2 Kosten- und Preistheorie

2.1 Ökonomische Funktionen

In fast allen Bereichen der Ökonomie werden zur Beschreibung von Sachverhalten Funktionen als mathematisches Modell eingesetzt. Es ist dabei zu beachten, dass eine exakt definierte Funktion oft nicht vorgegeben sein kann. Daher ist es notwendig, aus Mess- und Beobachtungswerten möglichst einfache Funktionsgleichungen zu konstruieren, etwa durch Approximation, Interpolation oder Regression.

Man lässt zumeist die Variablen **stetig** variieren (auch Bruchteile von Produktionsgut sind zugelassen), auch dann, wenn **diskrete Zusammenhänge** zugrunde liegen. Das hängt damit zusammen, dass stetige Funktionen ein einfaches mathematisches Modell darstellen, das mithilfe der Differentialrechnung leicht zu behandeln ist. Bei der Interpretation ist allerdings Vorsicht geboten, wenn zB die Produktion aus nicht teilbaren Stücken besteht.

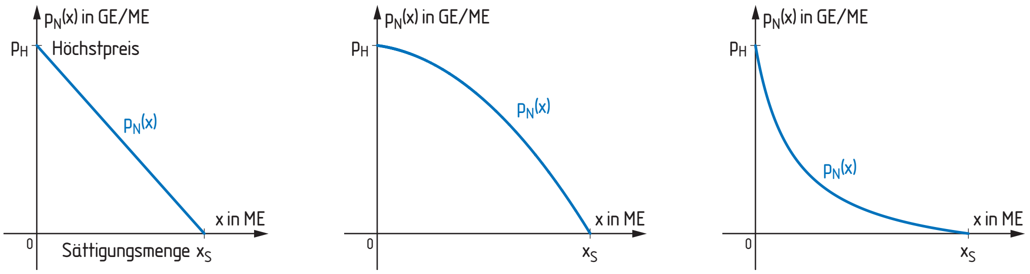
Folgende Funktionen werden häufig verwendet:

Nachfragefunktion und Preisfunktion der Nachfrage (Preis-Absatz-Funktion)

Die **Nachfragefunktion** gibt den Zusammenhang $\mathbf{x_N = x_N(p)}$ zwischen dem Preis p eines Produkts (in Geldeinheiten je Mengeneinheit, GE/ME) und der nachgefragten (abgesetzten) Menge x_N des Produkts (in Mengeneinheiten, ME) an. In den meisten Fällen setzt man voraus, dass die Funktion streng monoton fällt.

Da die abgesetzte Menge vom Preis abhängig ist ($x_N = x_N(p)$), müsste die x-Achse die Ordinatenachse sein. Man benützt jedoch oft die Umkehrfunktion der Nachfragefunktion ($p_N = p_N(x)$), die **Preisfunktion der Nachfrage** bzw. **Preis-Absatz-Funktion**. Der Vorteil liegt darin, dass man in diesem Fall zusammen mit anderen Funktionen (Kosten-, Erlös-, Umsatz-, Gewinnfunktionen), die x als unabhängige Variable haben, im selben Koordinatensystem bleiben und alles gemeinsam interpretieren kann.

Beispiele für Preis-Absatz-Funktionen:



Beim **Höchstpreis** $\mathbf{p_H}$ ist die nachgefragte Menge (theoretisch) null, beim Preis p = 0 ist die **Sättigungsmenge** $\mathbf{x_S}$ erreicht.

Angebotsfunktion und Preisfunktion des Angebots

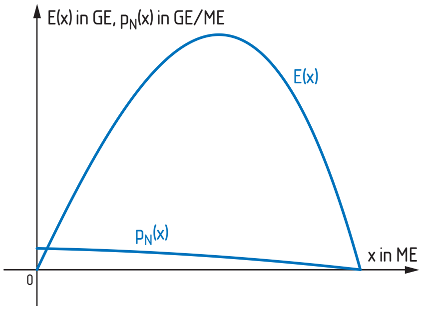
Die **Angebotsfunktion** gibt den Zusammenhang $\mathbf{x_A = x_A(p)}$ zwischen dem Preis p eines Produkts und der angebotenen Menge x_A des Produkts an.

In den meisten Fällen setzt man voraus, dass die Funktion streng monoton steigt, da der Produzent seine Angebotsmenge erhöhen wird, wenn der Marktpreis steigt.

Auch hier wird die Angebotsmenge x als unabhängige Variable betrachtet und auf der Abszissenachse abgetragen. Man betrachtet also in der Regel die Umkehrfunktion der Nachfragefunktion ($p_A = p_A(x)$), die **Preisfunktion des Angebots** genannt wird.

Erlösfunktion (Umsatzfunktion)

Sie gibt den Zusammenhang zwischen abgesetzter Menge x (in ME) sowie dem Preis p (in GE/ME) und dem Umsatz E (in GE) an. Das ist der Erlös aus der Sicht der Anbieter bzw. die Ausgaben aus der Sicht der Nachfrager.



Da zwischen dem Preis p, der Produktionsmenge x und dem Erlös E der Zusammenhang

Erlös = Menge mal Preis ($E = x \cdot p$)

besteht, kann, je nach Wahl der unabhängigen Variablen, E in Abhängigkeit von p oder von x dargestellt werden: $E(p) = x_N(p) \cdot p$ bzw. $E(x) = x \cdot p_N(x)$

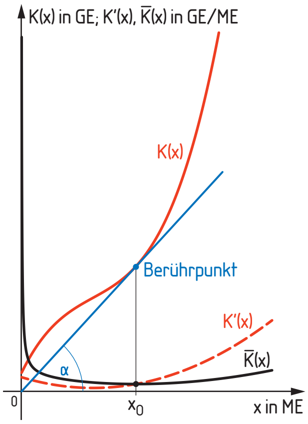
Kostenfunktionen (Gesamtkostenfunktion, Durchschnitts- bzw. Stückkostenfunktion)

Sie gibt den Zusammenhang $K = K(x)$ zwischen Output x (Produktionsmenge in ME) und den Gesamtkosten K (in GE) für die Produktion des Outputs x an.

Es ist üblich, die Gesamtkosten in die produktionsunabhängigen **fixen Kosten** $F = K(0) = \text{const.}$ und die von Art und Höhe der Produktion abhängigen **variablen Kosten** $K_v(x)$ zu zerlegen. Daraus ergibt sich die schon bekannte Funktion: $\mathbf{K(x) = K_v(x) + F}$.

Dividiert man die Gesamtkosten K(x) durch die Outputmenge x, erhält man die **Durchschnittskosten** (Stückkosten) $\overline{K}(x)$. Das sind jene Kosten, die **eine** Einheit der Produktionsmenge kostet: $\overline{K}(x) = \frac{K(x)}{x}$. $\overline{K}$ heißt **Stückkostenfunktion**.

Liegt der Graph der Gesamtkostenfunktion vor, lassen sich die Durchschnittskosten grafisch ermitteln:



Zeichnet man die Strecke vom Koordinatenursprung zum Punkt $(x|K(x))$, so gibt der Anstieg der Strecke, also $\tan(\alpha)$, die Stückkosten an: $\overline{K}(x) = \frac{K(x)}{x} = \tan(\alpha)$.

Dieser Sachverhalt lässt sich übrigens auf jede Durchschnittsfunktion anwenden.

Wenn die Stückkostenfunktion differenzierbar ist und innerhalb des Kapazitätsbereichs ein lokales Minimum besitzt, dann bezeichnet man die Stelle des **Stückkostenminimums x_O** als **Betriebsoptimum BO** ($\overline{K} = \min$).

Wir bilden $\overline{K}'(x) = \frac{K'(x) \cdot x - K(x)}{x^2} = 0$ (Bedingung für das Minimum).

Daraus folgt $K'(x) \cdot x - K(x) = 0$ und weiter $K'(x) = \frac{K(x)}{x} = \overline{K}(x)$.

> Im **Betriebsoptimum** sind die **Ableitung der Kostenfunktion** (später **Grenzkosten**) und die **Stückkosten** identisch.

Haben die durchschnittlichen variablen Kosten im Kapazitätsbereich ein lokales Minimum, dann bezeichnet man die Stelle des Minimums x_M als **Betriebsminimum BM** ($\overline{K}_v = \min$). Analog zum Betriebsoptimum folgt:

> Im **Betriebsminimum** sind die **Ableitung der Kostenfunktion** (später **Grenzkosten**) und die **variablen Durchschnittskosten** identisch.

Grundsätzlich gilt $x_M \leqslant x_O$.

Kosten- und Preistheorie

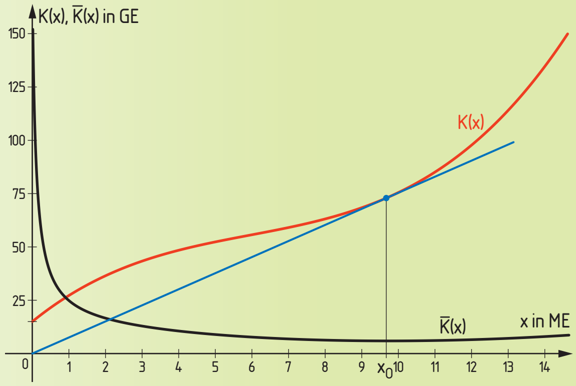
B **2.1** Berechne für die Kostenfunktion $K(x) = 0{,}1x^3 - 1{,}8x^2 + 14x + 15$ das Betriebsoptimum.

Lösung:
Gesamtkosten:
$K(x) = 0{,}1x^3 - 1{,}8x^2 + 14x + 15$

Stückkosten:
$\overline{K}(x) = \frac{K(x)}{x} = 0{,}1x^2 - 1{,}8x + 14 + \frac{15}{x}$

Berechnung des Minimums der Stückkosten:
$\overline{K}'(x) = 0{,}2x - 1{,}8 - \frac{15}{x^2} = 0$

Mithilfe von Technologieeinsatz bestimmen wir die einzige reelle Lösung dieser Gleichung: $x_O = 9{,}78...$



(Mithilfe der zweiten Ableitung lässt sich zeigen, dass es sich tatsächlich um ein Minimum handelt.)

Die zugehörigen (minimalen) Stückkosten betragen $\overline{K}(9{,}78...) = 7{,}49...$.

B **2.2** Berechne für die Kostenfunktion $K(x) = 0{,}1x^3 - 2{,}4x^2 + 30x + 640$ das Betriebsoptimum und das Betriebsminimum.

B **2.3** Berechne für die Kostenfunktion $K(x) = 0{,}5x^3 - 4{,}5x^2 + 22{,}5x + 84{,}5$ das Betriebsoptimum und das Betriebsminimum.

Gewinnfunktion

Sie gibt den Zusammenhang zwischen der Produktionsmenge x und dem zugehörigen Gewinn G an.

Es gilt die Beziehung $G(x) = E(x) - K(x)$, da sich der Gewinn als Differenz von Erlös und Kosten definiert.

Da der Erlös durch $E(x) = x \cdot p(x)$ gegeben ist, folgt $G(x) = x \cdot p(x) - K(x)$.

Dividiert man den Gesamtgewinn G(x) durch die Outputmenge x, erhält man den **durchschnittlichen Gesamtgewinn** (Stückgewinn) $\overline{G}(x)$, das ist jener Gewinn, den **eine** Einheit der Produktionsmenge liefert: $\overline{G}(x) = \frac{G(x)}{x}$.

Es folgt $\overline{G}(x) = \frac{E(x) - K(x)}{x} = p(x) - \overline{K}(x)$ (Stückgewinn = Preis – Stückkosten).

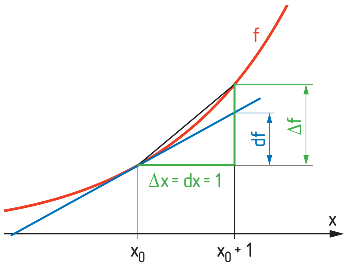
Berücksichtigt man nur den variablen Anteil der Kosten, so nennt man $\overline{G}_D(x) = p(x) - \overline{K}_v(x)$ den **Deckungsbeitrag** (je Stück).

Der gesamte Deckungsbeitrag ist dann die Differenz zwischen dem Gesamterlös und den gesamten variablen Kosten: $G_D(x) = E(x) - K_v(x)$.

B **2.4** Stelle für die Kostenfunktion $K(x) = x^3 - 11x^2 + 58x + 98$ und den Marktpreis $p = 56$ GE/ME für folgende Größen Funktionsgleichungen auf: Erlös, Gewinn, Stückgewinn, Deckungsbeitrag je Stück und Gesamtdeckungsbeitrag. Stelle die Kosten-, die Erlös- und die Gewinnfunktion grafisch dar.

B **2.5** Wie Aufgabe **2.4** für die Kostenfunktion $K(x) = 0{,}125x^2 + 2{,}5x + 21$ und die Preis-Absatz-Funktion $p_N(x) = 22 - 0{,}5x$.

2.2 Ökonomische Grenzfunktionen



Wir wollen uns nun die Frage stellen, wie sich eine Änderung der Produktionsmenge x um eine Einheit auf die genannten ökonomischen Funktionen auswirkt. Dazu betrachten wir wieder eine kleine Umgebung um x_0. Ändert man von x_0 ausgehend die unabhängige Variable um genau eine Einheit, dh. $\Delta x = dx = 1$, so ergibt sich der Tangentenanstieg $f'(x_0) = \frac{df}{dx} = \frac{df}{1} = df$.

Für $dx = 1$ stimmen die Zahlenwerte des Funktionsdifferenzials df und der 1. Ableitung also überein.

Da nun df ein guter Näherungswert für die wahre Funktionsänderung Δf ist, erhält man durch die 1. Ableitung $f'(x_0)$ einen guten Näherungswert für die Änderung Δf an der Stelle x_0, wenn $dx = 1$ gewählt wird.

Die Ableitungsfunktion f' liefert also die ungefähre Funktionsänderung, wenn x um eine Einheit variiert.

Derartige Ableitungsfunktionen sind ökonomisch bedeutsam und tragen die Bezeichnung **Grenzfunktionen (Marginalfunktionen)**.

> Die **Grenzfunktion (Marginalfunktion)** beschreibt die Änderung einer ökonomischen Funktion f, wenn die unabhängige Variable x um eine Einheit variiert. Sie kann durch die 1. Ableitung f' beschrieben werden. Der Wert $f'(x_0)$ der Grenzfunktion gibt näherungsweise den **Funktionszuwachs** (die **Funktionsabnahme**) an, der durch die nächste (oder letzte) **Einheit** der unabhängigen Variablen x hervorgerufen wird.

Man bezeichnet die Behandlung ökonomischer Fragestellungen mithilfe von Grenzfunktionen auch als **Marginalanalyse**.

Grenzkosten

Die 1. Ableitung $K'(x)$ einer Kostenfunktion $K(x)$ heißt **Grenzkostenfunktion**. Die Grenzkosten $K'(x)$ geben für jede Menge x die Kostenänderung für die letzte bzw. folgende produzierte Einheit an.

Werden die Gesamtkosten in variable und fixe Kosten getrennt ($K(x) = K_v(x) + F$), dann gilt $K'(x) = K_v'(x)$. Das bedeutet, dass die Änderung der Gesamtkosten für die letzte Produktionseinheit gleich der entsprechenden Änderung der variablen Kosten ist.

Analog berechnet man auch die **Grenz-Stückkostenfunktion** $\overline{K}'(x)$. Sie gibt die Änderung der gesamten Stückkosten pro zusätzlicher Produktionseinheit an.

Grenzerlös

Die 1. Ableitung $E'(x)$ der Erlösfunktion $E(x) = x \cdot p(x)$ (die unabhängige Variable ist die Menge x) heißt **Grenzerlösfunktion bezüglich der Menge x**. $E'(x)$ liefert die Erlösänderung, wenn sich die nachgefragte Menge um eine Einheit ändert.

Die 1. Ableitung $E'(p)$ der Erlösfunktion $E(p) = x(p) \cdot p$ (die unabhängige Variable ist der Preis p) heißt **Grenzerlösfunktion bezüglich des Preises p**. $E'(p)$ liefert die Erlösänderung, wenn sich der Preis um eine Einheit ändert.

Grenzgewinn

Die 1. Ableitung $G'(x)$ einer Gewinnfunktion $G(x)$ heißt **Grenzgewinnfunktion**. Der Grenzgewinn $G'(x)$ gibt die Gewinnänderung an, wenn die produzierte und abgesetzte Menge um eine Einheit zunimmt.

Da der Gewinn als Differenz zwischen Erlös und Kosten ($G(x) = E(x) - K(x)$) definiert ist, ergibt sich für den Grenzgewinn: $G'(x) = E'(x) - K'(x)$.

Der Grenzgewinn $G'(x)$ ist die Differenz aus Grenzerlös $E'(x)$ und Grenzkosten $K'(x)$.

BD TE **2.6** Zeige für die Kostenfunktion $K(x) = 0{,}01x^3 - 1{,}5x^2 + 77x + 640$ den Zusammenhang zwischen Grenzkosten und ***1)*** Betriebsoptimum ***2)*** Betriebsminimum.

Lösung:

1) Gesamtkosten: $K(x) = 0{,}01x^3 - 1{,}5x^2 + 77x + 640$

Grenzkosten: $K'(x) = 0{,}03x^2 - 3x + 77$

Stückkosten: $\overline{K}(x) = \frac{K(x)}{x} = 0{,}01x^2 - 1{,}5x + 77 + \frac{640}{x}$

Berechnung des Minimums der Stückkosten mithilfe von Technologieeinsatz:

$\overline{K}'(x) = 0{,}02x - 1{,}5 - \frac{640}{x^2} = 0 \;\Rightarrow\; x_O = 80$

Die zugehörigen (minimalen) Stückkosten betragen $\overline{K}(80) = 29$.

Für die Grenzkosten gilt an dieser Stelle: $K'(80) = 29$.

2) Variable Kosten: $K_v(x) = 0{,}01x^3 - 1{,}5x^2 + 77x$

Variable Durchschnittskosten: $\overline{K}_v(x) = \frac{K_v(x)}{x} = 0{,}01x^2 - 1{,}5x + 77$

Berechnung des Minimums der variablen Durchschnittskosten mithilfe von Technologieeinsatz: $\overline{K}_v'(x) = 0{,}02x - 1{,}5 = 0 \;\Rightarrow\; x_M = 75$

Die zugehörigen (minimalen) variablen Durchschnittskosten betragen $\overline{K}_v(75) = 20{,}75$.

Für die Grenzkosten gilt an dieser Stelle: $K'(75) = 20{,}75$.

TE BD **2.7** Wie Aufgabe **2.6** für die Kostenfunktion $K(x) = 0{,}01x^3 - 0{,}9x^2 + 130x + 5\,870$.

BC TE **2.8** Die Kostenfunktion eines Betriebs lautet $K(x) = 0{,}06x^3 - 2{,}1x^2 + 58x + 200$. Berechne die Grenzkostenfunktion und die Grenzkosten für die Outputmenge $x = 20$ ME. Was bedeutet das Ergebnis?

Lösung:

Die Grenzkostenfunktion lautet $K'(x) = 0{,}18x^2 - 4{,}2x + 58$.

Die Grenzkosten für die Outputmenge 20 ME betragen $K'(20) = 46$ GE.

Wird die Produktion, ausgehend von $x = 20$ ME, um eine Mengeneinheit erhöht (vermindert), entstehen Mehrkosten (Minderkosten) von 46 GE.

TE BC **2.9** Berechne für die Kostenfunktion $K(x) = 0{,}06x^3 - 2{,}1x^2 + 58x + 200$ die Grenz-Stückkostenfunktion sowie die Grenz-Stückkosten für $x = 20$ ME und interpretiere das Ergebnis.

TE BC **2.10** Die Preis-Absatz-Funktion für ein Produkt lautet $p_N(x) = 20e^{-0{,}2x}$. Berechne den Grenzerlös für $x = 40$ ME und interpretiere das Ergebnis.

BC TE **2.11** Berechne für die Kostenfunktion $K(x) = 0{,}06x^2 + x + 400$ und die Preis-Absatz-Funktion $p_N(x) = 21 - 0{,}09x$ den Grenzgewinn für $x = 40$ ME und interpretiere das Ergebnis.

2.3 Ökonomische Probleme und Lösungen

Mithilfe der Differenzialrechnung lassen sich schnell detaillierte Aussagen über ökonomische Sachverhalte treffen. Wichtig ist, die Abhängigkeit der ökonomischen Größen in ein mathematisches Modell umzusetzen bzw. ein mathematisches Modell ökonomisch zu deuten.

Beschreibung des Wachstumsverhaltens von Gesamtkostenfunktionen

Aus den Vorzeichen von $f'(x)$ und $f''(x)$ lässt sich bereits etwas über das Wachstumsverhalten einer Funktion aussagen:

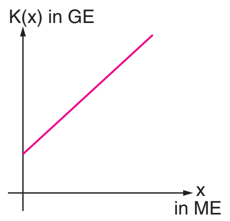
Mit $f'(x) > 0$ wächst die Funktion f(x); mit $f''(x) > 0$ wächst die Funktion $f'(x)$, dh. die Funktion f(x) wächst mit steigenden Zuwächsen.

Mit $f'(x) > 0$ wächst die Funktion f(x); mit $f''(x) < 0$ fällt die Funktion $f'(x)$, dh. die Funktion f(x) wächst mit fallenden Zuwächsen.

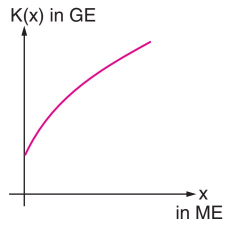
Eine Gesamtkostenfunktion K(x) sollte mit zunehmender Produktion x steigen, was bedeutet, dass die erste Ableitung $f'(x) > 0$ sein muss.

Wir unterscheiden folgende Kostenverläufe:

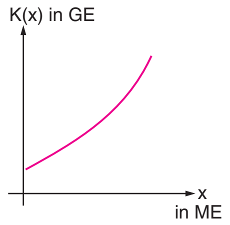
Linearer Kostenverlauf: Die Kosten wachsen proportional zur Stückzahl. Es gilt $K'(x) > 0$ und $K''(x) = 0$.



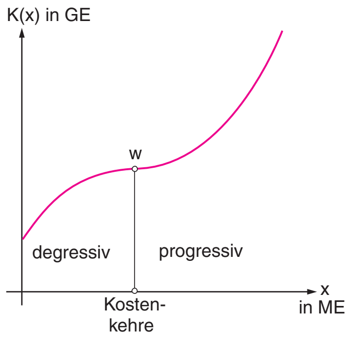
Degressiver Kostenverlauf: Die Kosten wachsen verhältnismäßig langsamer als die Stückzahl. (latein: „degredi" = hinabsteigen)
Es gilt $K'(x) > 0$ und $K''(x) < 0$.



Progressiver Kostenverlauf: Die Kosten wachsen verhältnismäßig schneller als die Stückzahl. (latein: „progressus" = Fortschritt)
Es gilt $K'(x) > 0$ und $K''(x) > 0$.



Ertragsgesetzlicher Kostenverlauf: Es erfolgt zuerst eine degressive Zunahme, zB durch eine rationellere Arbeitsweise, dann hingegen eine progressive Zunahme, zB durch eine höhere Abnutzung der Maschinen bzw. durch teurere Personalkosten wegen zusätzlicher Überstunden. Der Graph der Kostenfunktion zeigt einen s-förmigen Verlauf. Der Übergang vom degressiven zum progressiven Kostenverlauf wird als **Kostenkehre x_K** bezeichnet und entspricht dem Wendepunkt der Kostenfunktion. An dieser Stelle gilt:
$K''(x) = 0$ und $K'''(x) \neq 0$.



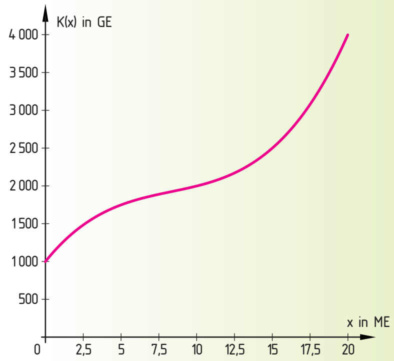
BC

2.12 Untersuche den Verlauf der Kostenfunktion $K(x) = x^3 - 25x^2 + 250x + 1\,000$.

1) Stelle diese Kostenfunktion im Intervall [0; 20] grafisch dar.
2) Gib die Gleichung der Grenzkostenfunktion an.
3) Wo liegt die Kostenkehre?
4) An welcher Stelle hat die Kostenfunktion ihren minimalen Anstieg?
5) In welchem Produktionsbereich ist der Kostenverlauf degressiv, in welchem progressiv?
6) Was bewirkt eine Erhöhung der Fixkosten am Funktionsgraphen?

Lösung:

1) Funktionsgraph:



2) $K'(x) = 3x^2 - 50x + 250$ ● Grenzkostenfunktion $\triangleq$ 1. Ableitung

3) $K''(x) = 6x - 50$ ● Kostenkehre $\triangleq$ Wendepunkt von K(x)
$K''(x) = 0 \;\Rightarrow\; 6x - 50 = 0 \;\Rightarrow\; x_K = 8,\dot{3}$
Die Kostenkehre tritt bei rund 8,33 ME ein.

4) $K(x) = x^3 - 25x^2 + 250x + 1\,000$ ● Der Funktionsgraph ist monoton steigend.
$K'(x) = 3x^2 - 50x + 250$ ● minimaler Anstieg $\triangleq$ Minimum der Funktion $K'(x)$
$K''(x) = 6x - 50 = 0 \;\Rightarrow\; x_K = 8,\dot{3}$
$K'''(8,\dot{3}) > 0$ ... Minimum
Der geringste Anstieg wird bei der Kostenkehre erreicht.

5) degressiver Kostenverlauf: $x \in [0; 8,\dot{3}[$
progressiver Kostenverlauf: $x \in \,]8,\dot{3}; 20]$

6) Die Höhe der Fixkosten ist am konstanten Glied 1 000 abzulesen.
Eine Erhöhung der Fixkosten bewirkt eine Verschiebung des Graphen der Kostenfunktion K(x) in die positive y-Richtung.

2.13 ***1)*** Ermittle aus folgenden Daten die Gleichung einer Kostenfunktion $K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$:

x in ME	20	60	120	140
K(x) in GE	64 480,00	74 080,00	146 080,00	195 040,00

2) Ermittle die Gleichung der Grenzkostenfunktion.

AB TE

2.14 Eine Kostenfunktion $K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ weist bei 10 ME die Kostenkehre auf. Die Grenzkosten liegen bei der Kostenkehre in einer Höhe von 100,00 GE. Die Gesamtkosten bei einer Produktionsmenge von 50 ME liegen bei 71 200,00 GE. Die Fixkosten sind 1 200,00 GE.

1) Ermittle die Gleichung der Kostenfunktion K(x).
2) Ermittle die Gleichung der Grenzkostenfunktion K′(x).

AB TE

2.15 Von einer Kostenfunktion $K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ kennt man folgende Werte:
$K(0) = 360\,000$; $K'(0) = 2\,000$; $K(10) = 379\,220$; $K''(10) = -14{,}8$

1) Formuliere diese vier Angaben in eigenen Worten.
2) Ermittle die Gleichung der Kostenfunktion K(x).

BD TE

2.16 Von einer Kostenfunktion $K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ betragen die Fixkosten 250,00 GE. Weiters sind für bestimmte Mengen die entsprechenden Gesamtkosten bekannt:

x in ME	10	20	25
K(x) in GE	302,00	336,00	350,00

1) Ermittle die Gleichung dieser Kostenfunktion.
2) Ermittle die Gleichung der Grenzkostenfunktion K′(x).
3) Bei welcher Produktionsmenge x_K liegt die Kostenkehre?

AB TE

2.17 Die Kostenkehre einer Kostenfunktion $K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ liegt bei $x_K = 18$ ME. Die Grenzkosten an dieser Stelle betragen 1 026,00 GE, die Stückkosten 2 025,00 GE. Der Betrieb hat mit Fixkosten von 12 150,00 GE zu rechnen. Gib die Gleichung der Kostenfunktion K(x) an.

AB TE

2.18 Nach der Beobachtung der Produktionskosten eines Betriebs kennt man folgendes Datenmaterial:

x in ME	100	120	130	150
K(x) in GE	12 900,00	15 512,00	17 025,00	20 525,00

1) Ermittle die Gleichung einer Kostenfunktion $K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.
2) Wie hoch sind die Fixkosten?

AB TE

2.19 Die ertragsgesetzliche Kostenfunktion K(x) muss folgende Eigenschaften aufweisen:
– K(x) muss für $x \geqslant 0$ monoton steigend sein.
– K(x) darf keine Extremwerte haben.
– Im ersten Quadranten muss die Kostenfunktion einen konkav-konvexen Wendepunkt besitzen.
– Es existieren positive (oder verschwindende) Fixkosten.

K(x) genüge einem Polynom dritter Ordnung: $K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.
Versuche durch Probieren an deinem Rechenwerkzeug herauszufinden, welche Bedingungen für die Koeffizienten a, b, c und d erfüllt sein müssen.

BC TE

Kosten- und Preistheorie

Gewinnmaximierung

Das Streben nach maximalem Gewinn ist ein wesentliches ökonomisches Prinzip.
Die Idee der mathematischen Gewinnanalyse soll an einem Ein-Produkt-Unternehmen gezeigt werden.

Zwei (extreme) Marktformen sind hier interessant:

1. Die **vollständige Konkurrenz (Polypol)**: Es gibt viele Anbieter, viele Nachfrager und der Marktpreis p ist aus der Sicht des einzelnen Anbieters eine gegebene Konstante. Der Preis ergibt sich aus Angebot und Nachfrage.

> Der Schnittpunkt zwischen Angebotsfunktion $x_A(p)$ und Nachfragefunktion $x_N(p)$ bzw. zwischen Preisfunktion des Angebots $p_A(x)$ und Preis-Absatz-Funktion $p_N(x)$ wird als **Marktgleichgewicht** bezeichnet. Er gibt die **Gleichgewichtsmenge** und den **Gleichgewichtspreis** an.

2. Das **Angebotsmonopol (Monopol)**: Es gibt einen Anbieter, viele Nachfrager und für den Anbieter existiert eine monoton fallende Preis-Absatz-Funktion $p_N = p_N(x)$, die der Unkehrfunktion der Nachfragefunktion des Markts entspricht.

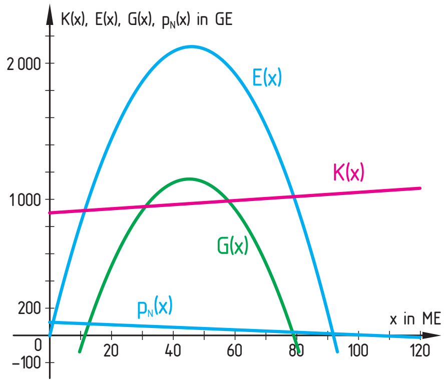
Ein Gewinn eines Unternehmens ergibt sich aus der Differenz zwischen Erlösen und Kosten und wird somit als Funktionsterm $G(x) = E(x) - K(x)$ beschrieben.

Jene Produktionsmenge, bei der der Erlös gerade die Gesamtkosten deckt, wird als **Gewinnschwelle** (**„Break-Even-Point“**, engl. to break even = ausgleichen, ungeschoren davon kommen) bezeichnet. Sind nur ganzzahlige Produktionsmengen (zB Stück) möglich, ist die Gewinnschwelle immer aufzurunden.

Da abhängig vom Kostenverlauf bei größeren Produktionsmengen die gestiegenen Kosten die Erlöse wieder übertreffen können, spricht man bei der oberen Grenze des Gewinnbereichs von der **Gewinngrenze**. Sind nur ganzzahlige Produktionsmengen (zB Stück) möglich, ist die Gewinngrenze immer abzurunden.

Beide Werte, Gewinnschwelle und Gewinngrenze, sind die Nullstellen der Gewinnfunktion.

Für ein Unternehmen von großem Interesse ist natürlich jene Produktionsmenge x_C, bei welcher **maximaler Gewinn** erzielt wird, diese entspricht dem Maximum der Gewinnfunktion.



Ein in der Kosten- und Preistheorie charakteristischer Punkt der Preis-Absatz-Funktion $p_N(x)$ ist der **Cournot'sche Punkt** $C(x_C|p_N(x_C))$, benannt nach Antoine A. Cournot (französischer Wirtschaftstheoretiker, 1801 – 1877).

Die Koordinaten dieses Punkts entsprechen der gewinnmaximalen Menge und dem zugehörigen Preis.

Auf den nächsten drei Seiten zeigen wir die verschiedenen Arten der Berechnung des Gewinnmaximums für vollständige Konkurrenz und Angebotsmonopol sowie für den Sonderfall einer linearen Gewinnfunktion, bei der der maximale Gewinn an der Kapazitätsgrenze liegt.

ABC

2.20 Ein Betrieb folgt der ertragsgesetzlichen Kostenfunktion
$K(x) = 0{,}5x^3 - 4{,}5x^2 + 22{,}5x + 84{,}5$.
Das erzeugte Produkt kann zum festen Marktpreis von p = 42 GE/ME abgesetzt werden.
1) Wie lautet die Umsatzfunktion E(x)?
2) Wie lautet die Gewinnfunktion G(x)?
3) Bei welchen Mengen liegen der Break-Even-Point und die Gewinngrenze?
4) Bei welcher Produktionsmenge wird der Gewinn maximal? Wie hoch ist dieser maximale Gewinn?
5) Stelle Kosten-, Erlös- und Gewinnfunktion in einem Koordinatensystem dar.
6) Beschreibe die Zusammenhänge zwischen den Schnittpunkten von E(x) und K(x) und der Gewinnfunktion G(x).

Lösung:

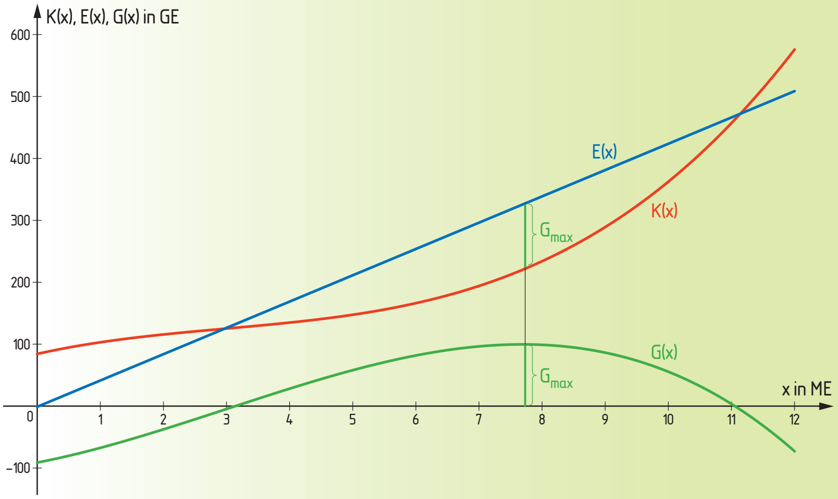
1) $E(x) = 42x$

2) $G(x) = 42x - (0{,}5x^3 - 4{,}5x^2 + 22{,}5x + 84{,}5) = -0{,}5x^3 + 4{,}5x^2 + 19{,}5x - 84{,}5$

3) Wir berechnen die Nullstellen der Gewinnfunktion mithilfe von Technologieeinsatz. Die Lösungen der Gleichung $-0{,}5x^3 + 4{,}5x^2 + 19{,}5x - 84{,}5 = 0$ sind $x_1 = 2{,}97$ ME sowie $x_2 = 11{,}14$ ME; die dritte Lösung ist negativ und daher nicht relevant.
Der Break-Even-Point liegt daher bei 2,97 ME und die Gewinngrenze bei 11,14 ME.

4) Um das Gewinnmaximum zu ermitteln, setzen wir $G'(x) = E'(x) - K'(x) = 0$, woraus $E'(x) = K'(x)$ (Grenzerlös = Grenzkosten) folgt. Wegen des zu erwartenden Maximums muss $G''(x) = E''(x) - K''(x) < 0$ oder $E''(x) < K''(x)$ sein.
Wir lösen $G'(x) = -1{,}5x^2 + 9x + 19{,}5x = 0$ mithilfe von Technologieeinsatz und erhalten $x_1 = 7{,}69$ ME ($x_2 = -1{,}69$ ist negativ).
Der Gewinn an dieser Stelle beträgt G(7,69) = 104,19 GE.
Da $G''(7{,}69) < 0$ ist, liegt ein Maximum vor.
Der maximale Gewinn liegt bei einer Produktionsmenge von 7,69 ME; er beträgt 104,19 GE.

5)



6) Die Schnittpunkte von E(x) und K(x) entsprechen den Nullstellen von G(x), dem Break-Even-Point und der Gewinngrenze.

BC

2.21 Der Betrieb mit der Kostenfunktion $K(x) = 0{,}5x^3 - 4{,}5x^2 + 22{,}5x + 84{,}5$ (siehe **2.20**) hat sich zum Monopolbetrieb gemausert.
Für die Nachfrage des Markts wurde die Preis-Absatz-Funktion $p_N(x) = 143 - 10{,}2x$ ermittelt.

1) Wie lautet jetzt die Umsatzfunktion E(x)?
2) Wie lautet jetzt die Gewinnfunktion G(x)?
3) Bei welchen Mengen liegen jetzt der Break-Even-Point und die Gewinngrenze?
4) Bei welcher Produktionsmenge wird jetzt der Gewinn maximal? Wie hoch ist der zugehörige Preis? Gib den Cournot'schen Punkt und den maximalen Gewinn an.
5) Stelle Kosten-, Erlös- und Gewinnfunktion in einem Koordinatensystem dar.
6) Beschreibe die Zusammenhänge zwischen den Schnittpunkten von E(x) und K(x) und der Gewinnfunktion G(x).

Lösung:

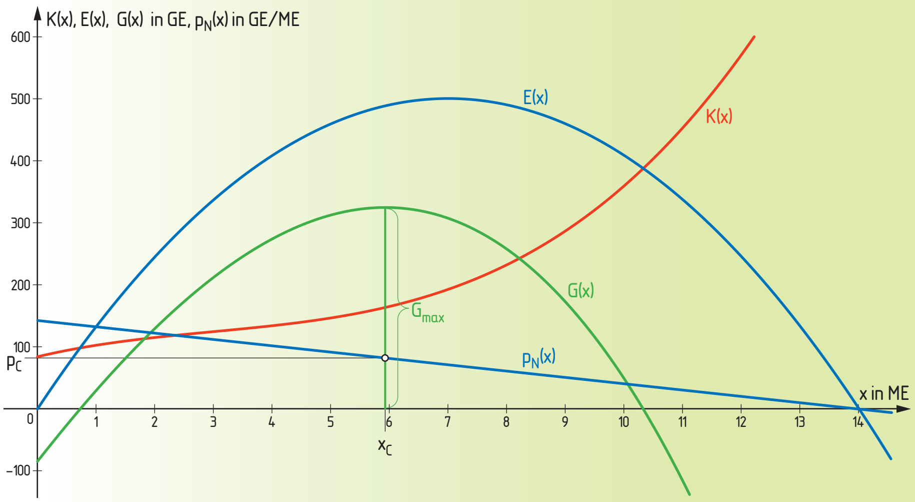
1) $E(x) = 143x - 10{,}2x^2$

2) $G(x) = 143x - 10{,}2x^2 - (0{,}5x^3 - 4{,}5x^2 + 22{,}5x + 84{,}5) = -0{,}5x^3 - 5{,}7x^2 + 120{,}5x - 84{,}5$

3) Wir berechnen die Nullstellen der Gewinnfunktion mithilfe von Technologieeinsatz. Die Lösungen der Gleichung $-0{,}5x^3 - 5{,}7x^2 + 120{,}5x - 84 = 0$ sind $x_1 = 0{,}73$ ME und $x_2 = 10{,}34$ ME; die dritte Lösung ist negativ und daher nicht relevant.
Der Break-Even-Point liegt jetzt bei 0,73 ME und die Gewinngrenze bei 10,34 ME.

4) Um das Gewinnmaximum zu ermitteln, lösen wir $G'(x) = -1{,}5x^2 - 11{,}4x + 120{,}5 = 0$ mithilfe von Technologieeinsatz und erhalten $x_1 = 5{,}94$ ME ($x_2 = -13{,}54$ ist negativ).
Der Gewinn an dieser Stelle beträgt $G(5{,}94) = 325{,}36$ GE.
Da $G''(5{,}94) < 0$ ist, liegt ein Maximum vor.
Der zugehörige Preis beträgt $p(5{,}94) = 82{,}41$ GE/ME.
Der Punkt mit den Koordinaten C(gewinnmaximale Menge|zugehöriger Preis) wird als Cournot'scher Punkt bezeichnet: C(5,94|82,41).
Der maximale Gewinn liegt jetzt bei einer Produktionsmenge von 5,94 ME;
er wird bei einem Verkaufspreis von 82,41 GE/ME erzielt und beträgt 325,36 GE.

5)



6) Auch bei einem Monopolbetrieb entsprechen die Schnittpunkte von E(x) und K(x) den Nullstellen von G(x), dem Break-Even-Point und der Gewinngrenze.

2.22 Ein anderes Unternehmen produziert mit der linearen Kostenfunktion K(x) = 2,5x + 85. Die Kapazitätsgrenze beträgt x = 60 ME. Die Ware wird zum festen Marktpreis von p = 6 GE/ME abgesetzt.

B TE

1) Wie lautet die Umsatzfunktion E(x)?
2) Wie lautet die Gewinnfunktion G(x)?
3) Bei welcher Produktionsmenge wird der Gewinn maximal? Wie hoch ist dieser maximale Gewinn?
4) Stelle Kosten-, Erlös- und Gewinnfunktion in einem Koordinatensystem dar.

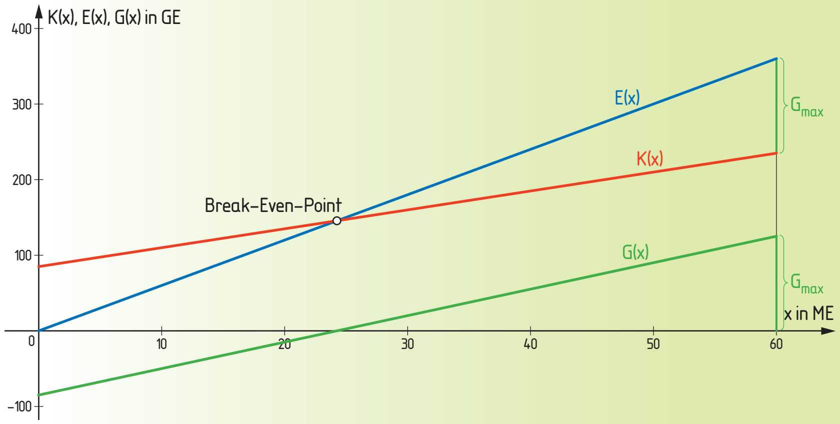
Lösung:

1) $E(x) = 6x$

2) $G(x) = 6x - (2{,}5x + 85) = 3{,}5x - 85$

3) Da die Gewinnfunktion linear ansteigt, kann sie kein lokales Maximum haben. Der Gewinn wird aber an der Kapazitätsgrenze maximal. Es handelt sich um ein Randmaximum (globales Maximum).
Damit der Gewinn positiv ist, muss der Break-Even-Point (x-Wert des Schnittpunkts von Erlös- und Kostenfunktion) innerhalb des Produktionsintervalls liegen.
Das ist für $E(x) = K(x) \;\Rightarrow\; 6x = 2{,}5x + 85 \;\Rightarrow\; x = 24{,}28$ ME der Fall.
Für das Unternehmen beträgt der maximale Gewinn G(60) = 125 GE.

4)



2.23 Berechne für die Kostenfunktion $K(x) = 0{,}1x^3 - 1{,}8x^2 + 14x + 17$ und den Marktpreis p = 10,5 GE/ME die Gewinnzone und den maximalen Gewinn.

B TE

2.24 Wie Aufgabe **2.23** für die Kostenfunktion $K(x) = 0{,}077\,6x^2 + 7{,}074\,8x + 40$ und den Marktpreis p = 17 GE/ME.

B TE

2.25 Die Kosten und die Nachfrage eines Monopolbetriebs sind durch folgende Funktionsgleichungen bestimmt: $K(x) = 0{,}1x^3 - 2x^2 + 25x + 1\,450$, $p_N(x) = 200 - 4x$.
1) Berechne den Gewinnbereich.
2) Bestimme den Cournot'schen Punkt und den maximalen Gewinn.

B TE

AB TE **2.26** Eine Unternehmerin mit Monopolstellung weiß aus langfristiger Marktbeobachtung, dass sie von ihrem Produkt bei einem Preis von 20,00 € 1 850 Stück absetzen kann. Wenn sie den Preis auf 18,00 € reduziert, erhöhen sich die Verkaufszahlen um 50 ME. Die lineare Kostenfunktion dieses Betriebs setzt sich aus Fixkosten von 8 000,00 € und variablen Kosten von 1,50 €/ME zusammen.
Bei welchem Preis ist der Gewinn maximal?

AB TE **2.27** Man weiß von einem Betrieb, dass die Gesamtkosten bei einer Produktion von 150 ME 1 650,00 GE betragen. Steigert man die Produktion um 50 ME, so steigen die Kosten um 300,00 GE. Der Gleichgewichtspreis, um welchen das Produkt verkauft werden kann, liegt bei 8,90 GE.

1) Ermittle die lineare Gesamtkostenfunktion.
2) Innerhalb welchen Bereichs liegt die Gewinnzone?
3) Stelle die Kosten-, Erlös- und Gewinnfunktion in einem gemeinsamen Koordinatensystem grafisch dar.

BD TE **2.28** Ein Produktionsbetrieb arbeitet mit der Kostenfunktion $K(x) = 0{,}1x^3 - x^2 + 4x + 5$.

1) Berechne jene Produktionsmenge x, bei der der Betrieb zum Grenzbetrieb wird, wenn also zum Preis der minimalen Stückkosten produziert wird.
2) Berechne die Stückkosten und die Gesamtkosten an dieser Stelle.
3) Zeige grafisch, dass jene Tangente, die man im Betriebsoptimum an die Kostenfunktion legt, durch den Ursprung verläuft.

AB TE **2.29** Ein Betrieb arbeitet als monopolistischer Anbieter mit einer Gewinnfunktion von $G(x) = -x^3 + 20x^2 + 40x - 1\,200$. Von der Nachfragesituation weiß man, dass sie durch eine lineare Funktion modelliert werden kann. Sie weist einen Höchstpreis p_H von 500,00 GE sowie eine Sättigungsmenge x_S von $\frac{500}{3}$ ME auf.
Bestimme den Cournot'schen Punkt sowie den maximalen Gewinn.

AB TE **2.30** Ein in seiner Region konkurrenzloser Hotelier kann die Gästezahl durch seine Preisgestaltung derart beeinflussen, dass er bei einem Übernachtungspreis von 280,00 € pro Bett mit 50 gebuchten Betten rechnen kann, jede Preiserhöhung um 15,00 € würde jedoch zu einem Rückgang der Nachfrage um eine Einheit (ein Bett) führen. Der Hotelier geht von einem linearen Kostenfunktionsmodell mit Fixkosten von 7 000,00 € und variablen Kosten von 150,00 € pro Bett aus.
Bei welchem Preis kann er seinen maximalen Gewinn erzielen?

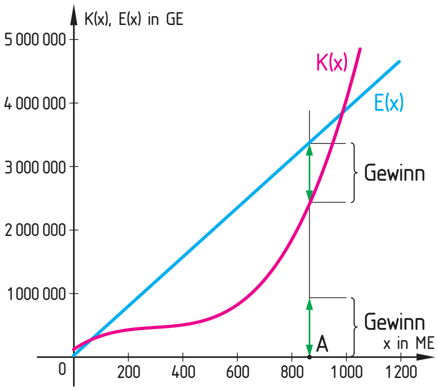
AB TE **2.31** Die variablen Kosten pro Stück einer Ware werden von einem Unternehmen mit 45,00 GE kalkuliert. Die Fixkosten liegen bei 15 000,00 GE. Bei der erreichten Kapazität von 1 000 ME soll ein Gewinn von 40 000,00 GE erreicht werden.
Um welchen Preis muss das Produkt verkauft werden?

AB TE **2.32** Ein Betrieb erreicht sein Betriebsminimum bei 150 ME und sein Betriebsoptimum bei 300 ME und muss mit Fixkosten von 54 000,00 GE rechnen. Es ist bekannt, dass der Betrieb bei einem Preis von 740,00 GE zum Grenzbetrieb wird.

1) Ermittle die kubische Kostenfunktion.
2) Wie hoch ist der Gewinn an der Stelle der minimalen Stückkosten, wenn jede Mengeneinheit zu einem Preis von 1 020,00 GE verkauft werden kann?
3) Wo liegen die Grenzen, innerhalb welcher der Betrieb mit Gewinn arbeitet?

2.33 Einer deiner Bekannten möchte eine Firma gründen. Zuvor hat der Jungunternehmer eine Unternehmensberatung beauftragt, die Voraussetzungen, die Risiken, die Chancen und Gefahren, die ihn erwarten, ein wenig zu recherchieren. **BCD**

Die Unternehmensberaterin hat alle Kosten K(x), die bei der Produktion anfallen werden, den möglichen Erlösen E(x) gegenübergestellt. Die folgende Grafik wird dem Jungunternehmer vorgelegt. Er fragt dich nach deiner Interpretation der Grafik. Kosten K(x) und Erlös E(x) hängen von der produzierten Stückzahl x ab. Untersuche mithilfe der Grafik die Eigenschaften der Erlösfunktion.



1) Welche Eigenschaften hat die Erlösfunktion bezüglich der Werte k und d?

2) Wie könntest du (bei entsprechender Vergrößerung) aus dem Graphen ablesen, welcher Preis pro Mengeneinheit (Stück) erzielt wird? Wie kannst du dies aus dem Funktionsterm ablesen?

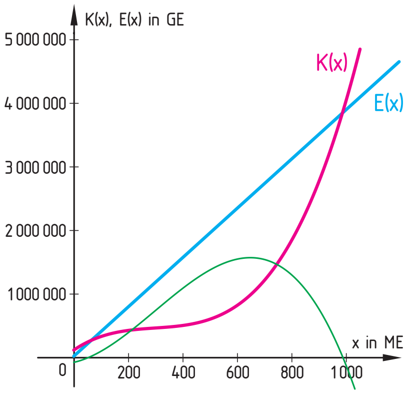
3) An welchen Stellen schneiden sich Erlös- und Kostenfunktion? Wie lassen sich diese Stellen interpretieren?

In der Grafik ist an der Stelle A der Gewinn G(x) eingezeichnet. Durch Verschieben des Punkts A entlang der x-Achse kann der jeweilige Gewinn dargestellt werden.

4) Wie hängen die Schnittpunkte von Erlös- und Kostenfunktion mit der Gewinnfunktion zusammen?

5) Innerhalb welcher Produktionsmengen (Stückzahlen) liegt die Gewinnzone?

6) Wie groß sollte die Kapazität des Betriebs zumindest sein, dh wie viele Stück muss der Betrieb mindestens erzeugen, um überhaupt den Gewinnbereich zu erreichen?



2.34 Die Marktsituation zeigt einen linearen Zusammenhang zwischen dem Preis eines Produkts und der nachgefragten Menge, so dass bei einem Preis von 6,70 GE insgesamt 1 500 Stück verkauft werden können. Erhöht man den Preis um 0,40 GE, so reduziert sich die nachgefragte Menge um 300 Stück. **ABCD** **TE**

1) Bestimme die Preis-Absatz-Funktion sowie die Gewinnfunktion, falls der Monopolbetrieb mit einer linearen Kostenfunktion von $K(x) = 5x + 2\,000$ arbeitet.
2) Ermittle grafisch und rechnerisch die Grenzen der Gewinnzone.
3) Welche Unterschiede kannst du zum Modell mit fixem Verkaufspreis feststellen?
4) Begründe, unter welchen Voraussetzungen die Gewinnzone nach oben unbegrenzt ist und unter welchen Bedingungen sie auch nach oben hin begrenzt ist?

Elastizität ökonomischer Funktionen

Die Elastizität ε ist ein Maß für das Änderungsverhalten (ökonomischer) Größen, die durch einen funktionalen Zusammenhang miteinander verbunden sind. Man spricht dann zB von Preiselastizität (der Nachfrage), Erlöselastizität, Gewinnelastizität etc.

Die Elastizität ε gibt an, wie sich eine **relative Änderung** der unabhängigen Variable *x* einer Funktion f auf die **relative Änderung** des Funktionswerts f(x) auswirkt.

Am Beispiel der Preiselastizität der Nachfrage bedeutet das: Um wieviel Prozent ändert sich die Nachfrage(funktion), also die nachgefragte Menge, wenn der Preis um 1 % verändert wird?

Allgemein können wir definieren:

Es sei die Funktion $y = f(x)$ gegeben. Ändert man im Punkt $(x_0|f(x_0))$ die unabhängige Variable x um Δx, so ändert sich der Funktionswert f um Δf ($\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$).

Das Verhältnis ε der **relativen Änderungen** $\frac{\Delta f}{f(x_0)}$ und $\frac{\Delta x}{x_0}$, $\varepsilon = \frac{\frac{\Delta f}{f(x_0)}}{\frac{\Delta x}{x_0}} = \frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot \frac{x_0}{f(x_0)}$, heißt

(Bogen-)Elastizität von f bezüglich x im Intervall $[x_0; x_0 + \Delta x]$.

Die (Bogen-)Elastizität erweist sich allerdings als unhandlich, sodass man analog zum Übergang vom Differenzenquotienten zum Differenzialquotienten auch bei der Elastizität anstelle der Differenzen Δf, Δx die Differenziale df, dx verwendet.

Ist f eine differenzierbare Funktion der unabhängigen Variablen x, so lässt sich der Grenzübergang $\Delta x \to 0$ durchführen.

Das Verhältnis ε der relativen Änderungen $\frac{df}{f(x_0)}$ und $\frac{dx}{x_0}$, $\varepsilon = \frac{\frac{df}{f(x_0)}}{\frac{dx}{x_0}}$ $(x_0 \neq 0, f(x_0) \neq 0)$, heißt

(Punkt-)Elastizität von f bezüglich x an der Stelle x_0.

Die Punktelastizität nähert sich der Bogenelastizität umso mehr an, je kleiner $\Delta x = dx$ gewählt wird.

Der Wert der Punktelastizität ε von f bezüglich x liefert für lineare Funktionen exakte Aussagen, für alle anderen Funktionen gibt er (näherungsweise) an, wie sehr sich die abhängige Variable f prozentuell ändert, wenn sich die unabhängige Variable x um 1 % ändert.

Das Vorzeichen der Elastizität spielt dabei eine wesentliche Rolle:
- Ist ε positiv, dann bewirkt eine relative Zunahme (Abnahme) von x eine relative Zunahme (Abnahme) von f. Das ist zB bei Angebotsfunktionen der Fall.
- Ist ε negativ, dann bewirkt eine relative Zunahme (Abnahme) von x eine relative Abnahme (Zunahme) von f. Das ist zB bei Nachfragefunktionen der Fall.

Die Berechnung der (Punkt-)Elastizität wird durch folgende Umformung erleichtert:

$$\varepsilon = \frac{\frac{df}{f(x_0)}}{\frac{dx}{x_0}} = \frac{df}{f(x_0)} \cdot \frac{x_0}{dx} = \frac{df}{dx} \cdot \frac{x_0}{f(x_0)} = f'(x_0) \cdot \frac{x_0}{f(x_0)}$$

Die Formel zur einfachen Berechnung der (Punkt-)Elastizität lautet $\varepsilon = f'(x_0) \cdot \frac{x_0}{f(x_0)}$.

Am Beispiel der **Nachfragefunktion $x_N(p)$** lässt sich ε folgendermaßen interpretieren:

$|\varepsilon| = 1$: Die Nachfrage ist **fließend** (proportional elastisch, 1-elastisch), da eine 1%ige Preisänderung eine 1%ige Mengenänderung des Absatzes nach sich zieht.

$|\varepsilon| > 1$: Die Nachfrage ist **elastisch**, dh. die prozentuelle Änderung der Nachfrage ist stärker als die des Preises. Eine Preisänderung hat also eine starke Wirkung auf die Nachfrage.

$|\varepsilon| < 1$: Die Nachfrage ist **unelastisch**, dh. die prozentuelle Änderung der Nachfrage ist geringer als die des Preises. Eine Preisänderung hat also eine schwache Wirkung auf die Nachfrage.

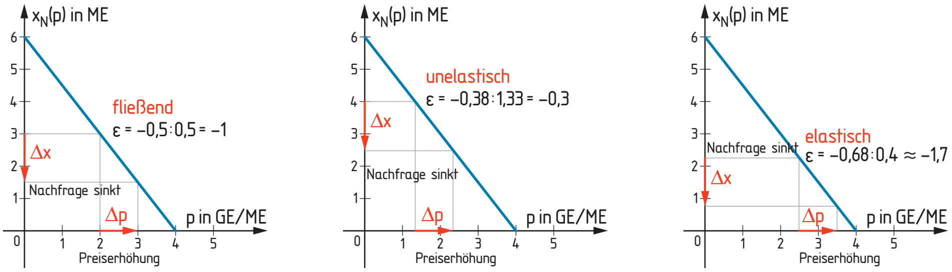
$|\varepsilon| = 0$: Die Nachfrage ist **vollkommen unelastisch** (starr), da eine Preisänderung keine Reaktion der Nachfrage mit sich bringt.

$|\varepsilon| = \infty$: Die Nachfrage ist **vollkommen elastisch**. Das bedeutet, dass eine minimale Preisänderung eine unendlich große Änderung der Nachfrage bewirkt.

Wichtiger Hinweis: Beachte bei der Berechnung der Elastizität immer, welche Größe die **abhängige Variable** darstellt. Es ist zB häufig die Preisfunktion der Nachfrage p_N gegeben. In diesem Fall ist **p** die abhängige Variable, die sich ändert, wenn sich die Nachfrage ändert.
Ist aber die **Preiselastizität der Nachfrage** gesucht, dann muss zuerst die Nachfragefunktion x_N berechnet werden, da diese Funktion die nachgefragte Menge **in Abhängigkeit vom Preis** angibt!

Die Preiselastizität der Nachfrage berechnen wir daher mit :

$$\varepsilon = \frac{\frac{\Delta x_N}{x_N(p_0)}}{\frac{\Delta p}{p_0}} = \frac{\Delta x_N}{\Delta p} \cdot \frac{p_0}{x_N(p_0)} \text{ ... Bogenelastizität; } \varepsilon(p_0) = x_N'(p_0) \cdot \frac{p_0}{x_N(p_0)} \text{ ... Punktelastizität}$$



Grafik mit: $|\Delta p| = 1$, Nachfragefunktion $x_N(p) = -1{,}5p + 6$

2.35 Bei einem Preis von 20 GE/ME beträgt die Nachfrage nach einem Wirtschaftsgut 104 ME. Bei einem Preis von 50 GE/ME beträgt die Nachfrage 50 ME.
Die Sättigungsmenge x_S beträgt 150 ME.
Die Nachfragefunktion lasst sich durch eine quadratische Funktion x_N mit $x_N(p) = a \cdot p^2 + b \cdot p + c$ beschreiben.

ABD

1) Stelle aus den Angaben ein Gleichungssystem auf, mit dem man die Koeffizienten der quadratischen Nachfragefunktion berechnen kann.
Berechne die Koeffizienten und gib die Gleichung an.

2) Ermittle den Höchstpreis.

3) Der Preis von 40 GE/ME wird um eine Einheit gesenkt.
Argumentiere, welche Auswirkungen dies auf die Nachfrage hat.
Erstelle eine allgemeine Formel mit den Parametern a, b und c, mit der die Preiselastizität der Nachfrage in diesem Fall berechnet wird.

Lösung:

1) Die Punkte (20|104), (50|50) und (0|150) liegen auf x_N.
Wir stellen folgendes System von drei Gleichungen in drei Variablen auf:

$$\begin{aligned} \text{I: } 104 &= 400a + 20b + c \\ \text{II: } 50 &= 2\,500a + 50b + c \\ \text{III: } 150 &= c \end{aligned}$$

Wir lösen das Gleichungssystem mithilfe von Technologieeinsatz.
$a = 0{,}01$; $b = -2{,}5$; $c = 150 \Rightarrow$ Die Nachfragefunktion lautet $\mathbf{x_N(p) = 0{,}01p^2 - 2{,}5p + 150}$

2) $x_N(p) = 0 \Rightarrow 0{,}01p^2 - 2{,}5p + 150 = 0$
Wir lösen die quadratische Gleichung mithilfe von Technologieeinsatz.
$p_1 = 100$; $p_2 = 150 \Rightarrow$ $\mathbf{p_H = 100}$ **GE/ME**
Lösung p_2 ist nicht gültig, weil die Nachfragemenge bei $p > 100$ negativ wird.

3) Die Preissenkung hat zur Folge, dass die Nachfrage steigt.
Die Preiselastizität der Nachfrage ist an einem Punkt gefragt, daher verwenden wird die Formel für die Punktelastizität:

$$\varepsilon = x'_N(p) \cdot \frac{p}{x_N(p)}$$

$$\varepsilon = \frac{2a \cdot p^2 + b \cdot p}{a \cdot p^2 + b \cdot p + c}$$

$$\varepsilon(40) = \frac{3\,200a + 40b}{1\,600a + 40b + c}$$

TE B **2.36** Gegeben ist eine lineare Nachfragefunktion x_N mit $x_N(p) = 44 - 2p$.
Bestimme die Preiselastizität der Nachfrage bei einem Preis von 16 GE.
Interpretiere das Ergebnis.

TE B **2.37** Gegeben ist eine quadratische Nachfragefunktion x_N mit $x_N(p) = 0{,}01p^2 - 2{,}6p + 160$.
Bestimme die Preiselastizität der Nachfrage bei einem Preis von 37 GE.
Interpretiere das Ergebnis.

B TE **2.38** Erstelle eine lineare Nachfragefunktion x_N, wenn sich bei einem Preis von 72 GE/ME ein Absatz von 40 ME erwarten lässt und bei einer Preissenkung die Absatzsteigerung prozentuell gleich groß ist.
Hinweis: Bei der Abhängigkeit der Absatzmenge vom Preis ist die Elastizität negativ.

B TE **2.39** Gegeben ist eine quadratische Nachfragefunktion x_N mit $x_N(p) = 0{,}01p^2 - 2{,}6p + 160$.
Berechne jenen Preis, bei dem sich die Preiselastizität der Nachfrage von einer elastischen zu einer unelastischen Nachfrage verändert.
Hinweis: Bei der Abhängigkeit der Absatzmenge vom Preis ist die Elastizität negativ.

BCD TE **2.40** Laut Untersuchungen eines Marktforschungsinstituts ergeben sich zwischen dem Preis des Wirtschaftsguts und der Nachfragemenge folgende Werte:

Preis p in GE/ME	40	60	80	100
Menge $x_N(p)$ in ME	240	200	160	120

1) Zeichne die Nachfragefunktion x_N.
Lies die Gleichung der Nachfragefunktion aus der Grafik ab.
Ermittle den Wert der Punktelastizität bei einem Preis von 80 GE/ME.
Interpretiere das Ergebnis.

2) Berechne die Bogenelastizität aus den gegebenen Werten bei einer Preisänderung von 60 GE/ME auf 80 GE/ME.
Interpretiere das Ergebnis in Bezug auf die Preiselastizität der Nachfrage.

Zusammenfassung

Nachfragefunktion: $x_N = x_N(p)$

Preisfunktion der Nachfrage (Preis-Absatz-Funktion): $p_N = p_N(x)$

Angebotsfunktion: $x_A = x_A(p)$

Preisfunktion des Angebots: $p_A = p_A(x)$

Erlös- bzw. Umsatzfunktion: $E(x) = p_N(x) \cdot x$, $E(p) = x_N(p) \cdot p$

Kostenfunktion: $K(x) = K_v(x) + F$ (Gesamtkosten = variable Kosten + fixe Kosten)

Durchschnittskosten: $\overline{K}(x) = \frac{K(x)}{x}$, Durchschnittskosten-Minimum = **Betriebsoptimum x_O (langfristige Preisuntergrenze)**

Durchschnittliche variable Kosten: $\overline{K}_v(x) = \frac{K_v(x)}{x}$, Kosten-Minimum der variablen Kosten = **Betriebsminimum x_M (kurzfristige Preisuntergrenze)**.

Gewinnfunktion: $G(x) = E(x) - K(x)$

Grenzfunktionen (Grenzkosten, Grenzerlös, Grenzgewinn) beschreiben die Änderung einer ökonomischen Größe bei Änderung der produzierten oder nachgefragten Menge um eine Einheit.

Gewinnmaximierung für
- **vollständige Konkurrenz** (Polypol): Preis konstant
- **Angebotsmonopol** (Monopol): monoton fallende Preis-Absatz-Funktion

Cournot'scher Punkt: C(gewinnmaximale Menge | zugehöriger Preis)

Preiselastizität der Nachfrage:

$\varepsilon = \frac{\frac{\Delta x_N}{x_N(p_0)}}{\frac{\Delta p}{p_0}} = \frac{\Delta x_N}{\Delta p} \cdot \frac{p_0}{x_N(p_0)}$ ... Bogenelastizität; $\varepsilon(p_0) = x_N'(p_0) \cdot \frac{p_0}{x_N(p_0)}$ ... Preiselastizität

Weitere Aufgaben

2.41 Beim Betriebsoptimum an der Stelle x = 12 ME haben die Grenzkosten den Wert 60 GE/ME. Die Fixkosten betragen 72 GE. Wie lautet die quadratische Kostenfunktion? AB

2.42 Die Kostenfunktion eines Betriebs ist eine Polynomfunktion dritten Grads. Bei einer Produktionsmenge von x = 6 ME betragen die variablen Kosten 40,8 GE/ME und die variablen Grenzkosten 3,2 GE/ME. Das Betriebsminimum liegt bei einer Produktionsmenge von x = 12 ME. AB

1) Wie lautet die Funktion der variablen Kosten?
2) Wie groß sind die minimalen variablen Durchschnittskosten (= Betriebsminimum)?
3) Wie hoch sind die variablen Durchschnittskosten bei der Kostenkehre (Wendepunkt)?

2.43 Ein Betrieb folgt der Kostenfunktion $K(x) = 0{,}1x^3 - 3x^2 + 70x + 300$. BC

1) Welcher Marktpreis macht den Betrieb zu einem Grenzbetrieb? Wie hoch ist in diesem Fall der Deckungsbeitrag?
Hinweis: Ein Betrieb wird zum Grenzbetrieb, wenn der Verkaufspreis gleich dem Stückkostenminimum der Gesamtkosten ist (**langfristige Preisuntergrenze**).
2) Der Marktpreis sinkt auf p = 60 GE/ME. Wie hoch sind bei einem Absatz von x =18 ME der Gewinn und der Deckungsbeitrag?

B TE **2.44** Der Gewinn einer Firma lässt sich näherungsweise durch folgende Funktion beschreiben:
$G(x) = -x^2 + 80x - 100$
x ... Anzahl der verkauften Stück in 1 000, G ... Gewinn in €
1) Ermittle die Gewinnschwelle und die Gewinngrenze.
2) Gib an, bei welcher Stückzahl die Firma maximalen Gewinn erzielt.

B TE **2.45** In einem Herstellungsbetrieb für Sportgeräte lassen sich die Gesamtkosten durch folgende Funktion beschreiben:
$K(x) = 0{,}02x^3 - 0{,}5x^2 + 3x + 800$
x ... Anzahl an produzierten Stück in 1 000, K ... Kosten in €.
Ermittle die Kostenkehre.

ABD TE **2.46** Die Fixkosten einer Produktion einer Ware betragen 1 200,00 €. Für die Produktion von 100 ME belaufen sich die Gesamtkosten auf 1 240,00 €.
1) Stelle die lineare Kostenfunktion K(x) auf.
2) Berechne die Schnittpunkte der Kostenfunktion K(x) mit der Erlösfunktion $E(x) = -x^2 + 90x$. x ... verkaufte Menge in ME, E ... Erlös in €
3) Beschreibe, welche wirtschaftliche Bedeutung die Schnittpunkte aus **2)** haben.
4) Berechne den maximalen Gewinn.

AB TE **2.47** Die Gesamtkosten für die Produktion von 2 000 Stück einer Ware betragen 4 000,00 €, für 3 000 Stück derselben Ware betragen die Gesamtkosten 5 500,00 €.
1) Ermittle die lineare Kostenfunktion.
2) Der Preis der Ware lässt sich durch die folgende Preis-Absatz-Funktion beschreiben:
$p_N(x) = -x + 100$ x ... Stückzahl, p_N ... Preis in € pro Stück
Stelle die Erlösfunktion auf.
3) Bei welcher Stückzahl ist der erzielte Gewinn maximal?
4) Stelle die Kosten-, die Erlös- und die Gewinnfunktion grafisch dar.
Lies aus der Grafik ab, in welchem Bereich Gewinn erzielt wird.

AB TE **2.48** Bei der Produktion von speziellen Modellautos sind folgende Werte für die jeweils auftretenden Gesamtkosten bekannt:

Menge x in ME	10	20	30	40
Gesamtkosten K(x) in GE	1 634	1 684	1 994	2 804

1) Ermittle die Kostenfunktion unter der Annahme, dass die Kosten durch eine Polynomfunktion dritten Grads ausreichend genau beschrieben werden können.
2) Berechne, an welcher Stelle der Kostenverlauf von degressiv zu progressiv übergeht.

ABCD TE **2.49** Auf einem Adventmarkt werden kleine Kunstobjekte verkauft. Der Absatz lässt sich mithilfe einer linearen Preis-Absatz-Funktion beschreiben. Aus Erfahrung weiß man, dass man bei einem Stückpreis von 36,00 € mit einem Absatz von 20 Stück rechnen kann. Setzt man den Preis um 6,00 € niedriger an, rechnet man mit einem Absatz von 35 Stück.
1) Ermittle die Preis-Absatz-Funktion $p_N(x)$. Gib einen sinnvollen Definitionsbereich an.
2) Gib an, wie viel Kunstobjekte verkauft werden müssen, damit der Erlös maximal wird.
3) Der Gewinn kann näherungsweise durch folgende Funktion beschrieben werden:
$G(x) = -0{,}02x^3 + 0{,}29x^2 + 36x - 600$
x ... Anzahl der verkauften Kunstobjekte, G ... Gewinn in €
Ermittle die zugehörige Kostenfunktion für die Produktion der Kunstobjekte.
4) Stelle die Erlös-, die Kosten- und die Gewinnfunktion grafisch dar und beschreibe den Zusammenhang zwischen diesen drei Funktionen mit eigenen Worten.

2.50 Für den Verkauf einer Ware hat man empirisch folgende Kostenfunktion erhoben: B
$K(x) = x^3 - 8x^2 + 37x + 103$
x ... Anzahl an produzierten Stück in 1 000, K ... Kosten in €
Ermittle ***1)*** die Grenzkostenfunktion ***2)*** die Kostenkehre.

2.51 Ein Unternehmen stellt neuartige medizinische Apparaturen her. Dabei wird von folgender Kostenfunktion ausgegangen: BD
$K(x) = 0{,}25x^3 - 82{,}5x^2 + 9\,000x + 125\,000$
x ... Anzahl in ME, K ... Kosten in €
1) Bestimme die Grenzkostenfunktion $K'(x)$.
2) Berechne, bei welcher Menge x es den geringsten Kostenzuwachs gibt.

2.52 Die Gesamtkosten eines Monopolbetriebs folgen angenähert einer kubischen Parabel, die Preis-Absatz-Funktion verläuft nach einer Parabel zweiter Ordnung. AB
1) Bestimme die Kostenfunktion aus folgenden Angaben: Die Gesamtkosten betragen bei Stillstand der Produktion 1 000 GE, die Grenzkosten 100 GE/ME. Die Kostenkehre befindet sich bei 10 ME, die Grenzkosten sind dort 55 GE/ME.
2) Berechne das Betriebsoptimum und die minimalen Stückkosten.
3) Berechne die Gleichung der Preis-Absatz-Funktion aus folgenden Angaben: Der Höchstpreis beträgt 400 GE/ME. Bei einem Verkaufspreis von 298,75 GE/ME steigt die Nachfrage auf 15 ME, bei 20 ME wird ein Erlös von 5 000 GE erzielt.
4) Bestimme den Cournot'schen Punkt.

2.53 Die quadratische Kostenfunktion eines Monopolbetriebs ist durch die Gleichung $K(x) = 0{,}1x^2 + 200x + 10\,000$ gegeben. AB
1) Die quadratische Preis-Absatz-Funktion soll aus folgenden Angaben berechnet werden: Werden 420 GE/ME verlangt, beträgt die nachgefragte Menge 120 Stück, bei 330 GE/ME sind es 150 Stück und bei 140 GE/ME bereits 200 Stück.
2) Bestimme den Cournot'schen Punkt, den maximalen Gewinn und die Gewinngrenzen.

2.54 ***1)*** Bestimme für folgende Messdaten mithilfe der Regressionsrechnung (siehe Band 2, Abschnitt 7.3.2) die lineare Preis-Absatz-Funktion (Koeffizienten auf 5 werthabende Stellen genau): AB

Menge x in ME	10	20	30	50	100
Preis $p_N(x)$ in GE/ME	440	380	370	290	160

2) Ermittle den Cournot'schen Punkt für die Gewinnfunktion
$G(x) = -x^3 + 22x^2 + 50x - 1\,415$.
3) Berechne das Betriebsoptimum und die minimalen Stückkosten.

2.55 ***1)*** Die Preis-Absatz-Funktion eines Monopolbetriebs hat die Form $p_N(x) = \frac{a - bx}{x + c}$. AB
Folgender Zusammenhang ist für Verkaufspreis und Absatzmenge belegt:

Absatzmenge x in ME	100	200	300
Verkaufspreis $p_N(x)$ in GE/ME	75	40	22,5

Bestimme die Preis-Absatz-Funktion.
2) Bestimme die Kostenfunktion mittels linearer Regression (siehe Band 2, Abschnitt 7.3.2):

Menge x in ME	100	200	300	400	500
Preis K(x) in GE/ME	6 300	6 900	8 000	9 100	9 200

3) Bestimme Gewinnschwelle, Gewinngrenze und Cournot'schen Punkt.

AB **2.56** Für die Herstellung eines völlig neuen Produkts muss ein Betrieb mit Fixkosten von 60 000,00 € rechnen, die variablen Kosten betragen 150,00 € pro Stück. Es wird so kalkuliert, dass die Gewinnschwelle bei 1 200 Stück erreicht werden soll. Leider muss aufgrund eines technischen Problems die Produktion nach 300 Stück abgebrochen werden. Berechne, welcher Verlust dadurch entsteht.

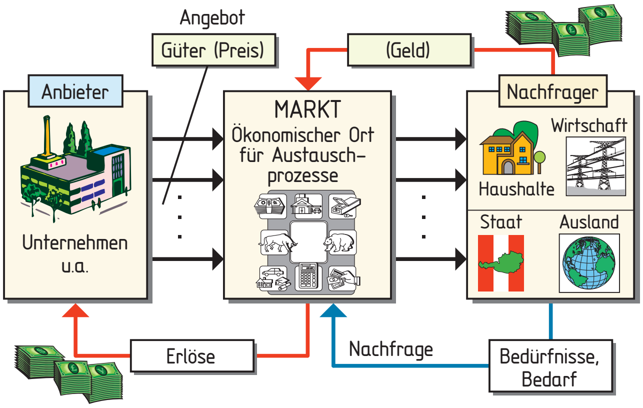
AB **2.57** Ein monopolistischer Anbieter arbeitet mit folgender Preis-Absatz-Funktion:
$p_N(x) = 180 - 4x$

1) Berechne Höchstpreis und Sättigungsmenge der Nachfrage.

2) Von der kubischen Kostenfunktion sind folgende Daten bekannt: Die Grenzkosten liegen bei Produktionsstart (0 ME) bei 5,00 GE und bei der Produktion von 20 ME beträgt die momentane Änderungsrate 526,00 GE. Die Kostenkehre liegt bei $\frac{4}{3}$ ME. Bei der Produktion von 10 ME liegen die Gesamtkosten in einer Höhe von 375,00 GE. Bestimme die Kostenfunktion K(x).

3) Berechne die Koordinaten des Cournot'schen Punkts.

B **2.58** Die Marktsituation eines bestimmten wirtschaftlichen Guts zeigt folgende Preisfunktionen des Angebots und der Nachfrage:



$p_A(x) = \sqrt{21x + 190} + 8$
$p_N(x) = -3x + 72$

1) Berechne den Preis bei Marktgleichgewicht.

2) Bei welcher Produktionsmenge liegt das Betriebsoptimum, wenn der Monopolbetrieb mit einer Kostenfunktion $K(x) = 0{,}2x^2 + 10x + 20$ arbeitet? Wie hoch ist die langfristige Preisuntergrenze?

3) Berechne die Grenzen des Gewinnbereichs.

4) Bei welcher Produktionsmenge kann der maximale Gewinn erzielt werden? Wie hoch liegt der Preis bei maximalem Gewinn?

AB **2.59** Das Betriebsoptimum eines Unternehmens mit kubischer Kostenfunktion liegt bei $x_O = 10$ ME. Der Preis, bei welchem der Betrieb zum Grenzbetrieb wird, liegt bei 80 ME. Bei einer Produktion von 5 ME verändert sich der Kostenverlauf von degressiven zu progressiven Kosten.

1) Bestimme die Kostenfunktion, wenn der Betrieb Fixkosten von 300,00 GE aufweist.

2) Bei welcher Produktionsmenge und in welcher Höhe liegt die kurzfristige Preisuntergrenze?

3) Stelle Erlös- und Gewinnfunktion für einen Verkaufspreis von p = 280,00 GE dar.

4) Berechne den Break-Even-Point sowie die Gewinngrenze.

5) Bei welcher Produktionsmenge und in welcher Höhe liegt der maximale Gewinn?

2.60 Laut Marktanalysen sind folgende Zusammenhänge der Kostenfunktion eines monopolistischen Anbieters mit quadratischer Kostenfunktion bekannt: AB

Menge x in ME	20	40	60
Kosten K(x) in GE	114,00	136,00	166,00

Der Betrieb ist am Markt mit folgender Preis-Absatz-Funktion konfrontiert:
$p_N(x) = -0{,}15x + 10{,}5$

1) Bestimme die quadratische Kostenfunktion.
2) Berechne Höchstpreis und Sättigungsmenge.
3) In welchem Produktionsbereich arbeitet der Betrieb mit Gewinn?
4) Wie groß ist der maximale Gewinn?

2.61 (Fortsetzung von 2.60) Durch die Notwendigkeit einer neuen Lagerhalle muss der Monopolist mit höheren Fixkosten rechnen. BC

1) Welche Auswirkungen haben diese höheren Fixkosten auf die Gesamtsituation?
2) In welchem Bereich ist die Nachfrage elastisch?

Wissens-Check

		gelöst
1	Welche Kosten sind beim Betriebsoptimum minimal? A) Gesamtkosten C) Stückkosten B) Grenzkosten D) variable Durchschnittskosten	
2	Welche Kosten sind beim Betriebsminimum minimal? A) Gesamtkosten C) Stückkosten B) Grenzkosten D) variable Durchschnittskosten	
3	Was versteht man unter „Deckungsbeitrag“? A) Differenz zwischen Gesamterlös und Gesamtkosten B) Differenz zwischen Gesamterlös und variablen Gesamtkosten C) Differenz zwischen Preis und Stückkosten D) Differenz zwischen Preis und variablen Durchschnittskosten	
4	Welche Produktionsmenge kann man durch die Gleichung „Grenzerlös = Grenzkosten“ berechnen? A) Betriebsminimum C) Cournot'sche Menge B) Betriebsoptimum D) Kostenkehre	
5	Welcher Funktionstyp eignet sich zur Darstellung eines ertragsgesetzlichen Kostenverlaufs? A) Exponentialfunktion C) quadratische Funktion B) lineare Funktion D) Polynomfunktion 3. Grads	
6	Bei welcher der genannten Marktformen gilt generell „Grenzerlös = Preis“? A) vollständige Konkurrenz B) Angebotsmonopol	
7	Angenommen, für die Preiselastizität der Nachfrage nach einem bestimmten Produkt gilt $\lvert\varepsilon\rvert < 1$. Welche Reaktion der Nachfrager auf Preisänderungen ist zu erwarten? A) keine Reaktion B) schwache Reaktion C) starke Reaktion	

Lösung: 1) C 2) D 3) B 4) C 5) D 6) B 7) B