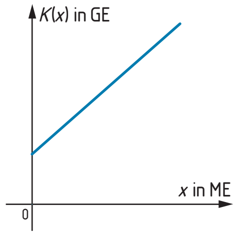
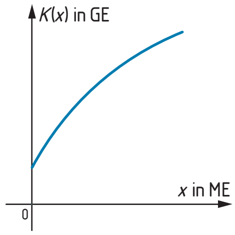
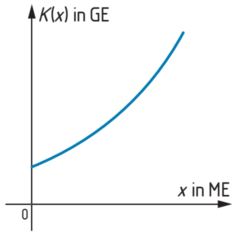
Gesamtkostenfunktion $K(x)$

Die **Gesamtkosten** (häufig nur mit „Kosten“ bezeichnet) setzen sich aus **fixen Kosten** K_f und **variablen Kosten** K_v zusammen. Kosten werden in Geldeinheiten (GE) angegeben.
Die Produktiosmenge x wird in Mengeneinheiten (ME) angegeben.

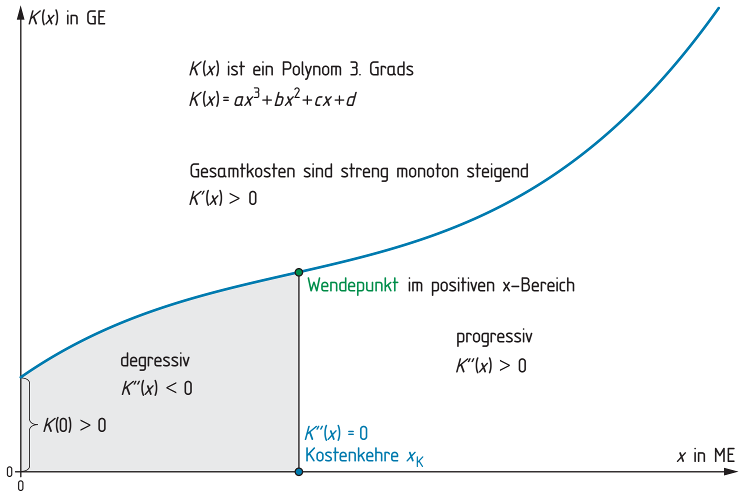
Typische Verläufe der Gesamtkostenfunktion $K(x)$

Linearer Kostenverlauf	Degressiver Kostenverlauf	Progressiver Kostenverlauf
Die Kosten wachsen proportional zur Stückzahl. Es gilt: $K'(x) > 0$ (konstant) und $K''(x) = 0$.	Die Kosten wachsen verhältnismäßig langsamer als die Stückzahl. Es gilt $K'(x) > 0$ und $K''(x) < 0$.	Die Kosten wachsen verhältnismäßig schneller als die Stückzahl. Es gilt $K'(x) > 0$ und $K''(x) > 0$.
		

Ertragsgesetzlicher Kostenverlauf

Die Gesamtkostenfunktion ist eine Polynomfunktion 3. Grads $K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $K(x)$ ist streng monoton steigend. Es gilt: $K'(x) > 0$, wobei $K(0) > 0$.
2. $K(x)$ hat keine lokalen Extremstellen. Es gilt: $K'(x) \neq 0$.
3. $K(x)$ hat einen Wendepunkt an der Kostenkehre. An dieser Stelle gilt: $K''(x) = 0 \Rightarrow x_K$, wobei $x_K > 0$.
4. $K(x)$ steigt bis zur Kostenkehre degressiv ($K''(x) < 0$) und danach progressiv ($K''(x) > 0$).
5. Die Grenzkosten (= Ableitung der Kostenfunktion) beschreiben die Zunahme der Kosten bei Ausweitung der Produktion um eine unendlich kleine Mengeneinheit (Anstieg der Tangente).
6. Das Minimum der Grenzkostenfunktion $K'(x)$ liegt an der Kostenkehre x_K.



Grenzkosten- und Durchschnittskostenfunktion

Grenzkostenfunktion $K'(x)$

Die Ableitungsfunktion der Gesamtkostenfunktion heißt **Grenzkostenfunktion** $K'(x)$ und beschreibt die Zunahme der Kosten bei Ausweitung der Produktion um eine unendlich kleine Mengeneinheit (Anstieg der Tangente). Das Minimum der Grenzkostenfunktion $K'(x)$ liegt an der Kostenkehre x_K. Die Grenzkosten werden in Geldeinheit pro Mengeneinheit (GE/ME) angegeben.

Durchschnittskosten $\overline{K}(x) = \frac{K(x)}{x}$

Minimum der Durchschnittskosten: $\overline{K}'(x) = 0 \Rightarrow x_O$ (Produktionsmenge mit den geringsten Durchschnittskosten = **Betriebsoptimum BO**)

Die Durchschnittskosten am BO legen die **langfristige Preisuntergrenze** fest: $\overline{K}(x_O)$

An dieser Stelle gilt: $K'(x_O) = \overline{K}(x_O)$ (Grenzkosten = Durchschnittskosten)

Der Betrieb arbeitet gerade nur kostendeckend („Grenzbetrieb“).

Die Gesamtkostenfunktion $K(x)$ hat an der Stelle x_O eine durch den Koordinatenursprung gehende Tangente.

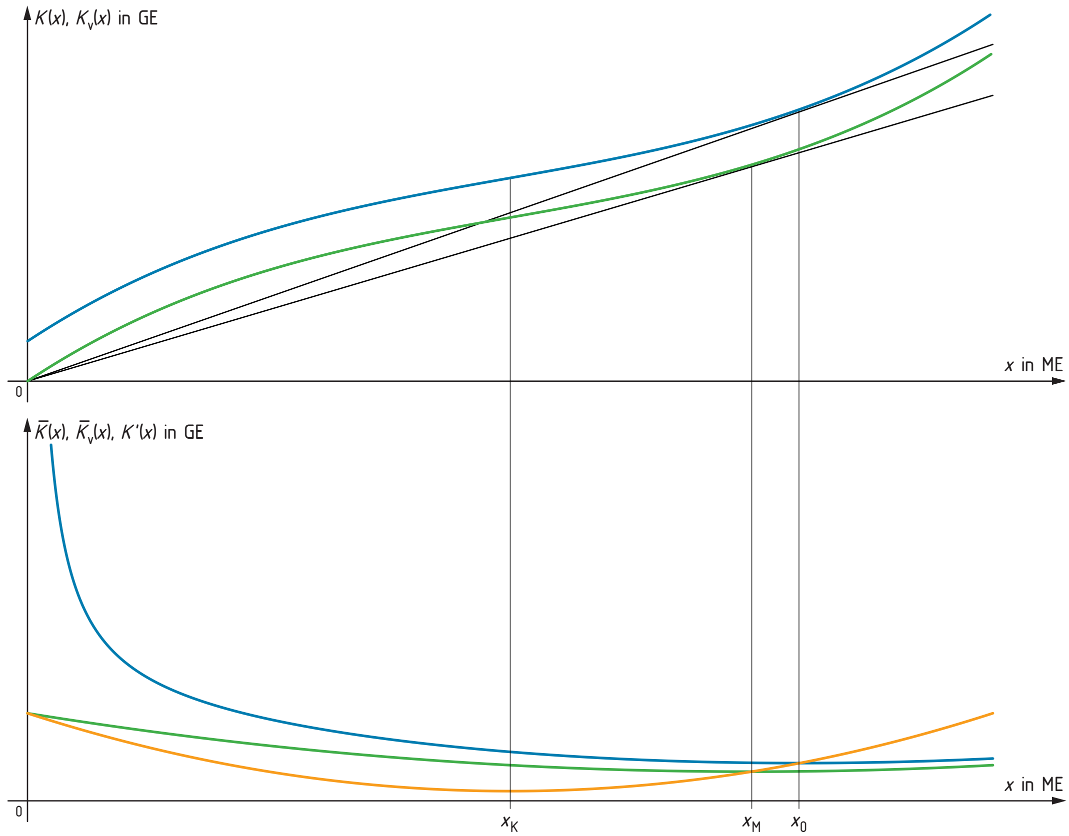
Variable Durchschnittskosten $\overline{K}_v(x) = \frac{K_v(x)}{x}$

Minimum der variablen Durchschnittskosten: $\overline{K}_v'(x) = 0 \Rightarrow x_M$ (Produktionsmenge mit den geringsten variablen Durchschnittskosten = **Betriebsminimum BM**)

Die variablen Durchschnittskosten am BM legen die **kurzfristige Preisuntergrenze** fest: $\overline{K}_v(x_M)$

An dieser Stelle gilt $K'(x_M) = \overline{K}_v(x_M)$ (Grenzkosten = variable Durchschnittskosten)

Die Funktion der variablen Gesamtkosten $K_v(x)$ hat an der Stelle x_M eine durch den Koordinatenursprung gehende Tangente.



Angebotsfunktion und Preisfunktion des Angebots

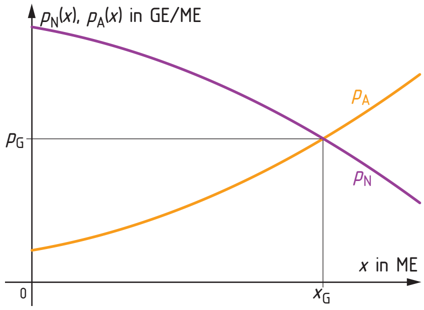
Die **Angebotsfunktion** gibt den Zusammenhang $\boldsymbol{x_A = x_A(p)}$ zwischen dem Preis p eines Produkts (in GE/ME) und der angebotenen Menge x_A des Produkts (in ME) an.
Die Umkehrfunktion der Nachfragefunktion ist die **Preisfunktion des Angebots** $\boldsymbol{p_A = p_A(x)}$.

Nachfragefunktion und Preisfunktion der Nachfrage (Preis-Absatz-Funktion)

Die **Nachfragefunktion** gibt den Zusammenhang $\boldsymbol{x_N = x_N(p)}$ zwischen dem Preis p eines Produkts (in GE/ME) und der nachgefragten (abgesetzten) Menge x_N des Produkts (in ME) an.
Die Umkehrfunktion der Nachfragefunktion ist die **Preisfunktion der Nachfrage** $\boldsymbol{p_N = p_N(x)}$, auch **Preis-Absatz-Funktion** genannt.
Beim **Höchstpreis** $\boldsymbol{p_H}$ ist die nachgefragte Menge (theoretisch) null, beim Preis $p = 0$ ist die **Sättigungsmenge** $\boldsymbol{x_S}$ erreicht.

Marktgleichgewicht

Der **Marktpreis** (= Gleichgewichtspreis) $\boldsymbol{p_G}$ ist jener Preis, bei dem Angebotsmenge und Nachfragemenge gleich groß sind (= Gleichgewichtsmenge x_G).



Bestimmung des Marktgleichgewichts:

$$p_A(x) = p_N(x) \;\Rightarrow\; x = x_G \quad \text{und} \quad p_G = p_A(x_G) = p_N(x_G)$$

Preiselastizität der Nachfrage:

Da der Preis p die unabhängige Variable darstellt, ist für die Berechnung der Preiselastizität der Nachfrage die **Nachfragefunktion** $\boldsymbol{x_N(p)}$ heran zu ziehen. Bei gegebener Preis-Absatz-Funktion $p_N(x)$ ist daher zunächst deren Umkehrfunktion zu bestimmen.

Berechnung der Preiselastizität der Nachfrage:

$$\varepsilon = \frac{\frac{\Delta x_N}{x_N(p_0)}}{\frac{\Delta p}{p_0}} = \frac{\Delta x_N}{\Delta p} \cdot \frac{p_0}{x_N(p_0)} \text{ ... Bogenelastizität;} \quad \varepsilon(p_0) = x_N{}'(p_0) \cdot \frac{p_0}{x_N(p_0)} \text{ ... Punktelastizität}$$

Am Beispiel der **Nachfragefunktion** $\boldsymbol{x_N(p)}$ lässt sich ε folgendermaßen interpretieren:

$|\varepsilon| = 1$: Die Nachfrage ist **fließend** (proportional elastisch, 1-elastisch), da eine 1%ige Preisänderung eine 1%ige Mengenänderung des Absatzes nach sich zieht.

$|\varepsilon| > 1$: Die Nachfrage ist **elastisch**, dh. die prozentuelle Änderung der Nachfrage ist stärker als die des Preises. Eine Preisänderung hat also eine starke Wirkung auf die Nachfrage.

$|\varepsilon| < 1$: Die Nachfrage ist **unelastisch**, dh. die prozentuelle Änderung der Nachfrage ist geringer als die des Preises. Eine Preisänderung hat also eine schwache Wirkung auf die Nachfrage.

$|\varepsilon| = 0$: Die Nachfrage ist **vollkommen unelastisch** (starr), da eine Preisänderung keine Reaktion der Nachfrage mit sich bringt.

$|\varepsilon| = \infty$: Die Nachfrage ist **vollkommen elastisch**. Das bedeutet, dass eine minimale Preisänderung eine unendlich große Änderung der Nachfrage bewirkt.

Erlös und Gewinn

Erlösfunktion

Konkurrenzbetrieb: $\boldsymbol{E(x) = p \cdot x}$ ... Preis konstant $\Rightarrow$ Erlösfunktion linear

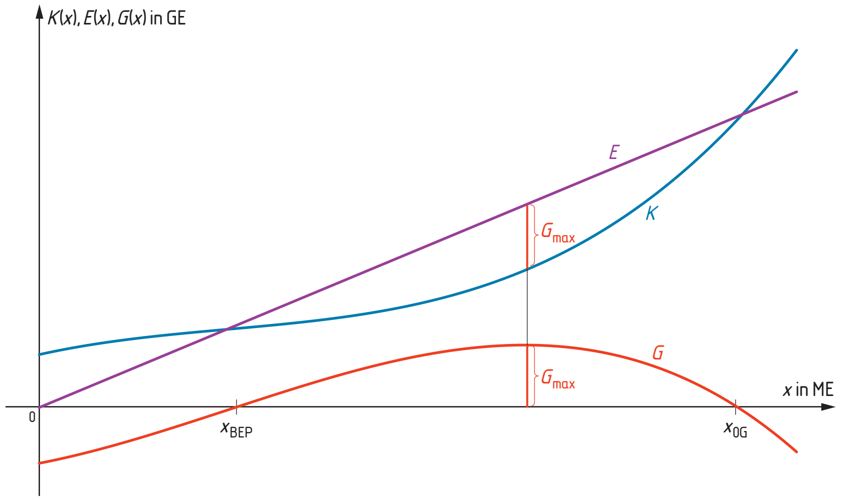
Monopolbetrieb: $\boldsymbol{E(x) = p(x) \cdot x}$ ... $p(x)$ = Preis-Absatz-Funktion

Gewinnfunktion

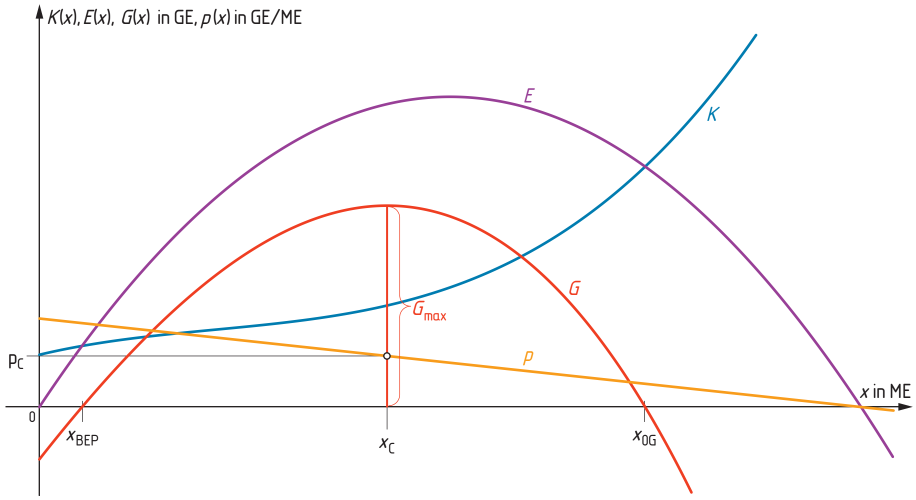
Sowohl bei vollständiger Konkurrenz als auch im Monopolbetrieb gilt $G(x) = E(x) - K(x)$.
Gewinnzone: $G(x) = 0$ bzw. $E(x) = K(x)$ $\Rightarrow$ x_{BEP} (Break-Even-Point) und x_{OG} (obere Gewinngrenze)
gewinnmaximierende Menge: $G'(x) = 0$ $\Rightarrow$ x_C (im Monopolbetrieb Cournot'sche Menge genannt)
gewinnmaximierender Preis im Monopolbetrieb (Cournot'scher Preis): $p_C = p(x_C)$
Der **Cournot'sche Punkt** $(x_C|p(x_C))$ liegt auf dem Graphen der Preis-Absatz-Funktion.

Kriterium für den maximalen Gewinn:
Konkurrenzbetrieb: $K'(x) = p$ ... Grenzkosten = Preis
Monopolbetrieb: $K'(x) = E'(x)$ ... Grenzkosten = Grenzerlös

Grafische Darstellung der Zusammenhänge im Konkurrenzbetrieb:



Grafische Darstellung der Zusammenhänge im Monopolbetrieb:



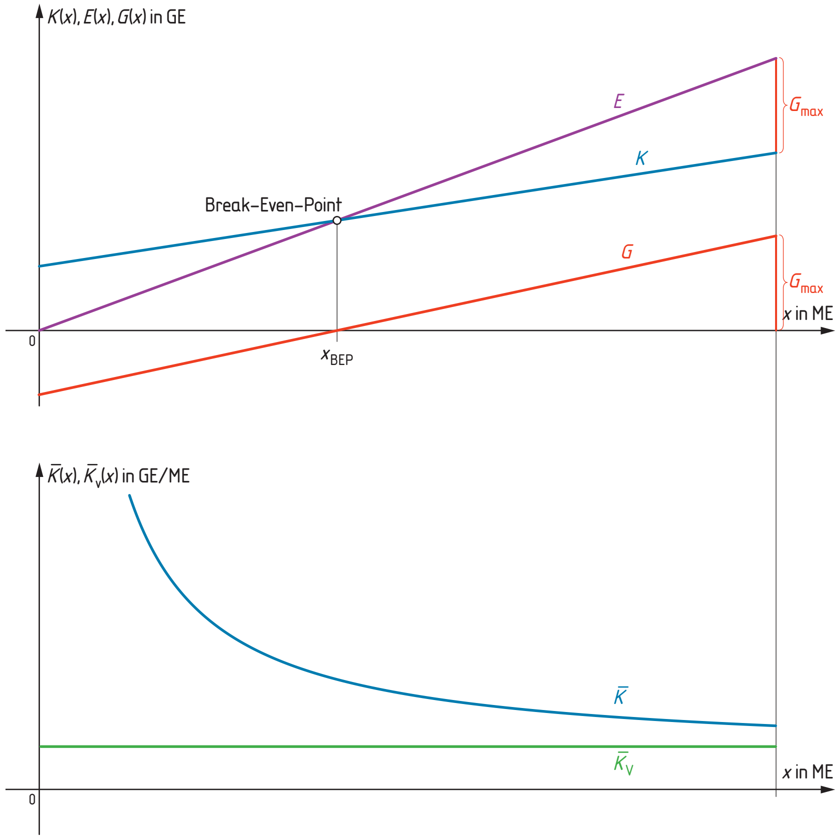
Lineare Gesamtkostenfunktion $K(x) = K_v \cdot x + K_f$ (K_v ... variable Kosten, K_f ... fixe Kosten)

Durchschnittskosten: $\overline{K}(x) = K_v + \frac{K_f}{x}$
Das Betriebsoptimum liegt an der Kapazitätsgrenze (Randminimum).

variable Durchschnittskosten: $\overline{K}_v(x) = K_v$ ... konstant
Es existiert kein Betriebsminimum.

Im Konkurrenzbetrieb (Erlösfunktion linear) ist bei linearer Gesamtkostenfunktion auch die Gewinnfunktion linear: $G(x) = (p - K_v) \cdot x - K_f$
Die Gewinnfunktion hat nur eine Nullstelle (Break-Even-Point).
Die gewinnmaximierende Produktionsmenge liegt an der Kapazitätsgrenze (Randmaximum).

Grafische Darstellung der Zusammenhänge bei linearer Gesamtkosten- und Gewinnfunktion:



Quadratische Gesamtkostenfunktion $K(x) = ax^2 + bx + c$

Für a $<$ 0 (degressiver Kostenverlauf) gilt:
Betriebsoptimum und Betriebsminimum an Kapazitätsgrenze (Randminima)
Im Konkurrenzbetrieb (Erlösfunktion linear):
gewinnmaximierende Produktionsmenge an der Kapazitätsgrenze (Randmaximum)

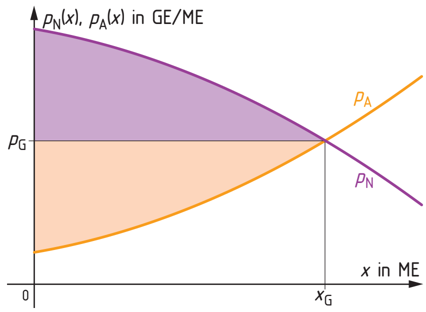
Für a $>$ 0 (progressiver Kostenverlauf) gilt:
Betriebsminimum an Kapazitätsgrenze (Randminimum)

Konsumenten- bzw. Produzentenrente, Wohlfahrt

Konsumentenrente (Customers' Surplus *CS*): Differenz zwischen dem Höchstpreis p_{max}, den ein Konsument gerade noch zu zahlen bereit wäre, und dem Gleichgewichtspreis p_G.

Produzentenrente (Producers' Surplus *PS*): Differenz zwischen dem Gleichgewichtspreis p_G und dem Mindestpreis p_{min}, zu dem ein Produzent gerade noch anzubieten bereit wäre.

Die aggregierte Konsumentenrente in einem Markt entspricht in der Grafik der violetten Fläche, die aggregierte Produzentenrente der orangen Fläche.



$$CS = \int_0^{x_G} p_N(x)\,dx - x_G \cdot p_G \qquad PS = x_G \cdot p_G - \int_0^{x_G} p_A(x)\,dx$$

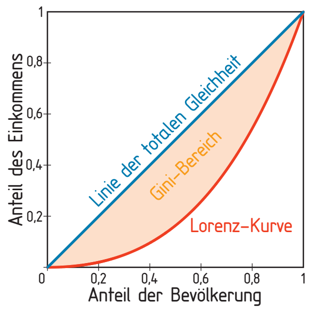
x_G ... Gleichgewichtsmenge, p_G ... Gleichgewichtspreis

Die Summe der beiden Flächeninhalte, also die Summe von Konsumenten- und Produzentenrente (= die Fläche zwischen Preisfunktion des Angebots und Preisfunktion der Nachfrage links vom Gleichgewichtspunkt) ist die **Gesamtrente** oder **Wohlfahrt**.

Lorenz-Kurve und Gini-Koeffizient

Lorenz-Kurve:

Grafische Darstellung der Einkommensverteilung eines Lands.
Waagrechte Achse: prozentueller Anteil der Bevölkerung, beginnend mit jenem mit dem geringeren Einkommen.
Senkrechte Achse: zugehöriger Anteil am Gesamteinkommen.



Gini-Koeffizient:

Maß für die (Ungleich-)Verteilung des Einkommens in einem Land. Der Gini-Koeffizient *GK* entspricht der doppelten Fläche zwischen der „Gleichverteilungskurve" $y = x$ und der Lorenz-Kurve.

$GK = 2 \cdot$ Flächeninhalt zwischen $y = x$ und Lorenz-Kurve

Falls die Lorenz-Kurve stückweise lineare Funktion ist, setzt sich die Fläche unterhalb der Lorenz-Kurve aus Trapezflächen zusammen. Wenn die Abstände auf der x-Achse gleich sind (Δx), gilt folgende Formel:

$$GK = 1 - \Delta x \cdot \left(2 \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i + 1\right) \quad \text{mit } y_i \neq 0 \text{ und } y_i \neq 1$$

Bei einer stetigen Lorenz-Kurve (zB Annäherung durch die Punkte (0|0) und (1|1) gehende und im Intervall [0; 1] monoton steigende Kurve „$L(x)$" mittels Regression gilt folgendes Flächenintegral:

$$GK = 2 \cdot \int_0^1 (x - L(x))\,dx$$