## 4.6 Die Umkehrfunktion

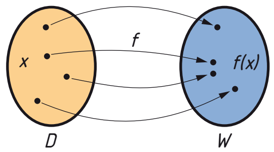
### 4.6.1 Die Funktion und ihre Umkehrung

ABD

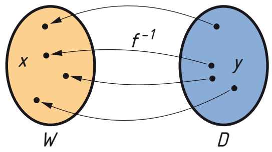
**4.98** Stelle die Funktion $f$: $y = 5x - 3$ im Intervall $[-3; 5]$ grafisch dar.
Ermittle die Gleichung der Umkehrfunktion $f^{-1}$.
Erkläre anhand einer grafischen Darstellung den Zusammenhang der beiden Funktionen $f$ und $f^{-1}$.

Um diese Aufgabe lösen zu können, musst du den Begriff der Umkehrfunktion kennen.

Ist ein linearer Zusammenhang zwischen zwei Größen als Funktion $f$ gegeben, kann man der unabhängigen Variablen immer eindeutig einen Funktionswert zuordnen. Vertauscht man die abhängigen und unabhängigen Variablen, dann besteht bei linearen Funktionen wieder eine eindeutige Zuordnung.



Funktion $f$



Umkehrfunktion $f^{-1}$

Die so entstandene Funktion heißt **Umkehrfunktion** und wird mit $f^{-1}$ bezeichnet.

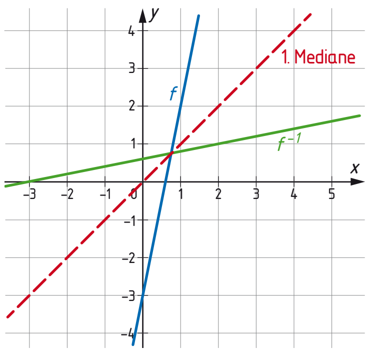
Die Funktion $f$: $D \to W$ mit $y = f(x)$ ordnet jedem $x \in D$ eindeutig ein $y \in W$ zu.
Vertauscht man $W$ mit $D$ und kann jedem $y$ eindeutig ein $x$ zugeordnet werden, so entsteht die **Umkehrfunktion $f^{-1}$** von $f$.

Man kann die Umkehrfunktion aus der Funktionsgleichung berechnen.

**1. Schritt:** ***x* wird explizit ausgedrückt** (dh. $x$ wird frei gestellt). Man erhält die Gleichung der Umkehrfunktion: $f^{-1}$: $x = \frac{y+3}{5}$

**2. Schritt:** Hat man es nur mit den **Koordinaten von Punkten** zu tun und nicht mit Größen aus Alltag, Naturwissenschaft oder Wirtschaft, dann ändert man die Achsenbeschriftung im Koordinatensystem nicht, sondern **vertauscht die Variablen *x* und *y*** in der Gleichung der Umkehrfunktion.

$f^{-1}$: $y = \frac{x+3}{5}$. Dies hat den Vorteil, dass man beide Funktionsgraphen in ein gleich bezeichnetes Koordinatensystem zeichnen kann.




Man kann an der grafischen Darstellung beider Funktionen erkennen, dass die Umkehrfunktion die Spiegelung der Funktion an der ersten Mediane ($y = x$) ist.

Das Vertauschen von $x$ und $y$ entspricht im Koordinatensystem einer Spiegelung des Graphen an der 1. Mediane, die durch die Gleichung $y = x$ beschrieben wird.

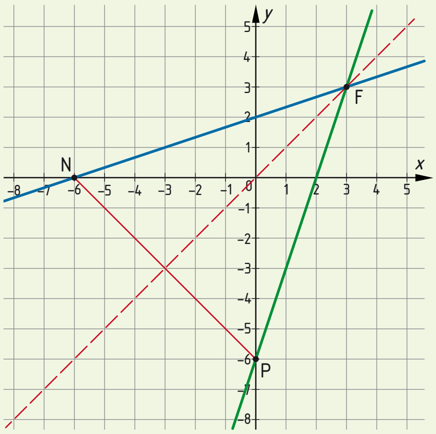
**4.99** Zeichne die Funktion $f$: $y = \frac{1}{3}x + 2$ in ein Koordinatensystem. ABC

**a)** Berechne die Gleichung der Umkehrfunktion und stelle sie grafisch im gleichen Koordinatensystem dar.

**b)** Zeichne die 1. Mediane ebenfalls in dieses Koordinatensystem ein.

**c)** Lies den Schnittpunkt der beiden Funktionsgraphen ab. Was fällt dir auf?

Lösung:




**a)** $x = (y - 2) \cdot 3 = 3y - 6$
Es handelt sich um Punkte im Koordinatensystem, daher gilt:
$f^{-1}$: $y = 3x - 6$
grafisch: grüne Gerade

**b)** 1. Mediane: rot strichlierte Linie.

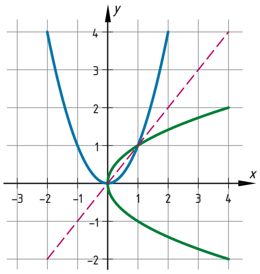
**c)** Der Schnittpunkt hat die Koordinaten (3|3). Dieser Punkt liegt auf der 1. Mediane, weil $x$ und $y$ den gleichen Wert haben.
Es fällt auf, dass der Graph der Umkehrfunktion eine Spiegelung des Funktionsgraphen an der 1. Mediane ist.

**4.100** Untersuche, ob im Intervall [−2; 2] zur Funktion $f(x) = x^2$ eine Umkehrfunktion existiert. BD

Um die Aufgabe zu lösen, erstellen wir eine Wertetabelle im angegebenen Intervall.

| x | y |
|---|---|
| −2 | 4 |
| −1 | 1 |
| 0 | 0 |
| 1 | 1 |
| 2 | 4 |

| x | y |
|---|---|
| 4 | −2 |
| 1 | −1 |
| 0 | 0 |
| 1 | 1 |
| 4 | 2 |

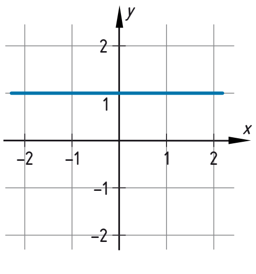



Der gespiegelte Graph stellt keine Funktion dar, da zu jedem $x > 0$ zwei $y$-Werte existieren.
Wenn wir den Definitionsbereich von $y = x^2$ auf $\mathbb{R}_0^+$ beschränken, dann liegt eine Funktion vor, da zu jedem $x \geqslant 0$ genau ein $y$-Wert existiert.

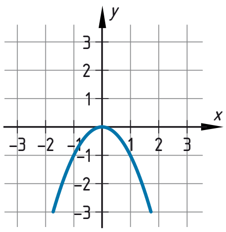
Der an der 1. Mediane gespiegelte Graph von $f$ stellt nur dann eine Funktion dar, wenn der Definitionsbereich von $f$ so eingeschränkt wird, dass einem $y$-Wert nicht 2 unterschiedliche $x$-Werte zugeordnet werden können.

**4.101** Spiegle den gegebenen Graphen an der 1. Mediane. BD
Argumentiere, ob die Umkehrung eine Funktion ist.
Gib die Gleichungen beider Graphen an.

**a)**




**b)**



Aufgaben 4.102 – 4.103: Stelle jeweils die Funktion und deren Umkehrung in einem gemeinsamen Koordinatensystem grafisch dar. Beurteile, ob eine Umkehrfunktion vorliegt; wenn ja, gib deren Funktionsgleichung an.

ABD **4.102** **a)** $y = 5x$ **b)** $y = 2x - 1$ **c)** $y = -x + 1$ **d)** $y = 4$

ABD **4.103** **a)** $y = x^2 + 2$ **b)** $y = x^2 - 3$ **c)** $y = \frac{x}{2}$ **d)** $y = \frac{2}{x+3}$

### 4.6.2 Anwendung der linearen Umkehrfunktion: die Nachfragefunktion

ABC **4.104** Die Preis-Funktion der Nachfrage für Eprouvetten beschreibt den Stückpreis in Abhängigkeit von der nachgefragten Menge durch die Funktion
$p(x) = 400 - 2x$
$x$ ... Absatzmenge in Stück
$p(x)$ ... Stückpreis bei einem Absatz von x Stück in Euro (€).

**a)** Stelle die Funktion und die Umkehrfunktion grafisch jeweils in einem passend skalierten Koordinatensystem dar.
Lies die Gleichung der Umkehrfunktion $x_N(p)$ aus der Grafik ab.
**b)** Berechne die Gleichung der Umkehrfunktion.
**c)** Beschreibe in Worten, welchen Zusammenhang diese Umkehrfunktion angibt.

Was musst du wissen, um diese Aufgabe lösen zu können?

Die **Preisfunktion der Nachfrage**[1] ***p*** beschreibt die Abhängigkeit des Preises für eine Mengeneinheit einer Ware, wobei die Ware billiger wird, je mehr abgesetzt wird.

Die Umkehrung dieser Funktion ordnet dem „Stückpreis" die dabei zu erwartende Absatzmenge zu und ergibt die so genannte **Nachfragefunktion $x_N = p^{-1}$**.

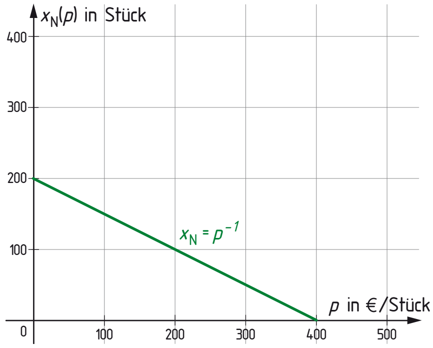
Um diesen Sachverhalt deutlich auszudrücken, stellt man die beiden Funktionen besser getrennt mit vertauschten Achsen dar.

Erstelle für die gegebene Gleichung im eingangs gewählten Beispiel eine Wertetabelle mit beliebigen $x$-Werten für die Funktion $p$:

| $x$ | 0 | 50 | 100 | 150 |
|---|---|---|---|---|
| $p(x)$ | 400 | 300 | 200 | 100 |

**a)** Wenn wir die **Elemente vertauschen**, dann erhält man die Umkehrfunktion $p^{-1}$.

| $p$ | 400 | 300 | 200 | 100 |
|---|---|---|---|---|
| $x_N(p)$ | 0 | 50 | 100 | 150 |




Die Umkehrfunktion lässt sich grafisch in einem Koordinatensystem darstellen.

Ablesen der Umkehrfunktion $d = 200$, $k = \frac{50 - 0}{300 - 400} = -\frac{1}{2}$

$p^{-1}$: $x_N(p) = -0{,}5p + 200$

[1] Man unterscheidet in der Wirtschaft zwischen der Preisfunktion $p_N$ der Nachfrage der Konsumenten und der Preisfunktion $p_A$ des Angebots der Produzenten. In diesem Buch behandeln wir ausschließlich die Preisfunktion der Nachfrage, daher verzichten wir bei $p$ auf den Index N. Den Index N verwenden wir aber bei der Umkehrfunktion $x_N$, damit auf die Nachfragemenge als abhängige Variable hingewiesen wird.

***b)*** Man kann die Umkehrfunktion aus der Funktionsgleichung berechnen, dh. in unserem Fall die Nachfragefunktion aus der Preisfunktion der Nachfrage ermitteln.
***x* wird explizit ausgedrückt**, dh. $x$ wird frei gestellt und mit $x_N$ bezeichnet.
Man erhält die Gleichung der Umkehrfunktion: $p^{-1}$: $x_N = \frac{p - 400}{-2} = -0{,}5p + 200$

***c)*** Die Umkehrfunktion (= Nachfragefunktion) gibt die nachgefragte Absatzmenge $x_N$ in Mengeneinheiten (ME) als abhängige Variable bei einem Stückpreis von $p$ in Geldeinheiten pro Mengeneinheit (GE/ME) an.

**4.105** Es werden $x$ Kilogramm (kg) eines Rohstoffs gekauft. Der Preis pro kg ändert sich linear in Abhängigkeit von der Verkaufsmenge $x$.
Zu Beginn bei $x = 0$ beträgt der Preis je kg 50 €.
Bei einer Verkaufsmenge von 10 kg beträgt der Preis je kg 43 €.
Stelle die Gleichungen der Preisfunktion der Nachfrage und die ihrer Umkehrfunktion auf.
Zeichne den Graphen der Nachfragefunktion in ein passend skaliertes Koordinatensystem.

ABCD

TE

**4.106** Es werden $x$ Liter ($\ell$) einer Flüssigkeit gekauft. Der Preis pro $\ell$ ändert sich linear in Abhängigkeit von der Verkaufsmenge.
Bei einem Preis von 100 € werden 15 $\ell$ des Produkts nachgefragt.
Bei einem Preis von 80 € können 17,5 $\ell$ abgesetzt werden.
Stelle die Gleichungen der Nachfragefunktion und ihrer Umkehrfunktion auf.
Zeichne den Graphen der Preisfunktion der Nachfrage in ein passend skaliertes Koordinatensystem.

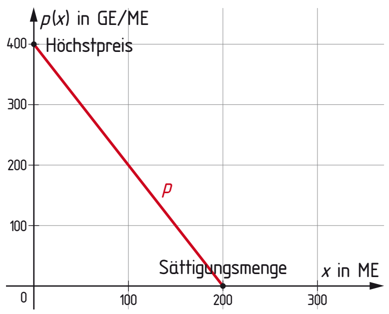
ABCD

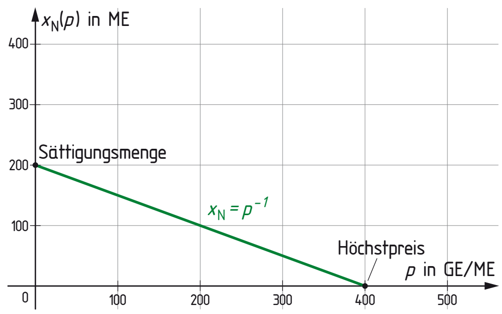
TE

Die Nachfragefunktion und daher auch die Preisfunktion der Nachfrage haben zwei besondere Stellen.

Der Preis, bei dem der Käufer nicht mehr bereit ist, die Ware zu kaufen, wird als **Höchstpreis $p_H$** bezeichnet. Er lässt sich zB beim Schnittpunkt der Nachfragefunktion mit der $p$-Achse ablesen. Berechnen kann man den Höchstpreis über die Nullstelle der Nachfragefunktion $x_N(p) = 0$ oder als Wert der Preisfunktion der Nachfrage mit $p(0)$.

Die höchste Menge, die abgesetzt werden kann, wird durch die volle Sättigung des Bedarfs festgelegt und heißt **Sättigungsmenge $x_S$**. Sie ist die Nullstelle der Preisfunktion der Nachfrage oder kann auch als Wert $x_N(0)$ der Nachfragefunktion verstanden werden. Die beiden Skizzen verdeutlichen den Zusammenhang.



ABCD **4.107** Die Nachfrage $x_N$ nach einem bestimmten Produkt hat die Sättigungsmenge $x_S$ bei 50 Mengeneinheiten (ME). Der höchste Preis pro ME (Preis bei $x = 0$) beträgt 160 Geldeinheiten (GE).

**a)** Stelle die Funktion $x_N$ grafisch dar und ermittle mithilfe des Steigungsdreiecks die Funktionsgleichung.

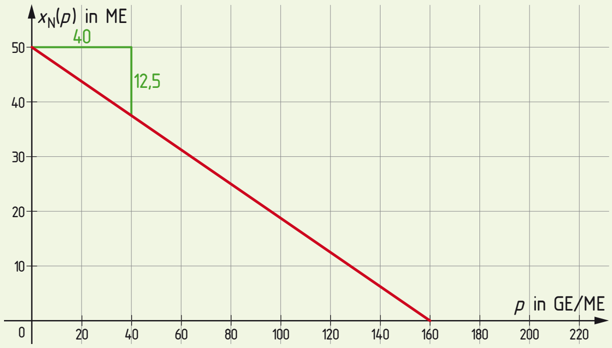
**b)** Berechne die Gleichung der Preisfunktion der Nachfrage und berechne daraus deren Umkehrfunktion $x_N$. Vergleiche mit der Ablesung in ***a)***.

Lösung:

$x$ ... nachgefragte Menge in ME

$p(x)$ ... Preis der Nachfrage pro ME in GE/ME

**a)**




$k = -0{,}3125$; $d = 50$

$x_N(p) = -\,0{,}3125p + 50$

**b)** $p(x) = k \cdot x + d$

$k = -160 : 50 = -3{,}2$

$d = 160$

$p(x) = -3{,}2x + 160$

Durch Umformung erhält man: $x_N(p) = -0{,}3125p + 50$

Man erhält durch Ablesung und Berechnung das gleiche Ergebnis für $x_N(p)$.

ABC **4.108** Berechne die Sättigungsmenge der Nachfrage, bei der der Preis null wird. Stelle die gegebene Funktion $p$ grafisch dar und zeichne die Sättigungsmenge ein. Bestimme die Gleichung der Nachfragefunktion.

**a)** $p(x) = 20 - \frac{x}{2}$

**b)** $p(x) = 12 - 0{,}5x$

**c)** $p(x) = -2x + 400$

**d)** $p(x) = -0{,}5x + 50$

**e)** $p(x) = 120 - 2x$

**f)** $p(x) = -5x + 75$

## 4.7 Der Schnittpunkt von zwei Funktionsgraphen

Bisher haben wir den Schnittpunkt zweier Graphen stets aus der Zeichnung abgelesen. Nun suchen wir eine Methode, wie man ihn berechnen kann.

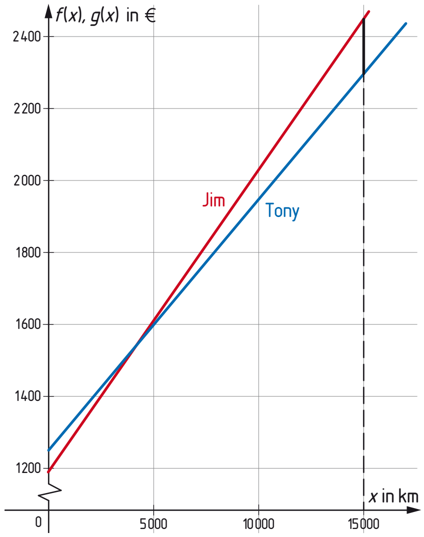
### 4.7.1 Gleichsetzungsverfahren

**4.109** Tony und Jim kaufen je ein gebrauchtes Motorrad.
Tonys Motorrad kostet 1.250 € und hat einen Spritverbrauch von 5 Liter pro 100 km.
Jims Motorrad kostet 1.190 € und hat einen Spritverbrauch von 6 Liter pro 100 km.
1 Liter Benzin kostet 1,40 €.
Vergleiche mithilfe einer Grafik die Kosten für das Motorrad und den Spritverbrauch bei Tony und Jim für Fahrten bis 15 000 km.
Berechne, bis zu welcher Strecke Jim mit dem billigeren Motorrad trotz des höheren Spritverbrauchs preislich günstiger, gleich und weniger günstig als Tony abschneidet.

ABC

Du stellst am besten die Funktionsgleichungen der Kosten für beide Motorräder auf.
$x$ ... Fahrstrecke in Kilometer (km)
$f(x)$, $g(x)$ ... Kosten für $x$ km in Euro (€)

Tony: $f(x) = 1\,250 + 0{,}05 \cdot 1{,}4x = 1\,250 + 0{,}07x$
Jim: $g(x) = 1\,190 + 0{,}06 \cdot 1{,}4x = 1\,190 + 0{,}084x$




Die Grafik ergibt, dass Jim bis ungefähr 5 000 km günstiger ist, bei ca. 5 000 km sind beide gleich, nach 5 000 km wird es für Tony günstiger. Bei 15 000 km beträgt der Kostenunterschied ungefähr 150 €.

Die Ablesung des Schnittpunkts aus der Grafik ist ungenau.
Darum berechnen wir den Schnittpunkt der beiden Geraden, die wir in Normalform dargestellt haben:

$f$: $y = 1\,250 + 0{,}07x$
$\underline{g\text{: } y = 1\,190 + 0{,}084x}$

Es liegt **ein Gleichungssystem mit 2 Variablen** vor. Für den Schnittpunkt gilt, dass die Funktionswerte beider Funktionen übereinstimmen müssen.
Daher kann man beide $y$-Terme einander gleichsetzen.
Dieses Verfahren heißt **„Gleichsetzungsverfahren“** oder **„Komparationsmethode“**.

$$1\,250 + 0{,}07x = 1\,190 + 0{,}084x \quad \Big|\, -0{,}07x - 1\,190$$
$$60 = 0{,}014x$$
$$x = 4\,285{,}714... \approx 4\,285{,}7$$

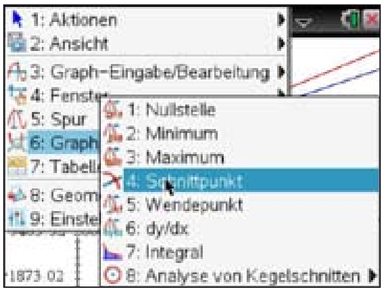
$f(4\,285{,}7) = g(4\,285{,}7) = 1\,550$

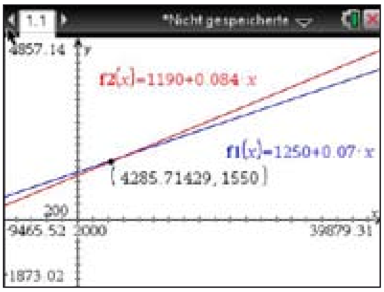
Die Kosten betragen für Tony und Jim gleich viel, nämlich 1.550 €, wenn beide Motorräder ca. 4 285,7 km zurückgelegt haben.

**Lösung des Gleichungssystems mittels Technologieeinsatz:**

**Grafisches Verfahren:**

I: $y = 1\,250 + 0{,}07x$
II: $y = 1\,190 + 0{,}084x$




**TI_Nspire:**
Beide Funktionsgleichungen im Grafikfenster eingeben.
**MENU/2 graphs/6**
**Grafik analysieren/ 4 Schnittpunkt/enter/** untere Grenze und obere Grenze eingeben/ **enter**.

**Die Anleitung für die Lösung von Gleichungssystemen bei TI82-84, Excel und Geogebra-CAS siehe www.hpt.at (Schulbuch Plus für Schüler/innen)**

Eine lineare Gleichung mit 2 Unbekannten kann als Gleichung einer linearen Funktion (bzw. einer Geraden) interpretiert werden.
Werden für zwei Variablen zwei Bedingungen formuliert, so erhält man – in mathematischer Schreibweise – zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten. Sie bilden gemeinsam ein **Gleichungssystem**. Die Gleichungen werden oft mit I und II gekennzeichnet. Gibt es für ein lineares Gleichungssystem mit zwei Variablen ein Zahlenpaar, das beide Gleichungen erfüllt, so nennt man es **Lösung des Gleichungssystems**.

Die lineare Gleichung, die man durch das Gleichsetzen der beiden Funktionsterme erhält, hat 3 unterschiedliche Lösungsmöglichkeiten:

- Eine eindeutige Lösung: Die Graphen beider Funktionen schneiden einander.
- Keine Lösung: Die Graphen der beiden Funktionen liegen parallel zueinander.
- Alle Zahlen der Definitionsmenge sind Lösungen: Die beiden Graphen sind ident.

ABC

**4.110** Ermittle grafisch den Schnittpunkt der beiden Funktionsgraphen von:

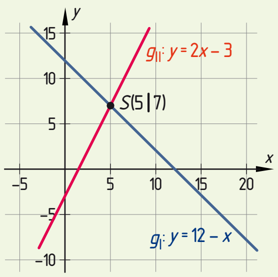
**a)** $g_1(x) = -x + 12$
$g_2(x) = 2x - 3$

**b)** $g_1(x) = -x + 2$
$g_2(x) = -x + 3$

**c)** $g_1(x) = -x + 2$
$g_2(x) = -x + 2$

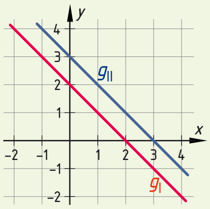
Lösung:

**a)**



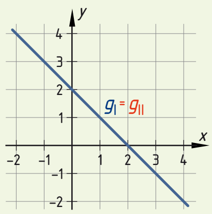

eindeutige Lösung:
$x = 5,\ y = 7$

**b)**




keine Lösung

**c)**




Alle Zahlen der Definitionsmenge sind Lösungen.
$-x + 2$ für alle $x \in D$

Aufgaben 4.111 – 4.112: Der Graph der linearen Funktion $f$ geht durch die Punkte $A$ und $B$.
**a)** Ermittle die Schnittpunkte dieser Geraden mit beiden Koordinatenachsen.
**b)** Ermittle die Gleichung jener Geraden, die durch den Ursprung und durch $P(-2|-2)$ geht.
**c)** Stelle die beiden Geraden grafisch dar und lies den Schnittpunkt ab.
**d)** Berechne den Schnittpunkt der beiden Geraden und überprüfe anhand der Grafik.

**4.111** $A(-4|5)$, $B(4|1)$ AB

**4.112** $A(1|7)$, $B(5|2)$ AB

**4.113** Zeichne die beiden Geraden und berechne ihren Schnittpunkt. B

**a)** I: $y = -x + 1$
II: $y = 2x + 7$

**b)** I: $y = \frac{1}{4}x - 1$
II: $y = x + 2$

**4.114** Die Telefongesellschaft TWO bietet zwei verschiedene Tarife an. ABC

Tarif 1: Monatliche Grundgebühr 9 €,
Gesprächsminute 9 Cent
Tarif 2: Monatliche Grundgebühr 15 €,
Gesprächsminute 5 Cent

**a)** Erstelle die beiden annähernd linearen Tarif-Funktionen für ein Monat.
**b)** Zeichne die beiden Funktionsgraphen.
Lies aus der Grafik ab, wie viel Euro mehr jemand bezahlt, wenn er in einem Monat 6 Stunden telefoniert und den ungünstigeren Tarif gewählt hat.
**c)** Interpretiere, was der Schnittpunkt im Sachzusammenhang aussagt.

**4.115** Auf einer Kartbahn werden 2 Tarife angeboten. ABC

Tarif 1: 10 Minuten kosten 11 € inklusive
Leihgebühr für den Helm und den Anzug.
Tarif 2: 10 Minuten kosten 9 €, die Leihgebühr für
Helm und Anzug beträgt 14 €.

**a)** Erstelle die Kostenfunktionen und zeichne sie.
**b)** Ermittle durch Berechnung und durch Ablesen aus der Grafik, für welche Fahrzeit welcher Tarif günstiger ist, wenn man Helm und Anzug benötigt.

## 4.7.2 Weitere Lösungsmethoden für ein Gleichungssystem

Die Gleichsetzmethode und das grafische Verfahren sind nicht alle Möglichkeiten, wie man lineare Gleichungssysteme lösen kann. Die Lösungsverfahren durch Einsetzen und durch Eliminieren einer Variablen werden häufig benützt. Aber auch das algebraische Lösen des Gleichungssystems mittels **Technologieeinsatz** auch mit mehr als mit zwei Variablen ist hilfreich. Wir beschäftigen uns nun mit diesen drei Methoden für Gleichungssysteme mit 2 Variablen.

### Einsetzungsverfahren (Substitutionsmethode)

Eine Gleichung wird nach einer Unbekannten umgeformt. Der erhaltene Term wird in die andere Gleichung anstelle dieser Unbekannten eingesetzt. Dieses Verfahren eignet sich gut, wenn eine Variable einer Gleichung den Koeffizienten 1 hat.

**B** **4.116** Löse das Gleichungssystem mithilfe des Einsetzungsverfahrens. Führe die Probe durch.

I: $x + 7y = 6$
II: $2x - 4y = 30$

Lösung:

I*: $x = 6 - 7y$
- Wir formen Gleichung I nach der Variablen $x$ auf die Gleichung I* um.

In II: $2 \cdot (6 - 7y) - 4y = 30$
$12 - 14y - 4y = 30$
$-18y = 18$
$y = -1$
- In Gleichung II wird $x$ durch den Rechtsterm von I* ersetzt (substituiert). Wir erhalten eine lineare Gleichung mit der Variablen $y$, deren Lösung wir berechnen.

In I*: $x = 6 - 7 \cdot (-1) = 13$
Lösung: $x = 13$, $y = -1$
- Um x zu erhalten, wird die Lösung für $y$ in I* eingesetzt.

Probe: I: LS: $13 + 7 \cdot (-1) = 6$ LS = RS
II: LS: $2 \cdot 13 - 4 \cdot (-1) = 30$ LS = RS

**Additions- oder Subtraktionsverfahren (Eliminationsmethode)**

Die Gleichungen werden mit geeigneten Zahlen so multipliziert, dass die Koeffizienten einer Variablen Gegenzahlen sind. Anschließend werden sie addiert. Man kann auch so multiplizieren, dass die Koeffizienten einer Variablen gleich sind und die Gleichungen anschließend subtrahieren.

**B** **4.117** Löse das Gleichungssystem mittels Additionsverfahren. Führe die Probe durch.

I: $4x - 3y = 2$
II: $3x + 2y = 27$

Lösung:

I* $= 3 \cdot$ I: $12x - 9y = 6$
II* $= -4 \cdot$ II: $-12x - 8y = -108$ ⊕
- Es soll zB $x$ wegfallen. Gleichung I wird mit 3 und Gleichung II mit $(-4)$ multipliziert, sodass die Koeffizienten 12 und $(-12)$, also Gegenzahlen sind.

I* + II*: $0 - 17y = -102$
- Die neuen Gleichungen werden addiert.

$y = 6$
- Nun kann $y$ berechnet werden.

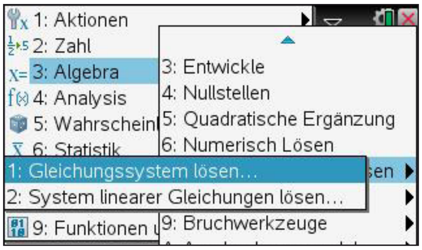
In I: $4x - 3 \cdot 6 = 2 \Rightarrow x = 5$
Lösung: $x = 5$, $y = 6$
- Um $x$ zu erhalten, wird die Lösung für $y$ zum Beispiel in Gleichung I eingesetzt.

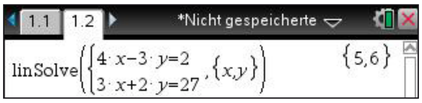
Probe:
I: LS: $4 \cdot 5 - 3 \cdot 6 = 2$ LS = RS
II: LS: $3 \cdot 5 + 2 \cdot 6 = 27$ LS = RS

**Das Rechenverfahren mit Technologieeinsatz**

I: $4x - 3y = 2$
II: $3x + 2y = 27$

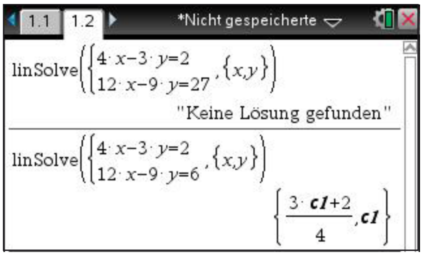
**TI-Nspire:**
Die Gleichungen werden im Calculator mit solve in eine Vorlage eingegeben. **MENU/3 Algebra/ 7 Gleichungssystem lösen/ 2 lineares G/Anzahl 2, Variablen x,y/OK**



Falls das System keine Lösung hat, dann erscheint die Meldung: **„keine Lösung gefunden“**

Falls unendlich viele Lösungen vorliegen, dann erscheint die Lösung mit **einer Formvariablen c1. Es sind beliebige Zahlen einsetzbar!**




**Lösen von Gleichungssystemen bei TI82-84, Excel und Geogebra siehe www.hpt.at (Schulbuch Plus für Schüler/innen)**

**4.118** Löse grafisch. B

**a)** I: $y = -x + 1$; II: $y = 2x + 7$

**b)** I: $y = \frac{1}{4}x - 1$; II: $y = x + 2$

**c)** I: $2x = 3$; II: $-4x + 3y = 6$

**4.119** Zeige, wie man das folgende Gleichungssystem verändern müsste, damit es **1)** keine, **2)** unendlich viele Lösungen hat. ABD
Kontrolliere anschließend mithilfe von Technologieeinsatz.

**a)** I: $3x + 2y = 5$; II: $x - 2y = 5$

**b)** I: $6x - 4y = 12$; II: $-3x + y = 1$

**c)** I: $x + y = 3$; II: $x - y = 2$

**4.120** Löse mit dem Gleichsetzungsverfahren. B
Kontrolliere anschließend mithilfe von Technologieeinsatz.

**a)** I: $x - y = -4$; II: $2x + y = 4$

**b)** I: $-8x + 4y = 12$; II: $9x - 3y = \frac{33}{2}$

**c)** I: $4x - 2y = 36$; II: $x + 3y = 23$

**4.121** Löse mit dem Einsetzungsverfahren. B
Kontrolliere anschließend mithilfe von Technologieeinsatz.

**a)** I: $-2x + y = -8$; II: $3x - 3y = 9$

**b)** I: $6r - 5s = -7$; II: $3r + 4s = 16$

**c)** I: $5t - 3u = 23$; II: $\frac{t}{8} + \frac{u}{2} = 1$

**4.122** Löse mit dem Gleichsetzungsverfahren. B
Kontrolliere anschließend mithilfe von Technologieeinsatz.

**a)** I: $-x + y = -1$; II: $x + 2y = 7$

**b)** I: $3x + 2y = 11$; II: $2x - y = -2$

**c)** I: $6r + 2s = 10$; II: $2r + s = 3$

**d)** I: $v + s = 6$; II: $4v + 6s = 30$

**e)** I: $-2x + y = 3$; II: $x - 3y = -6$

**f)** I: $5a_1 - 3a_2 = 14$; II: $12a_1 + a_2 = 9$

**4.123** Löse mit der Eliminationsmethode. B
Kontrolliere anschließend mithilfe von Technologieeinsatz.

**a)** I: $5a - 6b = 17$; II: $-2a + 4b = -2$

**b)** I: $-10x + 8y = -10$; II: $15x + 6y = 6$

**c)** I: $4x + 3y = 12$; II: $12x - 5y = -6$

**d)** I: $7x_1 + 13x_2 = 59$; II: $5x_1 + 3x_2 = 17$

**e)** I: $22a + 7b = 79$; II: $33a - 14b = -4$

**f)** I: $4x - 3y = 6$; II: $x + 2y = 7$

BCD

**4.124** Überprüfe, ob das Gleichungssystem keine Lösung, eine Lösung oder unendlich viele Lösungen hat. Entscheide dies, bevor du das Gleichungssystem löst.
Begründe deine Vermutung.
Löse das Gleichungssystem anschließend mithilfe von Technologieeinsatz.

**a)** I: $3x + 2y = 7$
II: $\frac{1}{2}x - 3y = \frac{1}{2}$

**b)** I: $2x + y = 0$
II: $4x + 2y = 3$

**c)** I: $3x - 5y = 12$
II: $x - \frac{5}{3}y = 4$

BCD

**4.125** Argumentiere, welches Lösungsverfahren jeweils das günstigste ist.
Löse das Gleichungssystem danach mithilfe von Technologieeinsatz.

**a)** I: $y = -2x + 4$
II: $2y = 3x + 1$

**b)** I: $u : v = 3 : 1$
II: $-2u + 5v = -\frac{1}{2}$

**c)** I: $3a + b = 0$
II: $7a - 2b = -13$

**d)** I: $-\frac{3}{4}x + y = 1$
II: $6x = 8$

**e)** I: $2y - 2 - x = 0$
II: $x = y + 1$

**f)** I: $t_2 = t_1 - 10$
II: $10t_2 = 12t_1$

CD

**4.126** Gegeben sind die Geraden *g* und *h*. Trage in die Tabelle ein, welche Werte die Koeffizienten *c* und *d* in der Geradengleichung von *h* annehmen müssen, um die jeweils angegebene Bedingung zu erfüllen.

$g$: $\frac{3x}{4} + \frac{y}{3} = 2$
$h$: $3x + c \cdot y = d$

| Bedingung | *c* | *d* |
|---|---|---|
| $g \cap h = S$, das heißt *g* und *h* schneiden einander. | | |
| $g \cap h = \{\ \}$, das heißt *g* und *h* sind parallel zueinander. | | |
| $g \cap h = g = h$, das heißt *g* und *h* sind ident. | | |
| $g \perp h$, das heißt *g* steht normal auf *h*. | | |

### 4.7.3 Gleichungssysteme mit mehr als zwei Variablen

Gleichungssysteme mit mehr als zwei Variablen kommen in der Praxis vor, wenn man zB die Lagebeziehung von Ebenen im dreidimensionalen Raum beschreibt oder wenn Funktionen von mehr als einer Variablen abhängen, wie zB die Temperatur eines Gases vom Volumen und vom Druck. Auch wenn man die Koeffizienten von Funktionen bestimmen muss oder Texte in Mathematik übersetzt, ergibt sich meist ein Gleichungssystem mit mehr als zwei Variablen.
In solchen Fällen werden die Gleichungssysteme besser mit Technologieeinsatz gelöst.

ABC

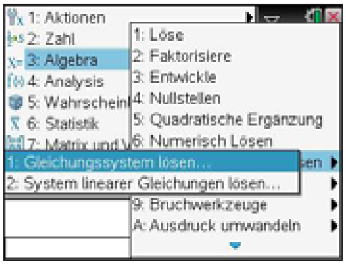
**4.127** Bei einem Turnier erhalten die Teilnehmerinnen und Teilnehmer, die die drei ersten Plätze einnehmen, Geldpreise. Alle drei Geldpreise machen zusammen 16.000 € aus, der zweite und der dritte Preis zusammen 8.000 € sowie der erste und der dritte Preis zusammen 12.000 €.
Berechne, wie hoch der Geldpreis jeweils für den ersten, zweiten und dritten Platz dotiert ist.

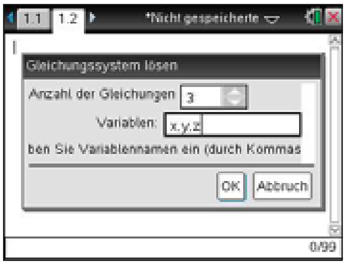

Zunächst werden die Variablen festgelegt:
$x$ … Geldpreis für den 1. Platz,
$y$ … Geldpreis für den 2. Platz,
$z$ … Geldpreis für den 3. Platz

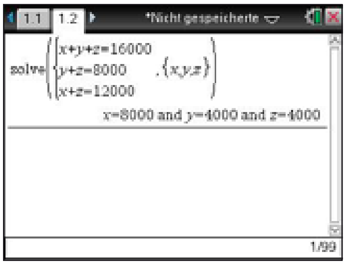
Im 2. Schritt werden die Gleichungen aufgestellt:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 16\,000 \\ y + z &= 8\,000 \\ x + z &= 12\,000 \end{aligned}$$

Wir haben es mit einem Gleichungssystem mit drei Variablen zu tun und geben die Gleichungen in das Rechengerät ein, obwohl man diese Aufgabe im Prinzip im Kopf rechnen könnte:
**TI-Nspire: Calculator/3 Algebra /7 Gleichungssystem lösen/2 System lin Gl… /**








Die Lösung: 1. Platz ist mit 8.000 € sowie der 2. und der 3. Platz mit je 4.000 € dotiert.

**Anleitung für die Eingabe von Gleichungssystemen bei TI82-84, Excel und Geogebra-CAS siehe www.hpt.at (Schulbuch Plus für Schüler/innen)**

Berechne die folgenden Gleichungssysteme mithilfe von Technologieeinsatz.
Bedenke, dass auch hier die drei unterschiedlichen Lösungsfälle (eine eindeutige Lösung, keine oder unendlich viele Lösungen) auftreten können und auch – wie im vorherigen Abschnitt beschrieben – angezeigt werden.

**4.128** B

**a)**
$$\begin{aligned} \text{I:}\quad & x + y = -1 \\ \text{II:}\quad & 2x - z = -5 \\ \text{III:}\quad & y - 2z = 4 \end{aligned}$$

**b)**
$$\begin{aligned} \text{I:}\quad & -3m - 2n = -9 \\ \text{II:}\quad & k + m - 4n = -6 \\ \text{III:}\quad & -2l - m = 3 \\ \text{IV:}\quad & 2k + 3l = 4 \end{aligned}$$

**c)**
$$\begin{aligned} \text{I:}\quad & w + x + z = 7 \\ \text{II:}\quad & 2y + 5z = 3 \\ \text{III:}\quad & 3w - 4z = 2 \\ \text{IV:}\quad & w - 2y - 3z = 1 \end{aligned}$$

**d)**
$$\begin{aligned} \text{I:}\quad & 2a - c + 2d = 9 \\ \text{II:}\quad & 3b + 2e = 11 \\ \text{III:}\quad & -2c - 5d = 1 \\ \text{IV:}\quad & 2a + e = 2 \\ \text{V:}\quad & -b + 5d = 0 \end{aligned}$$

**4.129** B

**a)**
$$\begin{aligned} \text{I:}\quad & 25x + 17y - 8z = 114 \\ \text{II:}\quad & -12x - 16y + 13z = 58 \\ \text{III:}\quad & 41x - 23y + 2z = -4 \end{aligned}$$

**b)**
$$\begin{aligned} \text{I:}\quad & 18{,}2a - 14{,}6b + 0{,}8c = 0{,}12 \\ \text{II:}\quad & 23{,}8a + 8{,}8b - 12c = -4{,}8 \\ \text{III:}\quad & 0{,}76a - 2{,}5b - 7{,}9c = -12{,}43 \end{aligned}$$

**4.130** AB

Eine Firma verkauft Badehosen *B*, Sonnenhüte *S* und Liegen *L*.
Nebenstehende Tabelle zeigt die Verkaufszahlen und Einnahmen von drei Monaten.
Erstelle ein Gleichungssystem zur Berechnung, wie viel jedes dieser Produkte kostet.
Berechne die Kosten pro Artikel.

| | *B* | *S* | *L* | Einnahmen |
|---|---|---|---|---|
| Mai | 50 | 21 | 2 | € 1.876,90 |
| Juni | 26 | 0 | 40 | € 4.714,00 |
| Juli | 0 | 35 | 17 | € 2.064,50 |

**4.131** AB

Drei Bagger B1, B2 und B3 werden eingesetzt, um drei gleich große Baugruben auszuheben.
Bagger B1 und Bagger B2 brauchen 4 Tage, um die erste Baugrube auszuheben.
Bei der zweiten Baugrube wird Bagger B2 zwei Tage allein und weitere vier Tage gemeinsam mit Bagger B3 eingesetzt, um die Baugrube auszuheben.
Bei der dritten Baugrube beginnen B1 und B2, nach zwei Tagen werden sie durch B3 ersetzt und dieser hat nach vier weiteren Tagen die Aushubarbeiten beendet.
Erstelle ein Gleichungssystem zur Berechnung, wie lang jeder Bagger allein für das Ausheben einer Baugrube benötigt.
Löse das Gleichungssystem.