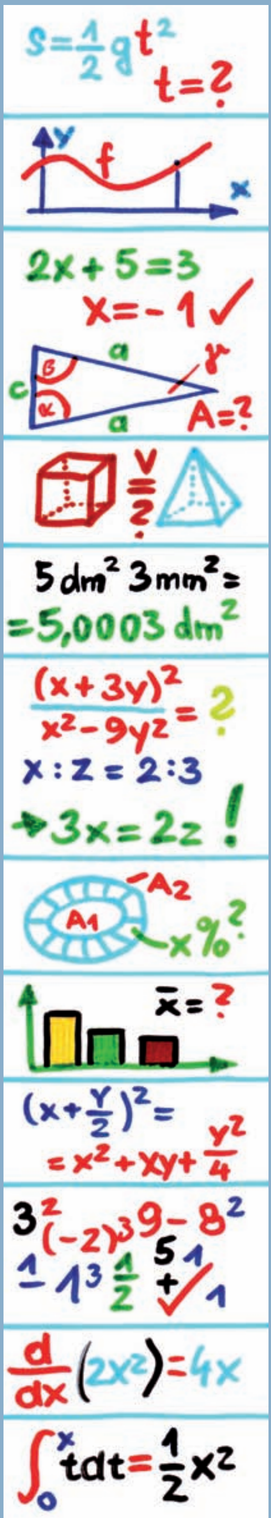
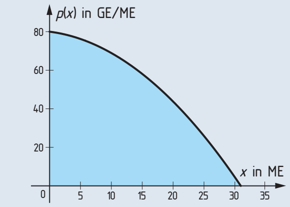
Memo-Liste

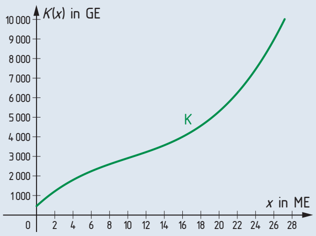


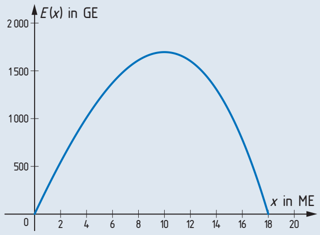
Schreibe zu allen Fragen auf dieser Seite in **Stichworten** auf, was dir dazu einfällt. Besprich das Ergebnis mit einer Kollegin, einem Kollegen, korrigiert es miteinander. Lies anschließend die blau gerahmte Stoffzusammenfassung, die du für die Übungen in diesem Kapitel benötigst.

1. Was ist der Break-Even-Point?
2. Was bedeutet der Cournot'sche Punkt?
3. Was ist eine Kostenkehre?
4. Was ist das Betriebsoptimum?
5. Wie berechnet man die langfristige und die kurzfristige Preisuntergrenze?
6. Was sind Grenzkosten?
7. Was ist eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion?
8. Wie hängen Preis- und Nachfragefunktion zusammen?

9. Welchen Sachzusammenhang kann man aus dem Verlauf der folgenden Funktionsgraphen ablesen?







Wirtschaftsmathematik

In diesem Abschnitt wird das Grundwissen über die **Anwendung der Analysis in der Wirtschaft** wiederholt. Es werden viele Beispiele, ähnlich den Aufgaben für eine Reifeprüfung, Schritt für Schritt vorgerechnet und erklärt. Es sind weitere Aufgaben zum Üben angeboten, die selbstständig gelöst werden sollen. Die Teilaufgaben sind weitgehend unabhängig voneinander. Wenn du eine Teilaufgabe nicht kannst, dann versuche die nächste trotzdem.

Der Technologieeinsatz ist **frei wählbar**.
Aufgaben, bei denen Technologieeinsatz empfohlen wird, sind in der Randspalte mit TE gekennzeichnet.
Auf die Kurzdokumentation der verwendeten Technologien solltest du achten!

6.1 Grundwissen wiederholen

6.1.1 Die Gesamtkostenfunktion

In der Wirtschaftsmathematik werden möglichst einfache mathematische Modellfunktionen für reale Situationen entwickelt, mit deren Hilfe man Kosten, Verkaufspreis, Erlöse und Gewinne, sowie ihre Veränderungen und Auswirkungen interpretieren kann. Um die Aufgaben möglichst allgemein gültig zu halten, werden häufig statt konkreter Geld- und Mengeneinheiten wie zB € oder kg die Begriffe „Geldeinheit“ (GE) und „Mengeneinheit“ (ME) verwendet.

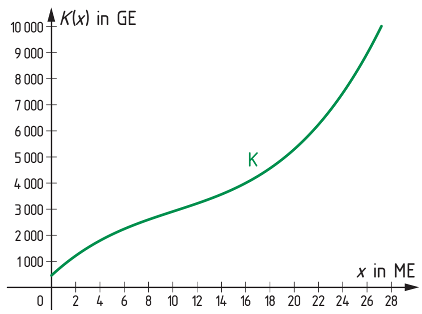
Die Gesamtkostenfunktion *K*

Die Gesamtkosten K einer Produktion hängen von der produzierten Menge ab.
Dabei entspricht x der Menge, Stückzahl oder Masse des hergestellten Produkts.
Die Gesamtkosten setzen sich aus zwei Größen zusammen:

- **Fixkosten:** Diese fallen unabhängig von der Produktionsmenge an, auch dann, wenn nichts produziert wird. Fixkosten sind daher die Kosten bei $x = 0$, also $K(0)$.
- **Variable Kosten K_v:** Diese sind von der Produktionsmenge abhängig.

Der Verlauf einer Kostenfunktion lässt sich durch sehr unterschiedliche Funktionen näherungsweise darstellen. In der Praxis hat sich gezeigt, dass der so genannten **ertragsgesetzlichen Kostenfunktion** eine besondere Bedeutung zukommt. Sie ist durch folgende Eigenschaften gekennzeichnet:

1. Polynomfunktion 3. Grads (kubische Funktion)
2. Der Wendepunkt liegt im 1. Quadranten
3. Streng monoton steigend (keine lokalen Extremstellen)
4. $K(0)$ ist größer als 0.
5. K steigt bei geringeren Produktionsmengen **degressiv** (dh., der Kostenzuwachs pro ME verringert sich mit höher werdenden Produktionsmengen).
   Bei höheren Produktionsmengen verlaufen die Kosten **progressiv** (dh., der Kostenzuwachs pro ME wird bei weiterer Erhöhung der Produktion immer größer).

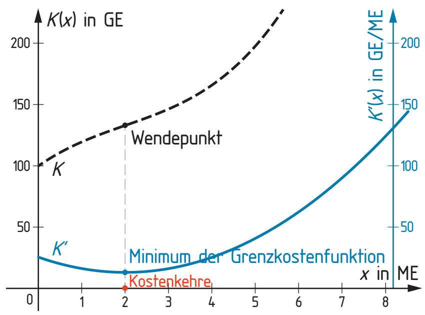


Die **erste Ableitung der Gesamtkostenfunktion $K'(x)$** wird als **Grenzkostenfunktion** bezeichnet und entspricht der **momentanen Änderungsrate der Gesamtkosten** bei einer bestimmten Produktionsmenge.

Die **zweite Ableitung der Gesamtkostenfunktion $K''(x)$** definiert das Krümmungsverhalten. Die Stelle, an der der degressive in den progressiven Kostenverlauf wechselt, wird als **Kostenkehre** bezeichnet und entspricht dem x-Wert des Wendepunkts. Die notwendige Bedingung für die Berechnung der Kostenkehre lautet: $K''(x) = 0$, wobei die 3. Ableitung an dieser Stelle größer null sein muss, weil die Kostenfunktion monoton steigend ist.

Werden die Kosten durch eine Polynomfunktion beschrieben, so muss diese mindestens den Grad 3 haben, damit eine Kostenkehre auftritt.

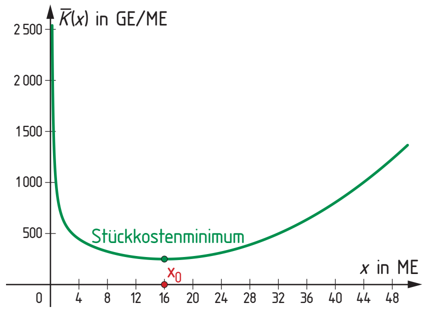
Die Kostenkehre kann auch als **Minimum der Grenzkosten** gedeutet werden, denn für ein lokales Minimum gilt, dass die 3. Ableitung größer null sein muss. *In der Grafik wird dieser Zusammenhang auf einem gemeinsamen Raster mit zwei unterschiedlichen Ordinaten veranschaulicht.*



Durchschnitts- bzw. Stückkostenfunktion

Eine wichtige Kenngröße für ein Unternehmen sind die **Durchschnitts- bzw. Stückkosten** $\overline{K}(x) = \frac{K(x)}{x}$.

Die Menge x_O am Minimum der Durchschnitts- bzw. Stückkostenfunktion $\overline{K}$ wird als **Betriebsoptimum BO** bezeichnet.
Die Bedingungen für das Betriebsoptimum lauten daher:
$\overline{K}'(x_O) = 0$ und $\overline{K}''(x_O) > 0$.



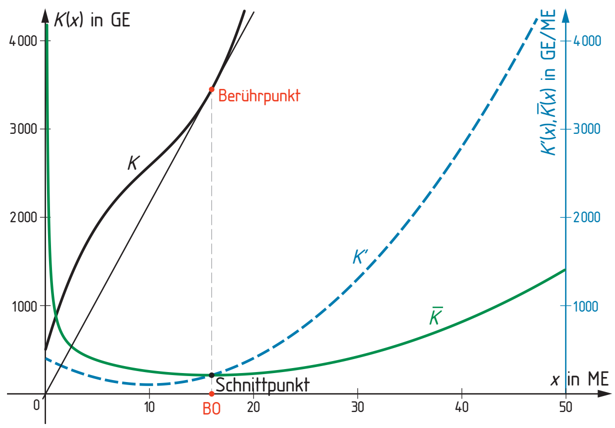
Die zum BO gehörigen Kosten pro Mengeneinheit legen die **langfristige Preisuntergrenze** fest. Die langfristige Preisuntergrenze gibt damit jenen Preis pro ME an, den man im Verkauf mindestens festlegen muss, um gerade noch kostendeckend zu produzieren.
Einen Betrieb, der im BO produzieren muss, um gerade noch kostendeckend zu sein, nennt man den **Grenzbetrieb**.

Die Menge x_M am Minimum der variablen Durchschnitts- oder Stückkostenfunktion $\overline{K}_v$ wird als **Betriebsminimum BM** bezeichnet.
Die Bedingungen für das Betriebsminimum: $\overline{K}_v'(x_M) = 0$ und $\overline{K}_v''(x_M) > 0$.
Die dazugehörigen variablen Stückkosten legen die **kurzfristige Preisuntergrenze** fest.
Die kurzfristige Preisuntergrenze gibt damit jenen Preis pro ME an, der mindestens verlangt werden muss, um gerade noch die variablen Kosten zu decken.

Das Betriebsoptimum kann aus dem Berührpunkt der Tangente an den Graphen der Kostenfunktion, die durch den Ursprung des Koordinatensystems geht, abgelesen werden.
Für das Betriebsoptimum gilt nämlich $\overline{K}'(x) = 0$.
Leitet man allgemein $\overline{K}(x) = K(x) \cdot x^{-1}$ mithilfe der Produktregel ab, so erhält man:
$\overline{K}'(x) = K'(x) \cdot x^{-1} + K(x) \cdot (-1) \cdot x^{-2}$
Setzt man $\overline{K}'(x) = 0$ und multipliziert die Gleichung mit x^2, dann ergibt dies:

$$\overline{K}'(x_O) \cdot x - K(x_O) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \underbrace{K'(x_O)}_{\text{Tangente am BO durch den Ursprung}} \cdot x = \underbrace{K(x_O)}_{\text{Funktionswert am BO}}$$

Oder man liest das BO aus dem **Schnittpunkt der Graphen der Grenzkostenfunktion mit der Stückkostenfunktion** ab:
Dividiert man nämlich die Gleichung $K'(x_O) \cdot x = K(x_O)$ durch x, dann erhält man:
$K'(x_O) = \frac{K(x_O)}{x}$ bzw. $K'(x_O) = \overline{K}(x_O)$



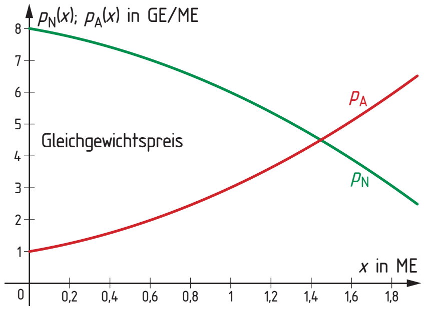
Ganz ähnliche Überlegungen kann man für das BM anstellen.
Der Schnittpunkt der Graphen der Grenzkostenfunktion mit der variablen Stückkostenfunktion liefert das Betriebsminimum BM an der Stelle x_M.

6.1.2 Angebot und Nachfrage

Auf dem **Markt** wird ein Gut angeboten und dabei wird der Preis des Guts festgelegt. Die Konsumenten und die Anbieter oder Produzenten des Guts reagieren auf dem Markt unterschiedlich. Nachgefragt wird ein Gut, das einen möglichst geringen Preis hat, während der Anbieter an einem möglichst hohen Gewinn interessiert ist und deswegen bei höheren Preisen noch mehr anbieten will.
Ideal ist die Marktform der „vollständigen Konkurrenz", bei der sich im Zusammentreffen von Angebot und Nachfrage ein fixer Gleichgewichtspreis bildet.

Der Preis und die Angebotsfunktion

Die Angebotsfunktion stellt den Zusammenhang zwischen der angebotenen Menge x_A einer Ware und dem Preis p pro Mengeneinheit her. In der Regel steigt der Preis mit der Menge monoton. Die Umkehrfunktion ist die **Preisfunktion des Angebots p_A**, die die Abhängigkeit des Preises von der angebotenen Menge x angibt.



Der Preis und die Nachfragefunktion

Die **Preisfunktion der Nachfrage p_N** gibt den Preis pro ME in Abhängigkeit von der nachgefragten Menge x an. Man verwendet diese Funktion häufig anstelle der eigentlichen **Nachfragefunktion x_N**, die angibt, wie sich die nachgefragte Menge nach dem Preis pro ME richtet. Der Preis sollte eigentlich die unabhängige Variable darstellen!
Damit aber vor allem auch die Vereinbarkeit mit der Erlösfunktion gewährleistet ist, die als Produkt des Nachfragepreises und der Nachfragemenge definiert ist, wird im Allgemeinen viel häufiger die Preisfunktion der Nachfrage benützt.
Bei einem **Monopolbetrieb** wird der Preis für die Ware vom Hersteller allein aufgrund der Marktnachfrage bestimmt. Da im Normalfall eine Preiserhöhung eine sinkende Nachfrage nach sich zieht, ist der charakteristische Verlauf von Preisfunktionen der Nachfrage meist streng monoton fallend.
Unter dem **Höchstpreis $p_N(0)$** ist der Preis bei $x = 0$ zu verstehen, dh. jener Preis, ab dem niemand mehr die Ware kaufen würde.
Die Menge x, bei der der Nachfragepreis null wird, weil der Markt gesättigt ist, heißt **Sättigungsmenge x_S** mit der Bedingung $p_N(x_S) = 0$.
Ein in der Kosten- und Preistheorie charakteristischer Punkt der Preisfunktion p_N ist der **Cournot'sche Punkt $(x_C|p_N(x_C))$**, wobei x_C jene Stelle bezeichnet, an der der größte Gewinn erzielt wird – die gewinnmaximierende Menge.

Elastizität der Nachfrage

Die Elastizität ε ist ein Maß für das Änderungsverhalten (ökonomischer) Größen, die durch einen funktionalen Zusammenhang miteinander verbunden sind. Man spricht dann zB von Preiselastizität (der Nachfrage), Erlöselastizität, Gewinnelastizität etc.
Die Elastizität ε gibt an, wie sich eine **relative Änderung** der unabhängigen Variable x einer Funktion f auf die **relative Änderung** des Funktionswerts $f(x)$ auswirkt.
Am Beispiel der Preiselastizität der Nachfrage bedeutet das: Um wieviel Prozent ändert sich die Nachfrage(funktion), also die nachgefragte Menge, wenn der Preis um 1 % verändert wird?

Mathematisch lässt sich dieser Sachverhalt für die Funktion f folgendermaßen darstellen: $\varepsilon = \frac{\text{relative Funktionsänderung}}{\text{relative Variablenänderung}}$

$$\varepsilon = \frac{\frac{\Delta f}{f(x_0)}}{\frac{\Delta x}{x_0}} = \frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot \frac{x_0}{f(x_0)}$$ ... **Bogenelastizität von *f*** im Intervall $[x_0; x_0 + \Delta x]$

Ist f eine differenzierbare Funktion, so lässt sich der Grenzübergang $\Delta x \to 0$ durchführen und man erhält:

$$\varepsilon(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot \frac{x_0}{f(x_0)} \right) = f'(x_0) \cdot \frac{x_0}{f(x_0)}$$ ... **(Punkt-)Elastizität** von f an der Stelle x_0.

Für lineare Funktionen liefert die (Punkt-)Elastizität exakte Aussagen, für alle anderen Funktionen stellt die Elastizität eine Näherung dafür dar, wie sehr sich f prozentuell ändert, wenn sich x um 1 % ändert.

Am Beispiel der **Nachfragefunktion $x_N(p)$** lässt sich ε folgendermaßen interpretieren:

$|\varepsilon| = 1$: Die Nachfrage ist **fließend** (proportional elastisch, 1-elastisch), da eine 1%ige Preisänderung eine 1%ige Mengenänderung des Absatzes nach sich zieht.

$|\varepsilon| > 1$: Die Nachfrage ist **elastisch**, dh. die prozentuelle Änderung der Nachfrage ist stärker als die des Preises. Eine Preisänderung hat also eine starke Wirkung auf die Nachfrage.

$|\varepsilon| < 1$: Die Nachfrage ist **unelastisch**, dh. die prozentuelle Änderung der Nachfrage ist geringer als die des Preises. Eine Preisänderung hat also eine schwache Wirkung auf die Nachfrage.

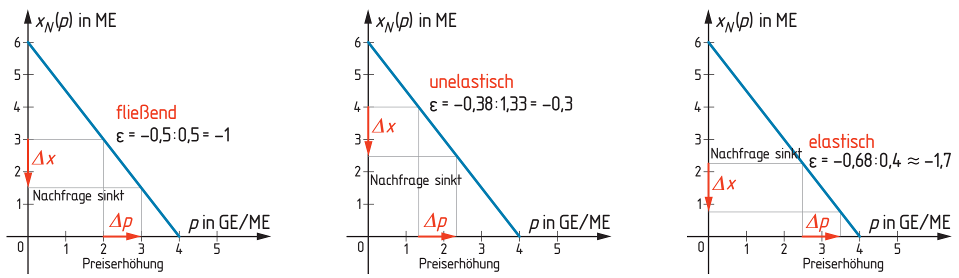
$|\varepsilon| = 0$: Die Nachfrage ist **vollkommen unelastisch** (starr), da eine Preisänderung keine Reaktion der Nachfrage mit sich bringt.

$|\varepsilon| = \infty$: Die Nachfrage ist **vollkommen elastisch**. Das bedeutet, dass eine minimale Preisänderung eine unendlich große Änderung der Nachfrage bewirkt.

! Wichtiger Hinweis: Beachte bei der Berechnung der Elastizität immer, welche Größe die **abhängige Variable** darstellt. Es ist zB häufig die Preisfunktion der Nachfrage p_N gegeben. In diesem Fall ist $\boldsymbol{p}$ die abhängige Variable, die sich ändert, wenn sich die Nachfrage ändert. Ist aber die **Preiselastizität der Nachfrage** gesucht, dann muss zuerst die Nachfragefunktion x_N berechnet werden, da diese Funktion die nachgefragte Menge **in Abhängigkeit vom Preis** angibt!

Die Preiselastizität der Nachfrage berechnen wir daher mit:

$$\varepsilon = \frac{\frac{\Delta x_N}{x_N(p_0)}}{\frac{\Delta p}{p_0}} = \frac{\Delta x_N}{\Delta p} \cdot \frac{p_0}{x_N(p_0)}$$ ... Bogenelastizität; $\varepsilon(p_0) = x_N'(p_0) \cdot \frac{p_0}{x_N(p_0)}$ ... Punktelastizität



Grafik mit: $|\Delta p| = 1$, Nachfragefunktion $x_N(p) = -1{,}5p + 6$

6.1.3 Erlös, Gewinn und Deckungsbeitrag

Die Erlösfunktion *E*

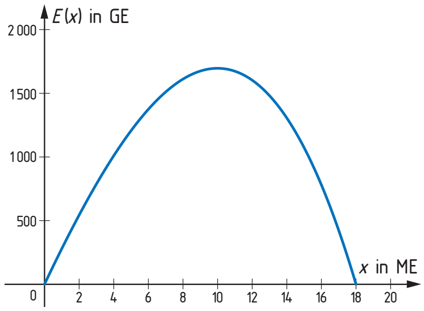
Die Erlösfunktion beschreibt den Erlös, der beim Verkauf von x produzierten ME erzielt wird. Bei vollständiger Konkurrenz ist der Graph der Erlösfunktion eine Gerade durch den Ursprung des Koordinatensystems:

$\boldsymbol{E(x) = p \cdot x}$

Da der Erlös stets die Preisfunktion der Nachfrage enthält, verzichtet man üblicherweise auf den Index N.

Bei Monopolbetrieben gilt:

$\boldsymbol{E(x) = p(x) \cdot x}$

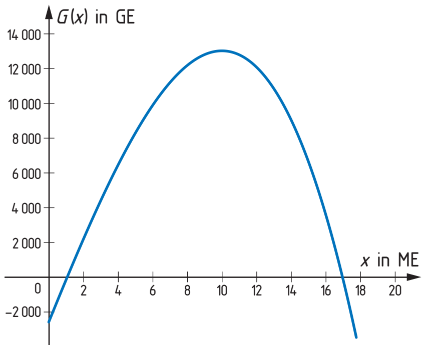


Die Erlösfunktion hat eine Nullstelle stets im Ursprung. Im Allgemeinen hat die Erlösfunktion eine weitere Nullstelle und ein Maximum bei $x > 0$ (siehe Abbildung). Die obere Erlösgrenze fällt mit der Sättigungsmenge zusammen. Der Erlös ist nie negativ.

Die Gewinnfunktion *G*

Der Gewinn eines Unternehmens ergibt sich aus der Differenz zwischen dem Erlös und den Gesamtkosten.

$\boldsymbol{G(x) = E(x) - K(x) = p(x) \cdot x - K(x)}$



Jene Produktionsmenge, bei der der Erlös gerade die Gesamtkosten deckt, wird als **Gewinnschwelle (Break-Even-Point = BEP)** bezeichnet. Es ist dies mathematisch gesehen die untere Nullstelle des Graphen der Gewinnfunktion mit der Bedingung $\boldsymbol{G(x) = 0}$.
Bei progressiv verlaufenden Gesamtkosten können bei höheren Produktionsmengen die Kosten den Erlös übertreffen. Es ergibt sich eine obere Grenze des Gewinnbereichs, die **Gewinngrenze**.
Ehe man das erste Mal Gewinn macht sowie anschließend an die obere Gewinngrenze sind die Gewinn-Funktionswerte negativ. In diesem Fall macht der Betrieb Verluste, die Kosten sind nicht gedeckt.
Das **Maximum der Gewinnfunktion** kann mit
$\boldsymbol{G'(x) = 0}$ bzw. $\boldsymbol{E'(x) = K'(x)}$ berechnet werden.
$\boldsymbol{G(0)}$ entspricht den negativen Fixkosten.

Die Deckungsbeitragsfunktion *D*

Der Deckungsbeitrag gibt an, welchen Beitrag der Erlös zur Deckung der fixen Kosten leistet, der Deckungsbeitrag übersteigt den Gewinn um die Fixkosten:

$$\boldsymbol{D(x) = E(x) - K_v(x) = G(x) + K_f}$$

Die Berechnung des maximalen Deckungsbeitrags mit $D'(x) = 0$ führt auf die gleiche Menge, wie jene bei maximalem Gewinn.

6.1.4 Die wirtschaftlichen Grenzfunktionen

Die Grenzfunktion (Marginalfunktion) beschreibt näherungsweise die Änderung einer Wirtschaftsfunktion f, wenn die unabhängige Variable x um eine Einheit variiert. Sie kann durch die 1. Ableitung f' beschrieben werden.

Der Wert der Grenzfunktion f' für eine bestimmte Menge x_0 gibt näherungsweise den Funktionszuwachs (die Funktionsabnahme) an, der (die) durch die Veränderung von x_0 um eine Einheit der unabhängigen Variablen x hervorgerufen wird.

Man bezeichnet die Behandlung ökonomischer Fragestellungen mithilfe von Grenzfunktionen auch als **Marginalanalyse**.

Grenzkosten

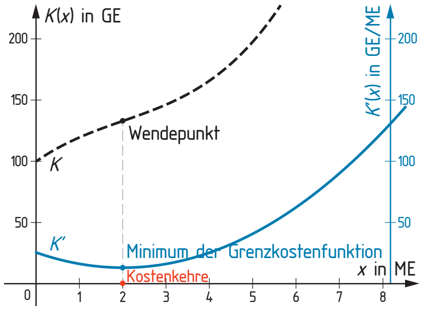
Die 1. Ableitung K' einer Kostenfunktion K heißt Grenzkostenfunktion. Die Grenzkosten $K'(x)$ geben für jede Menge x näherungsweise die Kostenänderung für die vorangegangene bzw. folgende produzierte Einheit an.

Werden die Gesamtkosten in variable und fixe Kosten getrennt, $K(x) = K_v(x) + K(0)$, dann gilt $K'(x) = K'_v(x)$.

Das bedeutet, dass die Änderung der Gesamtkosten für eine Produktionseinheit gleich der entsprechenden Änderung der variablen Kosten ist.

Analog berechnet man die Grenzstückkostenfunktion $\overline{K}'(x)$. Sie gibt näherungsweise die Änderung der gesamten Durchschnitts- bzw. Stückkosten pro zusätzliche Produktionseinheit an.

Die Stelle, wo die Grenzkosten minimal werden, ist die Kostenkehre. Die Aussagen $K''(x) = 0$ und $(K')'(x) = 0$ sind identisch.



Grenzerlös

Die 1. Ableitung $E'(x)$ der Erlösfunktion mit $E(x) = p(x) \cdot x$, wobei die unabhängige Variable die Menge x ist, heißt **Grenzerlösfunktion bezüglich der Menge *x***.

$E'(x)$ liefert näherungsweise die Erlösänderung, wenn sich die nachgefragte Menge um eine Einheit ändert.

Die 1. Ableitung $E'(p)$ der Erlösfunktion mit $E(p) = x_N(p) \cdot p$ (Die unabhängige Variable ist der Preis p.) heißt **Grenzerlösfunktion bezüglich des Preises *p***.

$E'(p)$ liefert näherungsweise die Erlösänderung, wenn sich der Preis um eine Einheit ändert.

Grenzgewinn

Die 1. Ableitung $G'(x)$ einer Gewinnfunktion G heißt **Grenzgewinnfunktion**. Der Grenzgewinn $G'(x)$ gibt näherungsweise die Gewinnänderung an, wenn die produzierte und abgesetzte Menge um eine Einheit zu- oder abnimmt.

Da der Gewinn als Differenz zwischen Erlös und Kosten $G(x) = E(x) - K(x)$ definiert ist, ergibt sich für den Grenzgewinn: $G'(x) = E'(x) - K'(x)$.

Der Grenzgewinn $G'(x)$ ist die Differenz aus Grenzerlös $E'(x)$ und Grenzkosten $K'(x)$.