten einander schneiden, wenn $p = 10$ m ist.
**2)** Gib an, welche Werte für $\alpha$ möglich sind. Welcher Fall tritt ein, wenn $\alpha = 180°$ ist? Unterstütze deine Erklärung mit einer Zeichnung.



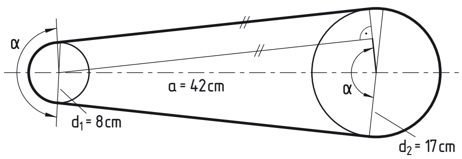

ABCD **7.34** Zwei Kreise mit den Radien $r_1 = 5$ cm und $r_2 = 8$ cm schneiden einander in zwei Punkten. Sie haben eine gemeinsame Sehne mit der Länge $s = 6$ cm.

**1)** Fertige eine Skizze an und berechne die Größe des Winkels $\alpha$, unter dem die Kreise einander schneiden. (Das ist der Winkel, den die Tangenten miteinander einschließen.)
**2)** Überlege und erkläre, welcher Fall eintritt, wenn der Winkel $\alpha = 90°$ beträgt. Unterstütze deine Argumentation mit einer Zeichnung.

AB **7.35** Im Inneren eines kreisbogenförmigen Brückenträgers einer Eisenbrücke soll ein Kabel verlegt werden. Berechne die Mindestlänge des Kabels, wenn die Brücke die angegebenen Abmessungen hat.



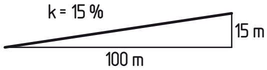

AB **7.36** Berechne die Länge einer gespannten Fahrradkette, wenn das hintere Zahnrad den Durchmesser $d_1 = 8$ cm, das vordere Zahnrad den Durchmesser $d_2 = 17$ cm und die Mittelpunkte der beiden Zahnräder den Abstand $a = 42$ cm haben.



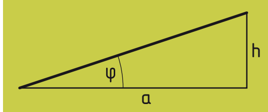
### 7.2.3 Steigung und Steigungswinkel

Im Straßenverkehr und in Geländeprofilen werden Steigungen oft in Prozent oder als Verhältnis zweier Zahlen angegeben. Dabei wird eine vertikale Länge ins Verhältnis zu der zugehörigen horizontalen Länge gesetzt. Auf Seite 181 wurde die Angabe einer Steigung in Prozent bereits erklärt. Bei einer Steigung von beispielsweise 15 % gilt, dass zum Beispiel bei 100 m in waagrechter Entfernung 15 m in senkrechter Richtung zurückgelegt werden.

Für k = 15 % kann man daher schreiben: $k = \frac{15\text{ m}}{100\text{ m}} = 15 : 100 = 0{,}15$




Die Steigung kann auch mithilfe des Steigungswinkels angegeben werden.

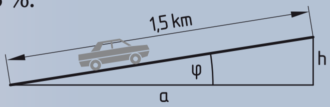



Die **Steigung** k ist das Verhältnis $\frac{h}{a}$ der Höhe h zur Strecke a in horizontaler Richtung.

Der **Steigungswinkel** oder **Neigungswinkel** $\varphi$ ist der Winkel, den eine Gerade oder Ebene mit der Horizontalen einschließt.

Es gilt: $k = \tan(\varphi) = \frac{h}{a}$ bzw. $\varphi = \arctan\left(\frac{h}{a}\right) = \arctan(k)$

**7.37** Eine geradlinige Straße hat eine konstante Steigung von 15 %. AB




***1)*** Gib die Steigung als Verhältnis an.
***2)*** Wie groß ist der Neigungswinkel $\varphi$, unter dem die Fahrbahn gegenüber der Horizontalen geneigt ist?
***3)*** Welchen Höhenunterschied h überwindet ein Fahrzeug, wenn es 1,5 km fährt?
***4)*** Welche Strecke a legt es in horizontaler Richtung zurück, wenn es 840 m fährt?

Lösung:
***1)*** Steigung 15 % bedeutet: $\frac{h}{a} = 0{,}15$ bzw. $h : a = 0{,}15 : 1 = 15 : 100$
***2)*** $\tan(\varphi) = \frac{h}{a} = 0{,}15 \;\Rightarrow\; \varphi = \arctan(0{,}15) \;\Rightarrow\; \varphi = 8{,}530...° \approx 8{,}53°$
***3)*** $\sin(\varphi) = \frac{h}{1{,}5\text{ km}} \;\Rightarrow\; h = 1{,}5\text{ km} \cdot \sin(\varphi)$
$h = 1{,}5\text{ km} \cdot \sin(8{,}530...°) = 0{,}2225...\text{ km} \approx 0{,}223\text{ km} = 223\text{ m}$
***4)*** $\cos(\varphi) = \frac{a}{840\text{ m}} \;\Rightarrow\; a = 840\text{ m} \cdot \cos(\varphi)$
$a = 840\text{ m} \cdot \cos(8{,}530...°) = 830{,}706...\text{ m} \approx 831\text{ m}$

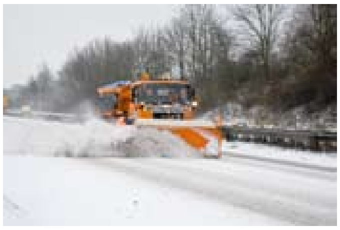
**7.38** Bei der Fernsehübertragung des Riesentorlaufs der Herren bei der alpinen Schi-WM 2011 in Garmisch und Partenkirchen erwähnte der Kommentator, dass die Steigung am Streckenteil „Freier Fall" der Kandahar-Strecke 92 % beträgt. Jasmin und Cem haben das Rennen gesehen und unterhalten sich am nächsten Tag in der Pause darüber. Jasmin ist beeindruckt davon, dass sich die Rennläufer in den senkrechten Hang stürzen mussten. Cem hingegen meint, dass ein Gefälle von 92 % keinesfalls einem Winkel von mehr als 90° entsprechen kann. ABCD

***1)*** Diskutiere mit deiner Sitznachbarin bzw. deinem Sitznachbarn, wer von den beiden Recht haben kann. Überprüft eure Vermutungen mithilfe einer Rechnung.
***2)*** Welchem Winkel entspricht ein Anstieg von 100 %, welchem ein Anstieg von 200 %?
***3)*** Überlege, ob es möglich ist, einen Steigungswinkel von 90° in Prozent anzugeben.

D **7.39** Eine Steigung von 100 % entspricht einem Steigungswinkel von 45°. Yvonne schließt daraus, dass einer Steigung von 10 % ein Winkel von 4,5° entsprechen muss. Überlege und argumentiere, ob der Schluss von Yvonne zulässig ist oder nicht.

BCD **7.40** Im Winter kommt es auf manchen Streckenabschnitten auf Österreichs Straßen immer wieder zu massiven Verkehrsproblemen.

**1)** Recherchiere im Internet die maximale Steigung des „Knoten Steinhäusl" auf der Wiener Außenring-autobahn A21 sowie die der Passstraße auf die „Turracher Höhe" im Grenzgebiet zwischen Steiermark und Kärnten.



**2)** Berechne jeweils den Steigungswinkel.

**3)** Diskutiert in der Klasse, warum es gerade auf diesen Straßen im Winter zu Problemen kommt, und überlegt, wie man dies vermeiden könnte.

B **7.41** Berechne die Größe des Steigungswinkels für eine Straße mit der angegebenen Steigung.

**a)** 5 % **b)** 7,5 % **c)** 12 % **d)** 16 %

BC **7.42** **1)** Berechne die Größe des Steigungswinkels einer Geraden mit $k = 1$ bzw. $k = 2$.

**2)** Berechne die Größe der Steigung für $\alpha = 10°$ und $\alpha = 20°$.

**3)** Vergleiche die Ergebnisse. Was fällt dir auf?

B **7.43** Berechne die Größe des Steigungswinkels und die Steigung in Prozent für eine Bahnstrecke mit der gegebenen Steigung.

**a)** Steigung $k = 1 : 220$ **b)** Steigung $k = 1 : 500$

Aufgaben 7.44 – 7.46: Fertige jeweils eine geeignete Skizze an und formuliere eine Antwort.

AB **7.44** Ein Snowboarder fährt ein unter 20° abfallendes Rail hinunter. Berechne die Länge des Rails, wenn der Endpunkt um h tiefer ist als der Anfangspunkt.

**a)** $h = 2$ m **b)** $h = 4,5$ m **c)** $h = 7,5$ m

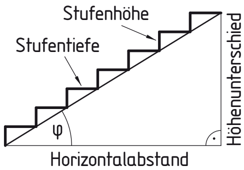
AB **7.45** Im Wasserkraftwerk Malta in Kärnten wird das Wasser durch einen Druckstollen mit einer Druckleitung von der Staumauer zum Turbinenhaus geleitet. Welcher Höhenunterschied wird mit der Druckleitung überwunden, wenn sie 1,85 km lang ist und das mittlere Gefälle der Leitung 74,5 % beträgt?

AB **7.46** Neben einer Treppe, mit der ein Höhenunterschied von 60 cm überwunden wird, soll eine Rampe errichtet werden.

**1)** Wie lang muss sie mindestens sein, wenn die Steigung höchstens 6 % betragen darf?

**2)** Welche Steigung wird die Rampe haben, wenn aus Platzgründen der maximal mögliche Horizontalabstand 12 m beträgt?

AB **7.47** Die Steigung einer in einem Wohnhaus zu errichtenden Treppe soll 58 % betragen, die Stufenhöhe 17 cm.




**1)** Berechne die Größe des Steigungswinkels φ der Treppe.

**2)** Berechne die Stufentiefe.

**3)** Welcher Horizontalabstand wird benötigt, wenn die Treppe einen Höhenunterschied von 2,9 m überwinden soll?

**7.48** Die Talstation der Zau[:ber:]g Kabinenbahn am Semmering liegt auf 995 m Seehöhe, die Bergstation auf 1 350 m. Auf einer Wanderkarte im Maßstab 1 : 50 000 beträgt der Abstand zwischen Tal- und Bergstation 1,65 cm. AB

***1)*** Berechne den Neigungswinkel, die Steigung in Prozent und die Länge der Seilbahn.

***2)*** Berechne, wie viel Minuten eine Fahrt von der Berg- zur Talstation dauert, wenn die mittlere Geschwindigkeit der Kabinenbahn 20 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ beträgt.

### 7.2.4 Flächenprojektionssatz

Eine rechteckige Fläche A ist gegenüber einer Ebene $\varepsilon$ unter dem Winkel $\varphi$ geneigt. Wird A im rechten Winkel zu $\varepsilon$ auf $\varepsilon$ projiziert, so ergibt sich die Fläche A′ (siehe Abb. 7.11). Zwischen den Flächeninhalten von A und A′ besteht folgender Zusammenhang:

Da A und A′ Rechtecke sind, gilt für die Flächeninhalte $A = a \cdot b$ und $A' = a' \cdot b$. Für die Seitenlängen a von A und a′ von A′ gilt:

$\cos(\varphi) = \frac{a'}{a} \;\Rightarrow\; a' = a \cdot \cos(\varphi)$

Damit ergibt sich für den Flächeninhalt:

$A' = a' \cdot b = a \cdot \cos(\varphi) \cdot b = a \cdot b \cdot \cos(\varphi) = A \cdot \cos(\varphi)$

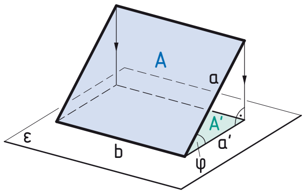


Abb. 7.11

Man erhält den Flächeninhalt A′ der projizierten Fläche durch Multiplikation des Flächeninhalts A der unter dem Winkel $\varphi$ geneigten Fläche mit dem Faktor $\cos(\varphi)$. Dieser Zusammenhang gilt für beliebige Flächen konstanter Neigung und heißt **Flächenprojektionssatz**.

$A' = A \cdot \cos(\varphi)$

**7.49** Der Grundriss eines Hauses hat einen Flächeninhalt von 123 $m^2$. Berechne den Gesamtinhalt der Dachfläche, wenn sie unter einem Winkel von 56° geneigt ist. AB

**7.50** Ein Haus hat einen rechteckigen Grundriss und ist 10 m lang und 7 m breit, die Dachflächen sind unter 42° geneigt. Berechne die Größe des Dachs. AB

**7.51** Der Flächeninhalt eines unter 25° geneigten Pultdachs einer Garage beträgt 27 $m^2$. Berechne die Größe des Grundrisses der Garage. AB

**7.52** Das in Abb. 7.12 dargestellte Walmdach hat eine Höhe von 5 m. AB

***1)*** Berechne die Größen der Neigungswinkel der Dachflächen.

***2)*** Berechne die Größe der gesamten Dachfläche.

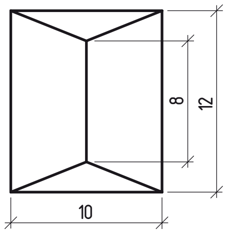
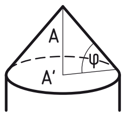


Abb. 7.12
Maße in Meter

**7.53** Bei einer Grillparty wird eine 8 $m^2$ große, rechteckige Zeltplane mit einer Länge von 4 m unter einem Winkel von $\alpha = 65°$ zur ebenen Gartenfläche aufgestellt, um Schatten zu spenden. Am Beginn des Festes treffen die Sonnenstrahlen im rechten Winkel auf die Plane auf. Fertige eine Skizze an und berechne den Inhalt der Schattenfläche. AB

**7.54** Ein Turm mit kreisförmiger Grundfläche hat ein kegelförmiges Dach. Die Dachfläche beträgt 112 $m^2$ und die Grundfläche beträgt 56 $m^2$. ABD

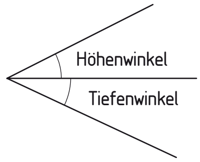



***1)*** Zeige, dass man die Dachfläche auch bei kegelförmigen Dächern mit dem Flächenprojektionssatz berechnen kann.

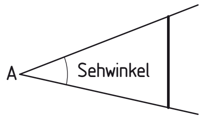
***2)*** Berechne, unter welchem Winkel das Dach geneigt ist.

### 7.2.5 Vermessungsaufgaben

Ein Winkel mit einem horizontalen und einem schräg nach oben verlaufenden Schenkel heißt **Höhenwinkel**. Ein Winkel mit einem horizontalen und einem schräg nach unten verlaufenden Schenkel heißt **Tiefenwinkel**.

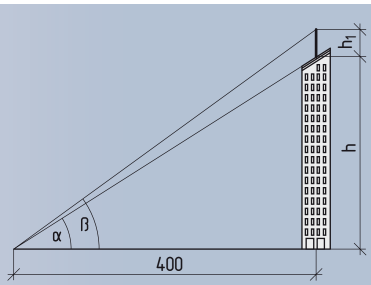



Der Winkel, unter dem eine Strecke von einem Punkt A aus erscheint, heißt **Sehwinkel**.




Der Neigungswinkel der Sonnenstrahlen zur Horizontalen heißt **Sonnenhöhe**.

AB **7.55** Auf einem in horizontaler Richtung 400 m entfernten Büroturm ist ein Handymast angebracht. Das untere Ende des Masts erscheint vom Boden aus unter einem Höhenwinkel von $\alpha = 16{,}7°$ und die Spitze unter dem Höhenwinkel $\beta = 18{,}0°$. Wie hoch ist der Mast?




Lösung:

$\tan(\alpha) = \frac{h}{400\text{ m}} \Rightarrow h = 400\text{ m} \cdot \tan(\alpha)$

$\Rightarrow h = 400\text{ m} \cdot \tan(16{,}7°) = 120{,}005\ldots\text{ m}$

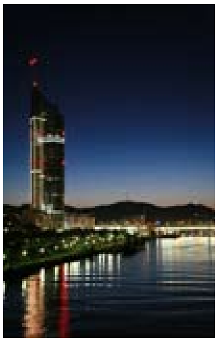
$\tan(\beta) = \frac{h + h_1}{400\text{ m}} \Rightarrow h + h_1 = 400\text{ m} \cdot \tan(\beta) \Rightarrow h + h_1 = 400\text{ m} \cdot \tan(18°) = 129{,}967\ldots\text{ m}$

$h_1 = 129{,}967\ldots\text{ m} - 120{,}005\ldots\text{ m} = 9{,}962\ldots\text{ m} \approx 10\text{ m}$

Der Mast ist ca. 10 m hoch.

AB **7.56** Wie hoch ist ein Gebäude, das bei einer Sonnenhöhe von 36° einen 130 m langen Schatten wirft?

ABC **7.57** ***1)*** Recherchiere, welchen Wert die Sonnenhöhe in Wien zur Wintersonnenwende zu Mittag hat.
***2)*** Berechne, wie lang zu diesem Zeitpunkt der Schatten des 202 m hohen Milleniumtowers ist.



AB **7.58** Der Südturm des Wiener Stephansdoms ist 136 m hoch.
***a)*** Am 21. Juni zu Mittag (Sommersonnenwende) wirft der Turm einen 63 m langen Schatten. Wie groß ist die Sonnenhöhe zu diesem Zeitpunkt?
***b)*** Am 21. Dezember zu Mittag (Wintersonnenwende) wirft der Turm einen 410 m langen Schatten. Wie groß ist die Sonnenhöhe zu diesem Zeitpunkt?

AB **7.59** An einem Haus, das auf einem horizontalen Platz steht, ist in 5,20 m Höhe die Verankerung für eine Fahnenstange angebracht. Ein Beobachter mit 1,72 m Aughöhe (senkrechter Abstand der Augen über dem Platz) sieht die Verankerung unter einem Höhenwinkel von 23°. Wie weit ist er vom Haus entfernt?

AB **7.60** Von einem 7 m hohen Aussichtsturm am Ufer eines Sees (Höhe gemessen von der Oberfläche des Sees) sieht man bei einer Aughöhe von 1,7 m ein Ruderboot unter einem Tiefenwinkel von 4,7°. Wie weit ist das Boot vom Ufer entfernt?

**7.61** Vom höchsten Punkt eines Bergs mit 452 m Seehöhe sieht man das untere Ende eines Gipfelkreuzes eines Bergs mit 1 350 m Seehöhe unter einem Höhenwinkel von 24,1°. Man sieht das obere Ende unter einem Höhenwinkel von 24,2°. Berechne die Höhe des Gipfelkreuzes. Vernachlässige die Aughöhe. AB

**7.62** Herr van der Zijden macht Urlaub in Wien. Er steht a = 90 m vom Wiener Riesenrad entfernt und sieht die Achse des Rads unter einem Höhenwinkel von $\alpha$ = 24,33°. Er schwenkt seinen Blick um $\beta$ = 16,87° nach oben und sieht den höchsten Punkt des Rads. ABCD

***1)*** Gib an, welche der beiden Skizzen ***A)*** oder ***B)*** zu dieser Situation passt und begründe, warum die andere nicht passt.

***A)*** ***B)***


***2)*** Berechne aus den gegebenen Werten den Durchmesser des Riesenrads. Rechne zuerst allgemein und setze dann erst die Zahlenwerte ein (Aughöhe: 1,7 m).

**7.63** Ein Wetterballon steigt senkrecht auf. In 2 km Entfernung vom Startplatz befindet sich ein Beobachtungspunkt auf gleicher Meereshöhe. Von dort aus erscheint der Wetterballon 10 Minuten nach dem Start unter einem Höhenwinkel von 14° und 15 Minuten nach dem Start unter einem Höhenwinkel von 22°. AB

***1)*** Welche Höhe hat der Ballon zum ersten Kontrollzeitpunkt nach 10 Minuten erreicht, welche Höhe zum zweiten nach 15 Minuten?

***2)*** Berechne die mittleren Geschwindigkeiten des Ballons bis zum ersten Kontrollzeitpunkt und zwischen erstem und zweitem Kontrollzeitpunkt

***3)*** Um wie viel Prozent hat sich die mittlere Geschwindigkeit nach dem ersten Kontrollzeitpunkt geändert?

**7.64** Auf einem Hang, der in einem Winkel von $\alpha$ = 10,81° zur Horizontalen geneigt ist, steht ein Handymast. Fallen die Sonnenstrahlen in einem Winkel $\varphi$ = 55,00° zur Horizontalen ein, so fällt ein Schatten der Länge s = 16 m hangabwärts. Fertige zuerst eine aussagekräftige Skizze an und entwickle dann eine Vorgehensweise zur Ermittlung der Höhe des Handymasts. Berechne anschließend die Höhe. ABC

**7.65** Familie Fellner macht Urlaub an einem Bergsee. Von der 25 m über dem See gelegenen Dachterrasse des Hotels aus können sie den Fußpunkt des Gipfelkreuzes am gegenüberliegenden Berg mithilfe eines schwenkbaren Fernrohrs unter einem Höhenwinkel von 11,45° anvisieren. Unter einem Tiefenwinkel von 12,59° sehen sie das Spiegelbild des Kreuzes (Fußpunkt) im See. AB

***1)*** Fertige eine möglichst aussagekräftige Skizze an.

***2)*** Am Gipfelkreuz ist die Meereshöhe des Bergs auf einer Plakette mit 2 026 m angegeben. Auf welcher Meereshöhe liegt der Bergsee an dem Familie Fellner Urlaub macht?

***3)*** Entwickle eine allgemeine Formel zur Berechnung des Höhenunterschieds zwischen dem See und dem Berg und gib sie an.

AB **7.66** Ein 12 m hoher Turm steht in der Mitte eines quadratischen Platzes. Vom Turm aus sieht eine Beobachterin (Aughöhe 1,67 m) alle Ecken des Platzes unter dem gleichen Tiefenwinkel von 11°. Berechne die Seitenlänge des Platzes.

ABC **7.67** Auf dem Grazer Schlossberg steht 123 Höhenmeter über der Grazer Altstadt der 28 m hohe Uhrturm. Von der Spitze des Turms aus sieht man das Rathaus unter einem Tiefenwinkel von $\alpha = 12{,}46°$. Dreht man sich um 90° nach Osten, so sieht man die Universität Graz unter einem Tiefenwinkel von $\beta = 6{,}67°$.

**1)** Fertige eine räumliche Skizze der Situation an. Nimm dabei an, dass sich das Rathaus und die Universität in der gleichen Horizontalebene wie die Altstadt befinden.

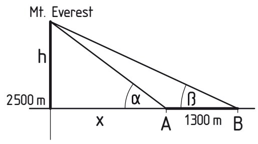
**2)** Berechne die Entfernung zwischen dem Rathaus und der Universität. Überlege zuerst eine Vorgehensweise und beschreibe deine Rechenschritte.

ABC **7.68** Die Abbildung zeigt die Schlossbrücke in St. Petersburg über die „Große Newa". Die Brückenarme über dem 52 m breiten Mittelteil können nachts in einem Winkel von bis zu 45° hochgeklappt werden, um Schiffen die Durchfahrt zur Ostsee zu ermöglichen. Die Gelenke der Brücke liegen rund 10 m über der Wasseroberfläche.

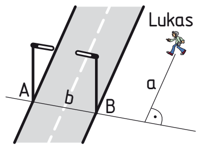
**1)** Ein Frachter ist mit quaderförmigen Containern beladen, die auf einer Breite von 20 m auf dem Schiff angeordnet sind. Der Frachter ragt mit den Containern 17 m über die Wasseroberfläche hinaus. Ist es möglich, die Brücke zu passieren, wenn beide Brückenarme im größtmöglichen Winkel geöffnet sind?

**2)** Bis zu welcher Höhe, von der Wasseroberfläche aus gemessen, wäre es für das Schiff theoretisch möglich, die Brücke zu passieren?

AB **7.69** Um die Höhe des Mt. Everest zu vermessen, wurden in einem ebenen Gelände auf 2 500 m Seehöhe von zwei Messpunkten A und B die Höhenwinkel zum Gipfel des Bergs gemessen. Die Messpunkte wurden so gewählt, dass sie mit dem Gipfel in einer Vertikalebene lagen und voneinander 1 300 m entfernt waren. Berechne die Höhe, wenn in A der Winkel $\alpha = 6°2'28{,}73''$ und in B der Winkel $\alpha = 5°54'50{,}81''$ gemessen wurden. Hinweis: Verwende zur Lösung ein lineares Gleichungssystem mit zwei Variablen.



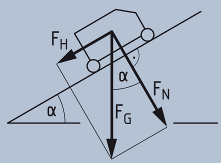

ABC **7.70** Lukas erhält den Auftrag, die Breite b einer stark befahrenen Straße zu bestimmen. Dazu erhält er ein Gerät, mit dem man Winkel in einer Horizontalebene messen kann. An beiden Seiten der Straße stehen Beleuchtungsmasten A und B einander direkt gegenüber. Fertige eine Skizze an, die diese Situation von oben zeigt und vervollständige sie so, dass Lukas die Breite der Straße bestimmen kann. Erfinde sinnvolle Werte für die Winkel und die Abstände so, dass die Aufgabe eindeutig lösbar und das Ergebnis realistisch ist.



### 7.2.6 Anwendungen aus Naturwissenschaft und Technik

Kräfte und Geschwindigkeiten werden oft durch Pfeile dargestellt, deren Länge der Größe der Kraft bzw. Geschwindigkeit entspricht. Die Berechnungen beim Zusammensetzen oder Zerlegen von Kräften bzw. Geschwindigkeiten lassen sich auf das Arbeiten mit Dreiecken zurückführen.

**7.71** Ein Wagerl mit dem Gewicht $F_G = 800$ N steht auf einer unter $\alpha = 30°$ geneigten Rampe. Mit welcher Hangabtriebskraft $F_H$ wird das Wagerl längs der Rampe hinuntergezogen und mit welcher Normalkraft $F_N$ drückt es gegen die Rampe? **AB**




Lösung:

$\sin(\alpha) = \frac{F_H}{F_G} \Rightarrow F_H = F_G \cdot \sin(\alpha)$

$F_H = 800\text{ N} \cdot \sin 30° = 400\text{ N}$

$\cos(\alpha) = \frac{F_N}{F_G} \Rightarrow F_N = F_G \cdot \cos(\alpha)$

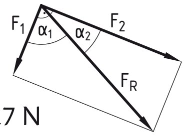
$F_N = 800\text{ N} \cdot \cos(30°) = 692{,}820...\text{ N}$

Hangabtriebskraft $F_H = 400$ N, Normalkraft $F_N = 693$ N

- Die Hangabtriebskraft $F_H$ wirkt parallel zur Rampe, die Normalkraft $F_N$ wirkt im rechten Winkel zur Rampe. Die Winkel $\alpha'$ und $\alpha$ sind Normalwinkel und daher gleich groß.

**7.72** Mit welcher Hangabtriebskraft $F_H$ wird der Wagen eines Schrägaufzugs längs des Gleises hinuntergezogen und mit welcher Normalkraft $F_N$ wird er gegen das Gleis gedrückt, wenn der Wagen das Gewicht $F_G$ und das Gleis den Steigungswinkel $\alpha$ hat? **AB**
**a)** $F_G = 7$ kN, $\alpha = 45°$  **b)** $F_G = 20$ kN, $\alpha = 15°$  **c)** $F_G = 120$ kN, $\alpha = 29{,}5°$

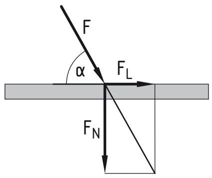
**7.73** Zwei Kräfte $F_1$ und $F_2$ stehen im rechten Winkel zueinander. Berechne die resultierende Kraft $F_R$ und die Größe des Winkels $\alpha_1$ zwischen $F_1$ und $F_R$ bzw. $\alpha_2$ zwischen $F_2$ und $F_R$. **B**




**a)** $F_1 = 20$ N, $F_2 = 50$ N  **b)** $F_1 = 134$ N, $F_2 = 67$ N  **c)** $F_1 = 0{,}56$ N, $F_2 = 1{,}27$ N

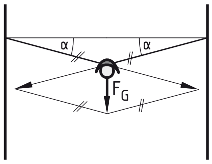
**7.74** Eine Kraft F soll in zwei Richtungen zerlegt werden, die zueinander im rechten Winkel stehen. Die Kraft F schließt mit einer der beiden Richtungen den Winkel $\alpha$ ein. Berechne die in den beiden Richtungen auftretenden Kräfte. **AB**
**a)** $F = 100$ N, $\alpha = 28°$  **b)** $F = 23{,}4$ kN, $\alpha = 17{,}2°$  **c)** $F = 423$ N, $\alpha = 42°$

**7.75** Auf einen Holzbalken wirkt eine Kraft F unter einem Winkel $\alpha$. F kann in eine Kraft $F_N$ normal zum Balken und in eine Kraft $F_L$ in Richtung des Balkens zerlegt werden. Berechne die beiden Kräfte. **AB**



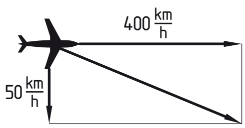

**a)** $F = 7{,}2$ kN, $\alpha = 75°$  **c)** $F = 2{,}8$ kN, $\alpha = 0°$  **e)** $F = 80$ N, $\alpha = 45°$
**b)** $F = 3{,}4$ kN, $\alpha = 90°$  **d)** $F = 870$ N, $\alpha = 89°$  **f)** $F = 1$ kN, $\alpha = 68{,}7°$

**7.76** Eine Straßenlampe mit dem Gewicht $F_G$ ist an Seilen genau in der Mitte zwischen zwei Häusern aufgehängt. Die Seile schließen mit der Horizontalen den Winkel $\alpha$ ein. Berechne die Kräfte, die in den Seilen auftreten. **AB**

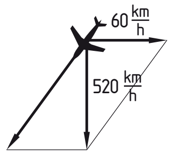



**a)** $F_G = 22$ N, $\alpha = 5°$  **b)** $F_G = 150$ N, $\alpha = 12°$  **c)** $F_G = 65$ N, $\alpha = 21°$

**7.77** Ein Flugzeug fliegt mit einer Geschwindigkeit von 400 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ in Kompassrichtung Osten. Es wird vom Nordwind mit 50 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ abgetrieben. In welche Richtung und mit welcher Geschwindigkeit über Grund fliegt das Flugzeug tatsächlich? **AB**



**AB 7.78** In welche Kompassrichtung und mit welcher Geschwindigkeit muss ein Pilot das Flugzeug steuern, damit es bei 60 $\frac{km}{h}$ starkem Westwind mit einer Geschwindigkeit von 520 $\frac{km}{h}$ den genau in südlicher Richtung liegenden Zielflughafen ansteuert?

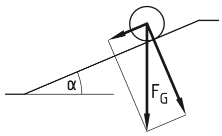



**ABD 7.79** Ein Fass mit m = 160 kg Masse soll eine Rampe mit dem Neigungswinkel $\alpha = 21°$ hinaufgerollt werden.

***1)*** Berechne, welche Kraft dazu mindestens notwendig ist.

***2)*** Zeige, dass eine Halbierung des Neigungswinkels der Rampe nicht zu einer Halbierung der erforderlichen Kraft aus ***1)*** führt.

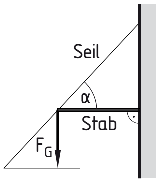
Hinweis: $F_G = m \cdot g$ mit $g = 9{,}81\ \frac{m}{s^2}$




**AB 7.80** An einem horizontalen Stab, der an einer senkrechten Mauer angebracht ist, hängt ein Schild mit $F_G = 75$ N. Damit im Stab keine Biegekräfte auftreten, ist zusätzlich ein Zugseil angebracht.

***a)*** Welche Kräfte treten im Zugseil und im Stab auf, wenn das Zugseil und der Stab einen Winkel von $\alpha = 47°$ einschließen?

***b)*** Wie groß muss der Winkel mindestens sein, wenn die maximal zulässige Kraft im Zugseil 350 N beträgt?




**AB 7.81** Die Fließgeschwindigkeit eines Flusses beträgt 6 $\frac{m}{s}$. Eine Fähre soll den Fluss im rechten Winkel zur Fließrichtung des Flusses mit einer Geschwindigkeit von 1,3 $\frac{m}{s}$ überqueren. Ermittle, in welche Richtung und mit welcher Geschwindigkeit die Fähre gesteuert werden muss.

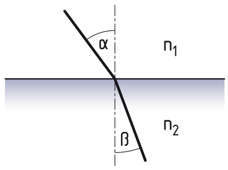
**AB 7.82** Die Fließgeschwindigkeit eines 150 m breiten Flusses beträgt 3 $\frac{m}{s}$. Laura möchte diesen Fluss überqueren. Sie schwimmt mit 0,5 $\frac{m}{s}$ normal zur Fließrichtung.

***1)*** In welche Richtung und mit welcher Geschwindigkeit bewegt sie sich tatsächlich?

***2)*** Wie viel Meter stromabwärts erreicht sie das andere Ufer?

**AB 7.83** Ein Lichtstrahl wird beim Übergang von Luft in Wasser zum Lot hin gebrochen. Das Brechungsgesetz $\frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)}$ gibt den Zusammenhang zwischen den Winkeln $\alpha$ und $\beta$ an. Berechne den Brechungswinkel $\beta$ bei gegebenem Winkel $\alpha$, wenn $\frac{n_2}{n_1} = \frac{4}{3}$ ist.

***a)*** $\alpha = 20°$ ***b)*** $\alpha = 65°$ ***c)*** $\alpha = 0°$ ***d)*** $\alpha = 45°$ ***e)*** $\alpha = 90°$




$n_1$, $n_2$ ... Brechzahlen

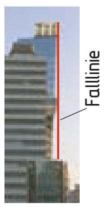
**AB 7.84** Das Seil eines Schrägaufzugs kann maximal mit einer Zugkraft von 251 kN belastet werden.

***1)*** Welche Masse darf der beladene Wagen maximal haben, wenn der Neigungswinkel des Gleises 32,7° beträgt und eine 9-fache Sicherheit zu berücksichtigen ist? (Das heißt, die Hangabtriebskraft darf höchstens $\frac{1}{9}$ der maximalen Zugkraft betragen.)

***2)*** Wie viele Personen mit durchschnittlich 75 kg können befördert werden, wenn die Eigenmasse des Wagens 3 000 kg beträgt?

Hinweis: $F_G = m \cdot g$ mit $g = 9{,}81\ \frac{m}{s^2}$

**AB 7.85** Ein Gegenstand fällt senkrecht vom Dach eines geneigten Gebäudes herab und trifft nach 3,1 Sekunden 2,5 m vom Gebäude entfernt am Dach des niedrigeren Nachbargebäudes auf. Berechne, unter welchem Winkel das Gebäude geneigt ist. Verwende zur Berechnung $s = \frac{g}{2} \cdot t^2$, wobei s (in Meter) der beim freien Fall nach der Zeit t (in Sekunden) zurückgelegte Weg ist.



### 7.2.7 Anwendungen in der Geografie und in der Astronomie

In den folgenden Aufgaben wird für Erde, Mond und Sonne ideale Kugelgestalt angenommen und die atmosphärischen Strahlenbrechungen werden vernachlässigt.

**7.86** Ein Wetterballon befindet sich in 20 km Höhe über der Erdoberfläche. Berechne den Radius der Erde, wenn sie vom Ballon aus unter dem Sehwinkel $\alpha$ = 170,932° erscheint. AB

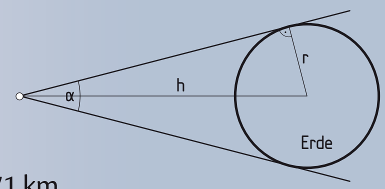
Lösung:

$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{r}{r + h} \;\Rightarrow\; r = (r + h) \cdot \sin\left(\frac{170{,}932°}{2}\right)$

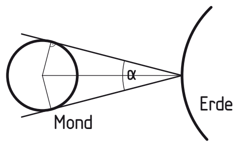
$r = (r + 20\text{ km}) \cdot 0{,}996...$

$r = 0{,}996... \cdot r + 19{,}937...\text{ km}$

$0{,}003... \cdot r = 19{,}937...\text{ km} \;\Rightarrow\; r = 6\,371{,}000...\text{ km} \approx 6\,371\text{ km}$




**7.87** Ein Beobachter auf der Erde sieht den Mond unter einem Sehwinkel von $\alpha = 31'5''$. Wie groß ist die Entfernung vom Beobachter zum Mittelpunkt des Monds, wenn der Monddurchmesser 3 476 km beträgt? AB




Aufgaben 7.88 – 7.93: Verwende für den Erdradius r = 6 371 km.

**7.88** Von einer Raumfähre aus erscheint die Erde unter einem Sehwinkel $\alpha$. Berechne, wie weit die Raumfähre von der Erdoberfläche entfernt ist. AB

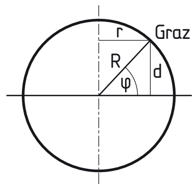
**a)** $\alpha$ = 15° **b)** $\alpha$ = 60° **c)** $\alpha$ = 150°

**7.89** Der Durchmesser der Sonne beträgt $1{,}39 \cdot 10^6$ km. Von der Erde aus erscheint die Sonne unter einem Sehwinkel von 0,515°. Berechne den Abstand vom Beobachter zur Sonne. AB

**7.90** Graz liegt auf der nördlichen Breite $\varphi \approx 47°$. AB

**1)** Berechne den Radius und den Umfang des zugehörigen Breitenkreises.

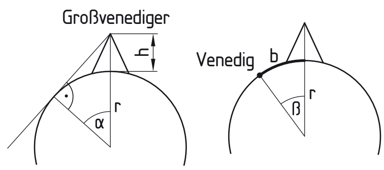
**2)** Welchen Abstand d hat Graz von der Äquatorebene?



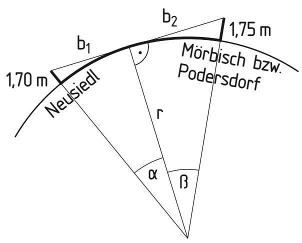

**7.91** Berechne die geografischen Breiten des Breitenkreises, dessen Radius **1)** die Hälfte, **2)** ein Viertel des Erdradius beträgt. ABC

Gib je zwei Orte an, die auf diesen Breitenkreisen liegen.

**7.92** Der h = 3 674 m hohe Großvenediger heißt so, weil man von seinem Gipfel bis nach Venedig sehen können soll. Zeige, dass dies theoretisch möglich ist, wenn Venedig vom Großvenediger b = 184 km entfernt ist. ABD




**7.93** Peter steht in Neusiedl am Strand des Neusiedler Sees und blickt über den See (Aughöhe 170 cm). Sein Freund Michael steht zur gleichen Zeit am Strand in Mörbisch und seine Freundin Nina in Podersdorf, beide sind 175 cm groß. Mörbisch ist 21 km und Podersdorf 7,4 km Luftlinie von Neusiedl entfernt. Kann Peter mit einem guten Fernglas Michael und Nina oder nur Nina sehen? Begründe deine Antwort. ABD

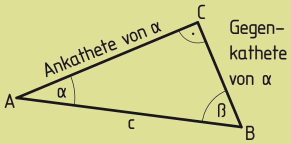


# Trigonometrie

## Zusammenfassung

Im rechtwinkligen Dreieck gilt:

**Gegenkathete** von $\alpha$: Seite, die dem Winkel $\alpha$ **gegen**überliegt
**Ankathete** von $\alpha$: Seite, die am Winkel $\alpha$ **an**liegt
**Hypotenuse**: Seite, die dem rechten Winkel gegenüberliegt




**Winkelfunktionen**

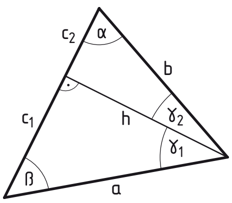
$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$ $\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$ $\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Ankathete von } \alpha}$

**Steigungswinkel** oder **Neigungswinkel** $\varphi$: Winkel einer Geraden oder einer Ebene mit der Horizontalen; $k = \tan(\varphi)$ bzw. $\varphi = \arctan(k)$

**Flächenprojektionssatz**: $A' = A \cdot \cos(\varphi)$
$A$ ... Flächeninhalt einer unter dem Winkel $\varphi$ geneigten beliebigen Fläche
$A'$ ... Flächeninhalt der Normalprojektion dieser Fläche

### Weitere Aufgaben

### Winkelberechnungen

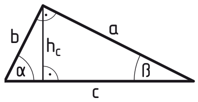



C **7.94** Ergänze den fehlenden Winkel bzw. gib das Seitenverhältnis an.
**a)** $\frac{c_2}{b} = \sin$ ? **b)** $\frac{c_1}{a} = \cos$ ? **c)** $\tan(\beta)$ **d)** $\sin(\gamma_1)$

B **7.95** Berechne.
**a)** $\cos(13{,}45°)$ **b)** $\tan(62°12'34'')$ **c)** $\sin(0{,}45°)$ **d)** $\cos(44°)$

B **7.96** Berechne die Größe des Winkels in Grad.
**a)** $\cos(\gamma) = 0{,}33$ **b)** $\tan(\varphi) = 3{,}5$ **c)** $\sin(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ **d)** $\cos(\varepsilon) = \frac{1}{4}$

### Ebene Figuren




B **7.97** Von einem rechtwinkligen Dreieck sind die Höhe $h_c$ und die Länge einer Seite oder die Größe eines Winkel gegeben. Berechne die Längen der fehlenden Seiten und die Größen der fehlenden Winkel.
**a)** $h_c = 91$ mm, $\alpha = 22°$ **e)** $h_c = 71$ m, $a = 84$ m
**b)** $h_c = 3{,}62$ m, $\alpha = 57{,}5°$ **f)** $h_c = 459{,}1$ dm, $a = 804$ dm
**c)** $h_c = 239$ km, $\beta = 38{,}8°$ **g)** $h_c = 2{,}9$ m, $b = 5{,}6$ m
**d)** $h_c = 0{,}56$ cm, $\beta = 66{,}7°$ **h)** $h_c = 88{,}2$ mm, $b = 99{,}13$ mm

AB **7.98** Von einem Rechteck kennt man die Länge der Seite a und die Größe des Winkels $\varphi$, den eine Diagonale mit der Seite a einschließt. Berechne die Länge der Diagonale und die Länge der Seite b des Rechtecks.
**a)** $a = 45$ cm, $\varphi = 33°$ **b)** $a = 422$ mm, $\varphi = 8°$ **c)** $a = 8$ m, $\varphi = 45°$

AB **7.99** Berechne den Umkreisradius eines regelmäßigen Zehnecks, wenn der Inkreisradius $r = 66$ mm ist.

AB **7.100** Berechne die Längen der Diagonalen sowie den Flächeninhalt der angegebenen Vierecke, wenn $a = 5{,}2$ cm, $b = 2{,}8$ cm und $\alpha = 64°$ gilt.
**a)** Parallelogramm **b)** gleichschenkliges Trapez **c)** Deltoid

## Textaufgaben

**7.101** Eine geradlinige Materialrutsche hat die Höhe h und den Steigungswinkel $\alpha$. AC

***1)*** Fertige eine beschriftete Skizze an.

***2)*** Dokumentiere, wie man die Steigung in Prozent bestimmen kann.

***3)*** Stelle eine Formel auf, mit der die horizontale Entfernung zwischen dem Anfang und dem Ende der Rutsche ermittelt werden kann.

**7.102** Eine 5 m lange Leiter soll gegen eine senkrechte Wand gelehnt werden. Die Größe des Winkels zwischen Leiter und horizontalem Boden muss aus Sicherheitsgründen mindestens 75° betragen. Berechne, wie weit das untere Ende der Leiter maximal von der Wand entfernt sein darf. AB

**7.103** Eine Radfahrerin fährt die gegebene Strecke auf einer 5° ansteigenden Straße hinauf. Welche horizontale Entfernung und welchen Höhenunterschied legt sie dabei zurück? AB

***a)*** 170 m ***b)*** 320 m ***c)*** 1,8 km

**7.104** Ein Radfahrer fährt mit durchschnittlich 42 $\frac{km}{h}$ eine Bergstraße mit 12 % Gefälle hinunter. Sein Höhenmesser zeigt einen Höhenunterschied von 400 m an. AB

***1)*** Berechne, welche Strecke er zurückgelegt hat.

***2)*** Ermittle, wie lang die Fahrt gedauert hat.

**7.105** Ein Flugzeug fliegt nach dem Start mit einem Steigwinkel von 6°. In welcher Entfernung vom Startort, der auf 600 m Seehöhe liegt, erreicht es eine Reiseflughöhe von 10 500 m? AB

**7.106** Ein in 2 000 m Höhe fliegendes Segelflugzeug soll auf einem in horizontaler Richtung 38 km entfernten Flugplatz, der auf Meeresniveau liegt, landen. Es soll sofort mit dem Sinkflug begonnen werden. Berechne, welcher Sinkwinkel zur Landung notwendig ist. AB

**7.107** Von der Dachterrasse eines 27 m hohen Gebäudes sieht man das untere Ende einer Straßenlaterne unter einem Tiefenwinkel $\alpha$ = 17,9° und das obere Ende der Laterne unter einem Tiefenwinkel $\beta$ = 16,6° (Aughöhe 1,75 m). Berechne die Höhe der Straßenlaterne, wenn sich Gebäude und Laterne in horizontalem Gelände befinden. AB

**7.108** Ein Radfahrer (Aughöhe: 1,5 m) fährt mit einer konstanten Geschwindigkeit von 7 $\frac{m}{s}$ auf einer geradlinigen Landstraße, die durch einen Windpark führt. AB

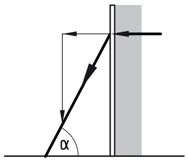
***a)*** Am Ende der Straße steht eine Windkraftanlage. Er sieht die Nabe des Windrads unter einem Höhenwinkel $\alpha$ = 5,35°. Fährt er auf das Windrad zu, so sieht er die Nabe nach zwei Minuten Fahrt unter einem Höhenwinkel $\beta$ = 15,21°. Berechne, in welcher Höhe sich die Nabe des Windrads befindet.

***b)*** Eine weitere Windkraftanlage steht neben der Straße in einem Normalabstand von 1 km zur Fahrbahn. Der Radfahrer sieht die Nabe des Windrads unter dem Höhenwinkel $\alpha$ = 4,27°. Nach drei Minuten Fahrt hat er den Fußpunkt des Normalabstands auf der Straße erreicht. Fertige eine Skizze dieser Situation an und berechne, in welcher Höhe sich die Nabe des Windrads befindet.

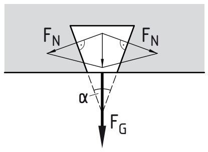
## Aufgaben aus Naturwissenschaft und Technik

ABCD **7.109** Ein Auto mit einer Masse m = 750 kg parkt auf einem Straßenstück mit einem Gefälle von 10 %. Recherchiere die Haftreibungskoeffizienten $\mu$ für Autoreifen auf
***1)*** trockener Fahrbahn (Asphalt), ***2)*** nasser Fahrbahn, ***3)*** eisiger Fahrbahn.
Rutscht das Auto die Straße hinunter?
Hinweis: Überprüfe $F_R \leqslant F_H$
$F_R = \mu \cdot F_N$ ... Reibungskraft, $F_N$ ... Normalkraft, $F_H$ ... Hangabtriebskraft

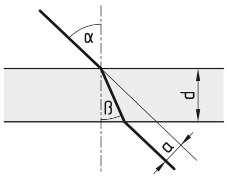
AB **7.110** Eine Schalung für eine Betonmauer wird mit einer schrägen Stütze abgestützt. Berechne die in der Stütze auftretende Kraft, wenn die an der Schalung auftretende horizontale Kraft 0,5 kN beträgt und die Stütze unter dem Winkel $\alpha$ zum waagrechten Boden geneigt ist.
***a)*** $\alpha = 30°$ ***b)*** $\alpha = 55°$ ***c)*** $\alpha = 75°$




ABD **7.111** Eine keilförmige Verankerung in einer Mauer hält ein Gewicht von 135 N.
***1)*** Berechne die an die Mauer übertragenen Normalkräfte, wenn der Winkel $\alpha = 40°$ beträgt.
***2)*** Überprüfe, ob eine Erhöhung des Gewichts um 10 N auch zu einer Erhöhung der Normalkräfte um 10 N führt.

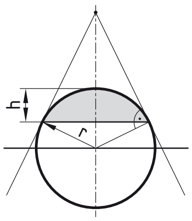



AB **7.112** Ein Lichtstrahl wird beim Durchgang durch eine Glasplatte zweimal gebrochen. Der austretende Lichtstrahl ist dadurch parallel zum eintretenden Lichtstrahl, aber seitlich versetzt. Berechne die seitliche Versetzung a durch eine d = 4 mm dicke Glasplatte, wenn bei einem Einfallswinkel $\alpha = 48°$ der Brechungswinkel $\beta = 36°$ ist.

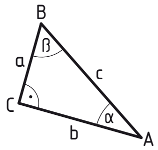
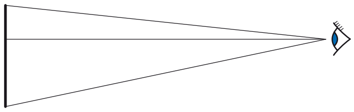
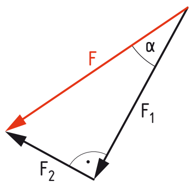



ABD **7.113** Die Abbildung zeigt eine Hebebühne, bei der die Größe des Winkels zwischen den Verstrebungen von der eingestellten Höhe abhängt. Die Hebebühne besteht aus fünf Mittelgelenken und die Länge der verschiebbaren Streben beträgt jeweils 4,5 m.
Unausgefahren beträgt die Höhe bis zum ersten Mittelgelenk 1,5 m.
***1)*** Berechne, bei welcher Höhe der Winkel zwischen den Streben
  ***a)*** an den Seiten $\alpha = 40°$,
  ***b)*** am Mittelgelenk $\beta = 120°$ beträgt.
***2)*** Welchen Winkel $\alpha$ schließen die Streben miteinander ein, wenn die Bühne 10 m hoch sein soll? Welchen Winkel $\beta$ schließen die Streben dann am Mittelgelenk ein?
***3)*** Überlege und erkläre, ob es sinnvoll ist, den Winkel zwischen den Streben an den Seiten auf bis zu 180° einzustellen.

AB **7.114** Berechne die Größe jener Fläche der Erde, die vom gegebenen Objekt aus sichtbar ist (Radius r = 6 371 km).
Wie viel Prozent der gesamten Erdoberfläche sind das?
Für den Flächeninhalt der Kugelkappe gilt $A = 2r\pi h$, für den der Kugel gilt $O = 4r^2\pi$.
***a)*** Raumfähre 400 km über der Erdoberfläche
***b)*** Verkehrsflugzeug 10 km über der Erdoberfläche
***c)*** Heißluftballon 2 km über der Erdoberfläche



## Wissens-Check

| | | gelöst |
|---|---|---|
| **1** | Ich kenne die Begriffe „Ankathete“ und „Gegenkathete“ und kann sie in einem rechtwinkligen Dreieck richtig zuordnen.<br>A) Ankathete von $\alpha$: ...<br>B) Gegenkathete von $\beta$: ...<br>C) Ankathete von $\beta$: ...<br>D) Gegenkathete von $\alpha$: ...<br> | |
| **2** | Ich kann die Winkelfunktionen Sinus, Cosinus und Tangens als Verhältnisse der Seiten in einem rechtwinkligen Dreieck angeben. | |
| **3** | Ich kann den Flächeninhalt der Projektion einer unter dem Winkel $\varphi$ geneigten Fläche auf eine waagrechte Ebene berechnen. | |
| **4** | Ich kann aus angegebenen Werten für Sinus, Cosinus und Tangens die zugehörigen Winkel ermitteln:<br>A) $\sin(\alpha) = 0{,}345$ B) $\cos(\beta) = 0{,}345$ C) $\tan(\gamma) = 0{,}345$ | |
| **5** | Kennzeichne<br>den Tiefenwinkel $\alpha$,<br>den Höhenwinkel $\beta$<br>sowie den Sehwinkel $\varphi$ in der Skizze.<br> | |
| **6** | Gib an, welche der folgenden Aussagen wahr sind. Begründe, warum die anderen Aussagen falsch sind.<br>A) Die Regeln zur Bestimmung von Sinus-, Cosinus- und Tangenswerten gelten in jedem beliebigen Dreieck.<br>B) Einem Anstieg von 100 % entspricht ein Steigungswinkel von 100°.<br>C) Die Arcusfunktionen ordnen Sinus-, Cosinus- und Tangenswerten jeweils Winkel zu. | |
| **7** | Die Kraft F wird in zwei aufeinander normal stehende Kräfte $F_1$ und $F_2$ zerlegt. Ordne diesen Kräften jeweils den richtigen Term zu.<br>$F_1$: ☐<br>$F_2$: ☐<br>A: $\frac{F}{\sin(\alpha)}$<br>B: $F \cdot \sin(\alpha)$<br>C: $F \cdot \cos(\alpha)$<br>D: $\frac{F}{\cos(\alpha)}$<br> | |

Lösung:
1) A) b; B) b; C) a; D) a 2) $\sin(\varphi) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$; $\cos(\varphi) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$; $\tan(\varphi) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$
3) siehe Seite 259 4) A) $\alpha \approx 20{,}18°$; B) $\beta \approx 69{,}82°$; C) $\gamma \approx 19{,}03°$ 5) siehe Seite 260
6) A) Falsch, weil die Regeln nur in rechtwinkligen Dreiecken gelten. B) Falsch, weil 100 % einem Steigungswinkel von 45° entspricht. C) wahr 7) $F_1 \rightarrow C$; $F_2 \rightarrow B$