5 Logarithmen

Henry Briggs

Das Auffinden des unbekannten Exponenten einer Potenz nennt man **Logarithmieren**. Der Erfinder und Namensgeber der Logarithmen ist der im Kapitel „2 Potenzen mit rationalen Exponenten" erwähnte John Napier.
Der englische Mathematiker **Henry Briggs** (1561 – 1630) entwickelte das System der Logarithmen zur Basis 10 (Briggs'scher oder **dekadischer Logarithmus**), das sich sehr schnell durchsetzte und für die damalige Zeit und bis weit ins 20. Jahrhundert hinein eine große Rechenhilfe darstellte.
Wird die Euler'sche Zahl e als Basis des Logarithmus verwendet, so nennt man ihn den **natürlichen Logarithmus**.

5.1 Exponentialgleichung und Logarithmus

AB **5.1** Ein Blatt Zeitungspapier wird durch die Klasse gereicht und dabei von jeder Schülerin bzw. jedem Schüler einmal in der Mitte gefaltet. Nach dem ersten Falten liegen also 2 Lagen Papier aufeinander, nach dem zweiten Mal 4 Lagen, nach dem dritten Falten bereits 8 usw.

a) Stelle eine Gleichung auf, die den Zusammenhang zwischen der Anzahl x der Schülerinnen und Schüler, die gefaltet haben, und der Anzahl y der Papierlagen beschreibt. Berechne, wie viele Lagen nach dem 5. Falten aufeinander liegen.
b) Ermittle, nach dem wie vielten Mal Falten 128 Schichten Papier aufeinanderliegen. Argumentiere, für welche Variable in der Funktionsgleichung nun ein Wert gegeben ist und welche Variable berechnet werden soll.

a) Die Papierlagen verdoppeln sich bei jedem Falten, du hast es mit Potenzen der Zahl 2 zu tun. Die gesuchte Gleichung lautet daher $y = 2^x$.
Nach dem 5. Falten sind es daher bereits 32 Lagen Papier.
b) Diese Aufgabe ist schwieriger. Die Gleichung heißt nun $2^x = 128$.
Die Variable *x* ist im Exponenten. Die Basis ist eine positive reelle Zahl. Eine solche Gleichung nennt man eine **Exponentialgleichung**.
Damit man die Variable bestimmen kann, wird eine neue Rechenart definiert:

x heißt **Logarithmus von *b* zur Basis *a***, wenn die x-te Potenz von a gleich b ist.
a und ***b*** sind reelle positive Zahlen und ***a*** ist ungleich 1

$$x = \log_a(b) \iff a^x = b \text{ mit } a, b \in \mathbb{R}^+ \text{ und } a \neq 1$$

$2^x = 128 \Rightarrow x = \log_2(128)$
Sprich: „**Logarithmus von 128 zur Basis 2**", die Zahl 128 heißt **Numerus**.

Die Zahl $\log_2(128)$ fand man früher in Tabellen, heute ist sie elektronisch abrufbar.

TI-Nspire:
Die Eingabe berücksichtigt die Zahl 128 und die Basis 2: **log(128,2)**

Technologieeinsatz zu diesem Thema für TI 82-84, EXCEL und Geogebra siehe www.hpt.at (Schulbuch Plus für Schüler/innen)

Anmerkung: Bei dieser Gleichung hättest du auch mit Probieren zum Ziel gelangen können: $128 = 2^7$. Daher heißt die Gleichung $2^x = 2^7$. Daraus kann die Lösung abgelesen werden: $x = 7$. Nach dem 7. Falten sind 128 Lagen Papier entstanden.

Das Auffinden des unbekannten Exponenten einer Potenz, deren Wert man kennt, nennt man **Logarithmieren**.
Es gilt dabei:

$$\mathbf{\log_a(a) = 1}\text{, weil } a^1 = a \quad \text{und} \quad \mathbf{\log_a(1) = 0}\text{, weil } a^0 = 1$$

Das Logarithmieren ist beim Lösen von Exponentialgleichungen eine Äquivalenzumformung, wenn die Basis der Potenz und der Numerus reelle positive Zahlen sind.

5.2 Löse die Gleichungen und dokumentiere deine Rechenschritte. Mache die Probe. B

a) $13{,}67^x = 24{,}5$ **b)** $e^{1-2x} = 107$

Lösung:

a)

$13{,}67^x = 24{,}5$ | Logarithmieren
$x = \log_{13{,}67}(24{,}5)$ | mit Rechner
$x = 1{,}223...$ | Gleichung lösen

Probe: $13{,}67^{1{,}223...} = 24{,}5$
Es müssen alle Nachkommastellen verwendet werden!

b)

$e^{1-2x} = 107$ | Logarithmieren
$(1 - 2x) = \log_e(107)$ | mit Rechner
$1 - 2x = 4{,}672...$ | Gleichung lösen
$x = -1{,}836...$

Probe: $e^{(1+2\cdot 1{,}836...)} = 107$ (wenn man alle Nachkommastellen verwendet)

Die Zahl **e** ist die bereits in Band 1 erwähnte **Euler'sche Zahl**.
Sie ist irrational, hat unendlich viele Nachkommastellen und den Wert:
$e = 2{,}718\,281\,828\,459\,045\,235\,360\,287\,471... \approx 2{,}718$.
Sie wird gebildet durch die Formel $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, in dem man n gegen „unendlich" gehen lässt.
ZB $n = 100\,000 \;\Rightarrow\; 2{,}718\,268\,237...$ die Zahl stimmt bis zur 4. Stelle.
Nimmt man schrittweise immer größere Zahlen für n, dann werden immer mehr exakte Nachkommastellen erreicht.
Die Zahl e ist auf dem Taschenrechner meist als eigene Taste oder in 2. Belegung zu finden.
Du musstest in Aufgabe **5.2 *b)*** den $\mathbf{log_e}$ verwenden. Dieser Logarithmus kommt in der Praxis häufig vor, so dass er eine eigene Bezeichnung und auf vielen Rechnern eine eigene Taste oder eine eigene Rechnerbelegung erhalten hat. Man kürzt ihn mit **ln** ab und schreibt die Basis nicht mehr an. Er heißt **„Natürlicher Logarithmus"**.

$x = \log_e(y) = \ln(y)$ ... Natürlicher Logarithmus, wenn gilt: $y = e^x$
Basis e ≈ 2,718... Euler'sche Zahl
Es gilt laut Definition: $\ln(e^x) = x$

Der Logarithmus zur Basis 10 ist wie der natürliche Logarithmus häufig im Gebrauch. Auch er hat eine eigene Abkürzung und eine eigene Bezeichnung: **„Dekadischer Logarithmus"** bzw. **„Briggs'scher Logarithmus"**. Man findet ihn meist auf einer eigenen Taste **lg** (oder **log**).

$x = \log_{10}(y) = \lg(y)$ ... Dekadischer (Briggs'scher) Logarithmus, wenn gilt: $y = 10^x$
Basis 10
Es gilt laut Definition: $\lg(10^x) = x$

Logarithmen

Aufgaben 5.3 – 5.8:
Löse die folgenden Exponentialgleichungen, wenn möglich ohne zu logarithmieren. Falls es nicht möglich ist, verwende Logarithmen.
Dokumentiere deine Rechenschritte. Mache jeweils die Probe.
Verwende die Kurzschreibweisen für die Logarithmen zur Basis e und zur Basis 10.

BC **5.3** **a)** $2^x = 32$ **b)** $3^x = 81$ **c)** $10^x = 1\,000$ **d)** $e^x = 20{,}085$

BC **5.4** **a)** $1{,}3^x = 15$ **b)** $0{,}5^x = 0{,}0625$ **c)** $10^x = 7{,}89$ **d)** $e^x = 4{,}77$

BC **5.5** **a)** $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 0{,}16$ **b)** $\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1{,}25$ **c)** $\left(\frac{1}{5}\right)^x = 0{,}01$ **d)** $\left(\frac{1}{10}\right)^x = 10^{-5}$

BC **5.6** **a)** $10^{2x} = 13$ **b)** $5^{6x+5} = 25$ **c)** $3 \cdot e^{0{,}5x} = 4$ **d)** $10^x = 8{,}2$

BC **5.7** **a)** $5^x = 17$ **b)** $3^3 - 2^x = 0$ **c)** $3 \cdot 0{,}5^x = 11$ **d)** $2^{3x} - 2 \cdot 5^3 = 0$

BC **5.8** **a)** $2^{3x-4} = 45{,}3$ **b)** $e^{4x} = 17$ **c)** $7^{1-x} = 3{,}6$ **d)** $e^{-0{,}5x} = 10$

BC **5.9** Vereinfache die folgenden Terme:
a) $10^{\lg(x)}$ **b)** $e^{\ln(x)}$ **c)** $\lg(10^{2x})$ **d)** $\ln(e^{-x})$

CD **5.10** Kreuze jene Berechnung an, die richtig ist. Begründe deine Wahl.

A	☐	$\ln(e^a) = e$
B	☐	$\log_{\sqrt{6}}(36) = 4$
C	☐	$\lg(1\,000) = 10$
D	☐	$\log_5(\sqrt{5}) = -0{,}5$

CD **5.11** Kreuze an, welche Gleichung zum Ausdruck $\log_5(0{,}04) = x$ passt.
Begründe deine Wahl.

A	☐	$0{,}04^5 = x$
B	☐	$0{,}04^x = 5$
C	☐	$5^x = 0{,}04$
D	☐	$5^{0{,}04} = x$

CD **5.12** Kreuze an, welche Umformung richtig ist. Begründe deine Wahl.

A	☐	$3 \cdot 5^x = 375 \;\Rightarrow\; 5^x = 125 \;\Rightarrow\; x = \lg(125)$
B	☐	$4 \cdot 2^x - 3 = 5 \;\Rightarrow\; 4 \cdot 2^x = 8 \;\Rightarrow\; 8^x = 8 \;\Rightarrow\; x = 1$
C	☐	$2 \cdot 3^x = 6 \;\Rightarrow\; 6^x = 6 \;\Rightarrow\; x = 1$
D	☐	$5^{2x} = 2 \;\Rightarrow\; 10^{\lg(5) \cdot 2x} = 10^{\lg(2)} \;\Rightarrow\; x = \frac{\lg(2)}{\lg(25)}$

BD **5.13** Verwende bei den folgenden Aufgaben, dass für $a^x = b$ gilt: $x = \log_a(b)$
Berechne über die passende Exponentialgleichung den Wert des angegebenen Logarithmus. Überprüfe anschließend mithilfe von Technologieeinsatz.
a) $\log_3 27$ **b)** $\lg(100)$ **c)** $\log_2(16)$ **d)** $\lg 0{,}001$

B **5.14** Löse die folgenden Gleichungen mithilfe der Definition von Logarithmen.
a) $\lg(x-5) = -2$ **b)** $\lg(3x-2) = 1$ **c)** $\lg(8x) = 3$ **d)** $\lg(2x + 0{,}5) = 0$

B **5.15** Löse die folgenden Gleichungen mithilfe der Definition von Logarithmen.
a) $\ln(x-1) = -1$ **b)** $\ln(x+2) = 0$ **c)** $\ln(8x) = 1$ **d)** $\ln(-2x) = 0$

5.2 Rechenregeln für Logarithmen

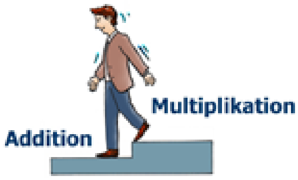
Da mit Logarithmen Exponenten berechnet werden, lassen sich die Rechengesetze für Logarithmen aus dem Rechnen mit Potenzen herleiten.

Multiplikation von Potenzen mit gleicher Basis:

Potenzschreibweise: $x \cdot y = a^n \cdot a^m$

Logarithmenschreibweise:
$x = a^n \;\Rightarrow\; \log_a(x) = n;\;\; y = a^m \;\Rightarrow\; \log_a(y) = m$
$x \cdot y = a^{n+m} \;\Rightarrow\; \log_a(x \cdot y) = n + m$
Daher gilt: $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$

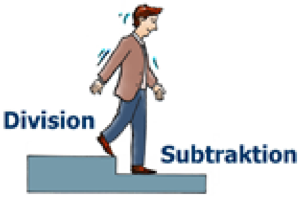
Reduktion der Rechenstufe:



Analog gilt für die **Division von Potenzen mit gleicher Basis:**

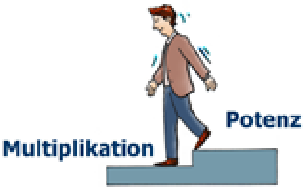
Potenzschreibweise: $\frac{x}{y} = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

Logarithmenschreibweise: $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$



Potenz einer Potenz:
Potenzschreibweise: $x^m = (a^n)^m = a^{n \cdot m}$

Logarithmenschreibweise: $\log_a(x^m) = m \cdot \log_a(x)$



Wurzel einer Potenz = Potenz mit einer Bruchzahl:

Potenzschreibweise: $\sqrt[m]{x} = x^{\frac{1}{m}}$

Logarithmenschreibweise: $\log_a(\sqrt[m]{x}) = \frac{1}{m} \cdot \log_a(x)$

Wie man erkennen kann, reduziert das Logarithmieren die Rechenstufe. Dies hatte noch vor wenigen Jahrzehnten in Zeiten vor dem Einsatz von Elektronik große Bedeutung, weil man damit schwierige Rechnungen mit einfacheren Rechenarten bewältigen konnte.
Durch den Einsatz von Technologie hat das logarithmische Rechnen an Bedeutung verloren.

Rechenregeln für Logarithmen

Logarithmus eines **Produkts** = **Summe** der Logarithmen der einzelnen Faktoren

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

Logarithmus eines **Quotienten** = **Differenz** der Logarithmen von Zähler und Nenner

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$$

Logarithmus einer **Potenz** = **Multiplikation** der Hochzahl mit Logarithmus der Basis

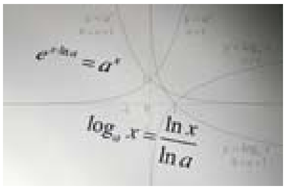
$$\log_a(x^m) = m \cdot \log_a(x)$$

Logarithmus einer **Wurzel** = **Division** des Logarithmus der Basis durch den Wurzelexponenten

$$\log_a(\sqrt[m]{x}) = \frac{1}{m} \cdot \log_a(x)$$

Mithilfe dieser Rechenregeln lassen sich logarithmische Ausdrücke in einfachere Terme zerlegen bzw. zu komplexeren Ausdrücken zusammenfassen.

BD **5.16** Für Logarithmen mit anderen Basen als 10 oder e stehen am Taschenrechner oft keine Tasten bzw. keine Befehle zur Verfügung. Deren Berechnung wird dann auf dekadische Logarithmen oder auf natürliche Logarithmen zurückgeführt.
Erkläre in einzelnen Rechenschritten, wie man hier vorgehen muss.



$x = \log_b(y)$ | in eine Exponentialfunktion umwandeln

$b^x = y$ | Logarithmieren zur Basis 10

$\lg(b^x) = \lg(y)$ | Potenzrechengesetz anwenden

$x \cdot \lg(b) = \lg(y)$ und $x = \frac{\lg(y)}{\lg(b)}$

Man hätte statt des dekadischen Logarithmus auch den natürlichen Logarithmus verwenden können und wäre zum Ergebnis gekommen: $x = \frac{\ln(y)}{\ln(b)}$

Damit ergibt sich für die Umwandlung $\boldsymbol{\log_b(y) = \frac{\lg(y)}{\lg(b)} = \frac{\ln(y)}{\ln(b)}}$

Daher ist es leicht möglich, einen Logarithmus einer Basis in den Logarithmus einer anderen Basis umzuwandeln.

Die Umwandlung des Logarithmus einer Basis in den Logarithmus einer anderen Basis:

$$\boldsymbol{\log_b(y) = \frac{\log_a(y)}{\log_a(b)}}$$

Besonders wichtig ist die Umrechnung zwischen der Basis 10 und e:

$$\boldsymbol{\ln(y) = \frac{\lg(y)}{\lg(e)}} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\lg(y) = \frac{\ln(y)}{\ln(10)}}$$

B **5.17** Zerlege $\ln\left(\left(\frac{5x}{ay^3}\right)^2 \cdot \sqrt{7z^3}\right)$ soweit wie möglich in eine Summe bzw. Differenz von Einzellogarithmen.

Lösung:

$$\ln\left(\left(\frac{5x}{ay^3}\right)^2 \cdot \sqrt{7z^3}\right) = \ln\left(\frac{5x}{ay^3}\right)^2 + \ln(\sqrt{7z^3}) = 2 \cdot \ln\left(\frac{5x}{ay^3}\right) + \frac{1}{2} \cdot \ln(7z^3) =$$

$$= 2 \cdot (\ln(5) + \ln(x) - \ln(a) - 3 \cdot \ln(y)) + \frac{1}{2} \cdot (\ln(7) + 3 \cdot \ln(z)) =$$

$$= 2 \cdot \ln(5) + 2 \cdot \ln(x) - 2 \cdot \ln(a) - 6 \cdot \ln(y) + \frac{1}{2} \cdot \ln(7) + \frac{3}{2} \cdot \ln(z)$$

BD **5.18** Zerlege soweit wie möglich in eine Summe bzw. Differenz von Einzellogarithmen. Argumentiere, welche Rechenregeln du verwendest.

a) $\ln(4a^3)$ **b)** $\lg(x^3 \cdot y \cdot z^2)$ **c)** $\ln\sqrt[3]{a^2 \cdot b}$ **d)** $\lg\left(\frac{x^4 \cdot z}{y^2}\right)$

e) $\lg(x^2 - y^2)$ **f)** $\ln\left(a \cdot \frac{b^2}{\sqrt[3]{c}}\right)$ **g)** $\lg\left(\sqrt[5]{x^4} \cdot \frac{a^2}{4b^3 \cdot c^5}\right)$ **h)** $\lg\left(\frac{3st^5}{5xz} \cdot \sqrt{\frac{m^3 \cdot n}{3a - 3b}}\right)$

CD **5.19** Begründe mithilfe der Rechenregeln für Logarithmen, welche Fehler in den folgenden Umformungen gemacht wurden.

a) $\lg(a^2 + b) = 2 \cdot \lg(a) + \lg(b)$ **b)** $\ln\left(\frac{x^2}{y \cdot z^3}\right) = 2 \cdot \ln(x) - \ln(y) + 3 \cdot \ln(z)$

c) $\ln(\sqrt[3]{a^4 + b^3}) = \frac{4}{3} \cdot \ln(a) + \ln(b)$ **d)** $\lg\left(\frac{3x^4 \cdot y}{z^3 \cdot a}\right) = 4 \cdot \lg(3x) + \lg(y) - 3 \cdot \lg(z) + \lg(a)$

CD **5.20** Erkläre, welche Fehler bei der Zerlegung gemacht wurden. Stelle richtig.

a) $\lg\left(\frac{2a^4b}{c^2d}\right) = 4 \cdot \lg(2a) + \lg(b) - 2 \cdot \lg(c) + \lg(d)$

b) $\ln\left(\frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}\right) = 2 \cdot \ln(x) + 2 \cdot \ln(y) - \ln(x - y) + \ln(x + y)$

5.21 Fasse $\frac{1}{2}\cdot(3\cdot\lg(a)+5\cdot\lg(b)-\lg(c))+2$ zum Logarithmus eines einzigen Terms zusammen. **B**

Lösung:

$$\frac{1}{2}\cdot(3\cdot\lg(a)+5\cdot\lg(b)-\lg(c))+2=\frac{1}{2}\cdot(\lg(a^3)+\lg(b^5)-\lg(c))+\lg(100)=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\lg\left(\frac{a^3\cdot b^5}{c}\right)+\lg(100)=\lg\left(\sqrt{\frac{a^3\cdot b^5}{c}}\cdot 100\right)$$

5.22 Fasse jeweils zum Logarithmus eines einzigen Terms zusammen. **B**
Vereinfache die Terme soweit wie möglich.

a) $\lg(3)+\lg(a)+\lg(b)$ **b)** $2\cdot\ln(a)+\ln(b)$ **c)** $\ln(2)+\ln(x)-\ln(y)$
d) $3\cdot\ln(x)-\ln(2x)$ **e)** $\lg(x^2-1)-\lg(x+1)$ **f)** $\lg(x^2+5x+6)-2\cdot\lg(x+2)$
g) $\frac{1}{2}\cdot(3\cdot\lg(a)-\lg(b))$ **h)** $\frac{1}{3}\cdot(\lg(a+b)+2\cdot\lg(a-b))-\frac{1}{4}\cdot(2+\lg(a)-\lg(b))$

5.23 Zeige, dass die folgenden Umformungen richtig sind. **BD**
Erkläre, welche Rechenregeln angewendet wurden.

a) $\lg(243)=5\cdot\lg(3)$ **b)** $\ln(9)=\ln(3)+\ln(3)$ **c)** $\ln(0{,}5)=-\ln(2)$

Aufgaben 5.24 – 5.25:
Erkläre jeweils mithilfe der Rechenregeln für Logarithmen, welcher Fehler gemacht wurde.

5.24 **a)** $\lg(3)-\frac{1}{3}\cdot\lg(x)+4\cdot\lg(y)=\lg\left(\frac{3}{\sqrt[3]{x}\cdot y^4}\right)$ **BD**

b) $\frac{1}{5}\cdot[\ln(x)+3\ln(y)-\ln(z+b)]=\ln\left(\sqrt[5]{\frac{x\cdot y^3}{z\cdot b}}\right)$

5.25 **a)** $\lg(2)-\frac{1}{3}\cdot\lg(a)+4\cdot\lg(c)=\lg\left(\frac{2}{\sqrt[3]{ac^4}}\right)$ **BD**

b) $\frac{1}{4}\cdot[\ln(a)+2\cdot\ln(b)-\ln(c+d)]=\ln\left(\sqrt[4]{\frac{a\cdot b^2}{c\cdot d}}\right)$

Aufgaben 5.26 – 5.28:
Löse die folgenden Exponentialgleichungen mithilfe der logarithmischen Rechengesetze.
Überprüfe mithilfe von Technologieeinsatz. (Runde auf 2 Nachkommastellen.)

5.26 **a)** $3^{x+1}=0{,}5$ **b)** $0{,}35\cdot 2^{0{,}5x}=0{,}8^x$ **c)** $\left(\frac{1}{2}\right)^x=\frac{1}{3^x}$ **B**
d) $5\cdot 4^{-x}=1$ **e)** $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}=\left(\frac{250}{365}\right)^x$ **f)** $\left(\frac{1}{5}\right)^{-2x}=\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^{1-x}$

5.27 **a)** $e^{0{,}3x}=9$ **b)** $2-e^{-3x}=0{,}6$ **c)** $\frac{e^{-\frac{x}{10}}}{2}=0{,}56$ **B**
d) $1-e^{0{,}5x}=0{,}7$ **e)** $\left(\frac{1}{10}\right)^{3x-2}=8^{3x-5}$ **f)** $e^{1-x}=0{,}77$

5.28 **a)** $10^{x+1}-4\cdot 10^x=20$ **b)** $2\cdot 10^{x+4}-10^{x+2}=1\,300$ **c)** $5\cdot 10^{x+2}-7\cdot 10^x=3^x$ **B**
Hinweis: Forme jeweils den Linksterm der Gleichung durch Herausheben von 10^x auf ein Produkt um und wende dann die logarithmischen Rechengesetze an.

5.29 Berechne aus den folgenden Formeln die angegebene Variable. **B**

a) $I=I_0\cdot e^{\mu x}$, $\mu=?$ **b)** $L=10\cdot\lg\left(\frac{I}{I_0}\right)$, $I=?$
c) $\frac{T_1}{T_2}=\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{k-1}$, $k=?$ **d)** $\frac{T_1}{T_2}=\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{k-1}{k}}$, $k=?$

Logarithmen

Zusammenfassung

Logarithmen

$$a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a(b) \quad (a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0)$$

Für jede Basis *a* ($a > 0$, $a \neq 1$) gilt:

$\log_a(a) = 1$, da $a^1 = a$ $\qquad$ $\log_a(1) = 0$, da $a^0 = 1$

Zusammenhang zwischen Logarithmen mit verschiedener Basis:

$$\log_b(y) = \frac{\lg(y)}{\lg(b)} = \frac{\ln(y)}{\ln(b)} = \frac{\log_a(y)}{\log_a(b)} \qquad \ln(y) = \frac{\lg(y)}{\lg(e)} \qquad \lg(y) = \frac{\ln(y)}{\ln(10)}$$

Rechengesetze für Logarithmen:

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y) \qquad \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$$

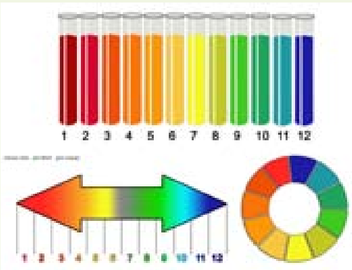
$$\log_a(x^m) = m \cdot \log_a(x) \qquad \log_a(\sqrt[m]{x}) = \frac{1}{m} \cdot \log_a(x)$$

Lösen von Exponentialgleichungen der Form $a^{\lambda x} = b$:

- Gesamte linke und gesamte rechte Seite logarithmieren
- Anwenden des Rechengesetzes $\log_a(x^m) = m \cdot \log_a(x)$

Vermischte Aufgaben zur Vertiefung

ABD **5.30** In der Chemie ist der pH-Wert einer wässrigen Lösung definiert als der negative dekadische Logarithmus der **H_3O^+-Ionen-Konzentration *c*** in Mol pro Liter (mol/ℓ).
Je weiter der pH-Wert einer Flüssigkeit unter 7 ist, desto saurer ist eine Lösung.
Wasser mit pH-Wert = 7 ist neutral.
Flüssigkeiten mit einem pH-Wert über 7 sind zunehmend basisch (alkalisch).



a) Zeige allgemein, was mit dem pH-Wert einer Flüssigkeit passiert, wenn *c* um den Faktor 100 erhöht wird.
Veranschauliche dies anschließend an Wasser mit pH = 7.

b) Lackmus-Tinktur wird als Indikator für den pH-Wert verwendet. Eine damit gefärbte Flüssigkeit erscheint im pH-Wert-Bereich bis 4,5 rot, ab 4,5 bis 8,3 blaurot und ab 8,3 blau.
Argumentiere, ob die Konzentration *c* größer oder kleiner wird, wenn ein Farbumschlag auf blau eintritt, also von pH = 8,3 auf pH > 8,3.

Lösung:

a) $pH_1 = -\lg c$
$pH_2 = -\lg(100c) = -\lg(100) - \lg(c) = -2 + pH_1$
Der pH Wert sinkt um 2, die Lösung wird saurer.

Wasser
$pH_1 = 7 \Rightarrow c_1 = 10^{-7}$ mol/ℓ
$c_2 = 100 \cdot c_1 = 10^{-5}$ mol/ℓ
$pH_2 = 5$

b) $pH = 8{,}3 \Rightarrow c = 10^{-8{,}3}$ mol/ℓ.
Der Farbumschlag nach blau tritt ein, wenn pH > 8,3,
also zB bei $pH = 9 \Rightarrow c = 10^{-9}$ mol/ℓ.
Die Konzentration *c* wird geringer.

5.31 Ein Mikroprozessor im PC hat eine große Anzahl von Leitungen, mit denen er eine Speicherzelle im Speicher (RAM) ansteuert.
Jede Leitung kann 2 Zustände annehmen („Spannung ein" bzw. „Spannung aus").
Bei n Leitungen können daher 2^n Speicherzellen im Speicher adressiert werden.

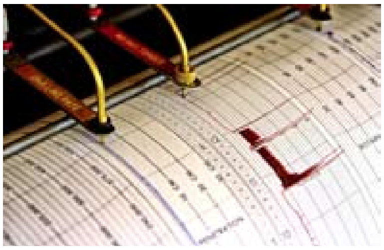
AB

a) Erstelle eine Gleichung, mit der man berechnen kann, wie viele Leitungen man braucht, um N Speicherzellen anzusteuern.

b) Berechne, wie viel Leitungen man für 65 536 Speicherzellen benötigt.

5.32 Die Stärke von Erdbeben wird häufig mit der „Richterskala" (Charles Francis Richter, 1900 – 1985, US-amerikanischer Seismologe) beurteilt.
Der Richterskalenwert R hängt mit der Stärke von Erdstößen nach der folgenden Formel zusammen: $R(A) = \lg\left(\frac{A}{A_0}\right)$

AB



A ... maximaler Ausschlag des Seismographen in Mikrometer (µm) 100 km vom Epizentrum entfernt.
$R(A)$ ... Richterskalenwert; eine dimensionslose Zahl
A_0 ist ein konstanter Korrekturfaktor, der von den Verhältnissen am Messort bestimmt wird.
Berechne, um welchen Faktor die Intensität eines Erdbebens mit $R = 3{,}6$ größer ist als die eines Erdbebens mit $R = 2{,}5$.

5.33 Nach dem Gesetz von Weber-Fechner (Ernst Heinrich Weber, 1795 – 1878, deutscher Physiologe und Anatom; Gustav Theodor Fechner, 1801 – 1887, deutscher Psychologe und Physiker) verhalten sich die subjektiven Sinneseindrücke wie die Logarithmen der „objektiven" Reizstärken.

ABCD

Für die Lautstärke L (Einheit Dezibel, dB) gilt das folgende Gesetz: $L(I) = 10 \cdot \lg\left(\frac{I}{I_0}\right)$
I ... Intensität des Schalls, angegeben in Watt pro Quadratmeter (W/m^2)
$I_0 = 10^{-12}$ W/m^2 ... Intensität eines Tons, den man gerade noch wahrnehmen kann.
$L(I)$ ... Lautstärke bei Intensität I in Dezibel (dB)

a) Eine flüsternde Person erzeugt eine Schallintensität $I = 10^2 \cdot 10^{-12}$ W/m^2.
Berechne, um wie viele Einheiten sich die Lautstärke ändert, wenn 2; 20; 200 bzw. 1 000 Personen in einem ausreichend großen Saal flüstern.
Interpretiere, welche Aussage für die Verdopplung, bzw. die Verzehnfachung der Schallintensität aus diesen Werten folgt.

b) Argumentiere, welche Lautstärken in dB zu den Schallintensitäten I gehören, wenn $I = I_0$, $I = 2I_0$ bzw. $I = 10I_0$.

c) Ein Schlaginstrument erzeugt eine Lautstärke von 110 dB.
Berechne, wie viele solche Instrumente mit jeweils derselben Lautstärke gemeinsam gespielt werden müssten, damit die Schmerzgrenze von 130 dB erreicht wird.

d) Erkläre, welche Schallintensität I bei folgenden Lautstärken erzeugt wird:
Flüstern mit 20 dB, Motorengeräusch mit 90 dB, Flugzeug mit 125 dB, Musikband mit 130 dB.

Logarithmen

Wissens-Check

Bearbeite die Aufgaben. **Begründe** jeweils deine Auswahl oder Zuordnung.

		gelöst
1	Kreuze den am genauesten gerundeten Wert für den angegebenen Ausdruck an. Schätze ohne Einsatz von Technologie. $\log_2(33) \approx$ A ☐ 1 · B ☐ 2 · C ☐ 3 · D ☐ 4 · E ☐ 5	
2	Kreuze den am genauesten gerundeten Wert für den angegebenen Ausdruck an. Schätze ohne Einsatz von Technologie. $\ln(27) \approx$ A ☐ 1 · B ☐ 2 · C ☐ 3 · D ☐ 4 · E ☐ 5	
3	Kreuze den am genauesten gerundeten Wert für den angegebenen Ausdruck an. Schätze ohne Einsatz von Technologie. $\lg(1\,970) \approx$ A ☐ 1 · B ☐ 2 · C ☐ 3 · D ☐ 4 · E ☐ 5	
4	Kreuze die richtige Umformung an. $\ln(x) - \ln(y) = \ldots$ A ☐ $\ln(x-y)$ · B ☐ $\frac{\ln x}{\ln y}$ · C ☐ $\ln(x) - \ln\left(\frac{1}{y}\right)$ · D ☐ $\ln\left(\frac{x}{y}\right)$ · E ☐ $\frac{1}{y} \cdot \ln(x)$	
5	Kreuze die richtige Umformung an. $\frac{\lg(x^2)}{\lg(y^2)} = \ldots$ A ☐ $\lg(x^2 - y^2)$ · B ☐ $\left(\frac{\lg x}{\lg y}\right)^2$ · C ☐ $\lg\left(\frac{x^2}{y^2}\right)$ · D ☐ $2(\lg(x) - \lg(y))$ · E ☐ $\frac{\lg(x)}{\lg(y)}$	
6	Kreuze die richtige Aussage an. A ☐ $\ln(a+b) = \ln(a) + \ln(b)$ B ☐ $\ln(a+b) = \ln(a) \cdot \ln(b)$ C ☐ $\sqrt{\ln(a)} = \ln(\sqrt{a})$ D ☐ $\sqrt{\ln(a^2)} = \ln(a)$ E ☐ $\sqrt{(\ln a)^2} = \ln(a)$	

		gelöst
7	Kreuze das richtige Ergebnis für die folgende Rechenoperation an: $\ln(e^{e^{-x}} \cdot e^{x}) = \dots$	

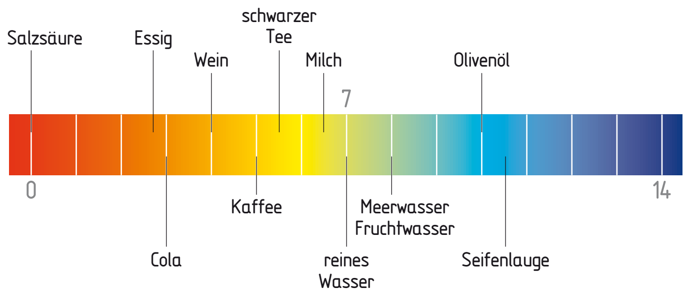
A ☐	$e^{-x} \cdot x$	**C** ☐	$\frac{e^{x}}{x}$	**E** ☐	$x + \frac{1}{e^{-x}}$
B ☐	$\frac{1}{x} + e^{x}$	**D** ☐	$x + \frac{1}{e^{x}}$		

8 Ordne den Aussagen 1 und 2 jeweils den richtigen Zusammenhang von p und x aus A bis D zu.

1	Wenn die Nachfrage $x = 8$ ME beträgt, so ist der Durchschnittspreis p in GE/ME null.	☐	**2**	Wenn die Nachfrage $x = 9$ ME beträgt, so ist der Durchschnittspreis p in GE/ME null.	☐

A	$p = 4 \ln(18 - 2x)$	**C**	$p = 4 \lg(9 - x)$
B	$p = 4 \ln(10 - x)$	**D**	$p = 4 \lg(16 - 2x)$

9



pH-Werte sind Zahlen von 0 bis 14,
[0; 7[zeigt eine Säure an
7 ... neutral (reines Wasser)
]7; 14] eine Lauge.

> Definition für verdünnte Lösungen:
> **$pH = -\lg(c)$**
> c ... Konzentration der H_3O^{+}-Ionen in Mol/Liter

Ordne den Aussagen 1 und 2 jeweils die richtige Substanz aus A bis D zu.

1	$c = 10^{-8}$ Mol/Liter	☐	**2**	$c = 0{,}001$ Mol/Liter	☐

A	Cola	**C**	Kaffee
B	Milch	**D**	Fruchtwasser

Lösung:
1) E 2) C 3) C 4) D 5) E 6) E 7) D 8) 1 → C; 2 → B 9) 1 → D; 2 → A