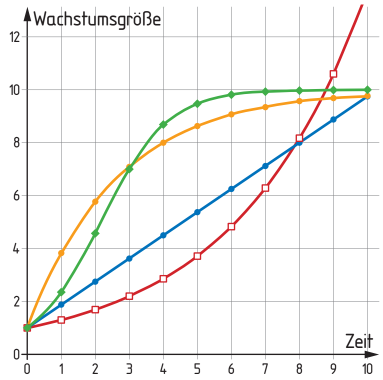
2 Wachstumsprozesse

Die Beschreibung von Wachstumsprozessen spielt vor allem in der Natur- und der Wirtschaftswissenschaft eine große Rolle. Viele Größen ändern sich mit der Zeit oder auch von Ort zu Ort. Sie können sich **kontinuierlich** oder schrittweise (**diskret**) ändern. Sie können **begrenzt** oder **unbegrenzt** wachsen. Das Wachstum kann eine **Zunahme** oder eine **Abnahme** (= negatives Wachstum) bedeuten. Eine mathematische Beschreibung gelingt mit der Bildung eines **mathematischen Modells**, das den wirklich ablaufenden Prozess möglichst genau beschreibt. Viele Prozesse lassen sich mithilfe von linearen Funktionen und Exponentialfunktionen modellieren.



2.1 Lineares Wachstum

ABC **2.1** Falko leiht sich für seinen Umzug einen Miettransporter aus. Es werden ihm zwei Varianten angeboten:

I: Fixgebühr 18,00 € für die erste halbe Stunde und 10,00 € für jede weitere angefangene halbe Stunde.

II: Fixgebühr 30,00 € für die erste halbe Stunde und 7,50 € für jede weitere angefangene halbe Stunde.

1) Beschreibe beide Varianten mit dem Modell einer linearen Funktion.

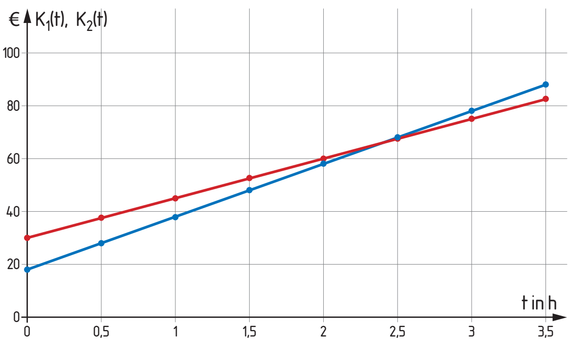
2) Stelle die Funktionen grafisch dar. Interpretiere, ab welcher Stundenzahl die 2. Variante für Falko günstiger als die 1. Variante wird.

Es handelt sich hier nicht um ein kontinuierliches, sondern um ein diskretes Wachstum mit Zeitdistanzen von einer halben Stunde. Ein Punktdiagramm oder eine Treppe wird die Situation dieser Kostenzunahme am einfachsten beschreiben.

Du machst am besten eine Tabelle:

Zeit t in h	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
I: Kosten $K_1(t)$ in €	18	28	38	48	58	68	78
II: Kosten $K_2(t)$ in €	30	29,50	39	48,50	58	67,50	77

Die grafische Darstellung des linearen Modells erfolgt im Koordinatensystem:



Variante I: $K_1(t) = 18 + 20 \cdot t$

Variante II: $K_2(t) = 30 + 15 \cdot t$

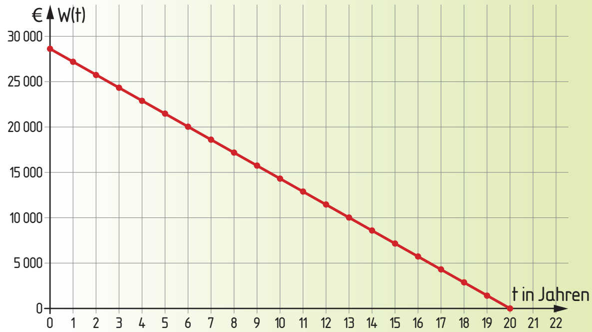
In der Grafik und in der Tabelle erkennt man, dass ab der 2. Stunde der Miettransporter nach Variante II günstiger wird.

Die lineare Zunahme (oder die lineare Abnahme) einer Größe lässt sich durch das Modell einer Geraden beschreiben. Der Geradenanstieg k liefert die so genannte **Wachstumsrate**, **das ist der Zuwachs (bzw. die Abnahme) der jeweiligen Wachstumsgröße pro Zeiteinheit (oder Längeneinheit)**. Sie ist bei linearem Wachstum konstant und entspricht dem Anstieg k der Geraden.

2.2 Der Wert eines Autos nimmt im Laufe von Jahren näherungsweise nach der folgenden Funktion ab:
$W(t) = 28\,300 - 1\,415 \cdot t$
t ... Zeit in Jahren (a)
W(t) ... Wert nach t Jahren in Euro €
1) Stelle die Abnahmefunktion grafisch dar.
2) Lies ab, wann das Auto nur mehr 3 000,00 € wert ist.
3) Gib die Abnahme pro Zeiteinheit an.

Lösung:

1)



2) Nach ungefähr 18 Jahren ist das Auto auf den Wert von 3 000,00 € gesunken.
3) Als Zeiteinheit ist ein Jahr zu verstehen.
Pro Jahr nimmt der Wert um 1 415,00 € ab. Das entspricht dem Wert des Geradenanstiegs k.

2.3 Karim will sich eine Maschine ausleihen, wobei ihm zwei Varianten angeboten werden:
I: Fixgebühr 125,50 € und 10,00 € für jede angefangene Stunde.
II: Fixgebühr 160,00 € und 8,50 € für jede angefangene Stunde.
1) Stelle das passende grafische Modell auf.
2) Beurteile, bei welcher Stundenzahl beide Varianten gleich viel kosten.
3) Lies den Kostenzuwachs pro Zeiteinheit beider Funktionen ab.

2.4 Ein Internet-Provider hat folgende Angebote:
I: Grundgebühr 18,85 € und 2,55 € pro Online-Stunde.
II: Grundgebühr 28,02 € und 1,24 € pro Online-Stunde.
1) Stelle das passende grafische Modell auf.
2) Beurteile, bei welcher Stundenzahl die 2. Variante günstiger kommt.
3) Lies für beide Funktionen den Kostenzuwachs pro Zeiteinheit ab.

2.5 Die Wertminderung eines Objekts mit einem Anschaffungswert von 150 000,00 € beträgt jährlich 6 000,00 €.
1) Berechne die Dauer, bis der Wert auf 12 000,00 € gesunken ist.
2) Zeichne den Graphen. Lies ab, wann der Wert auf null gesunken ist.

2.2 Exponentielles Wachstum

ABC **2.6** Eine Stadt hatte vor 20 Jahren 55 000 Einwohner. Man hat seitdem beobachtet, dass sich in den darauf folgenden Jahren ein konstanter **Wachstumsfaktor** von 1,015 messen ließ.

1) Berechne, wie viel Einwohner die Stadt heute hat.
2) Wenn das Wachstum unbegrenzt in dieser Weise weiter geht, wie viel Einwohner hätte die Stadt dann von heute weg gezählt in 50 Jahren?
3) Zeichne die Wachstumsfunktion.
4) Berechne die **Verdoppelungszeit** seit Beginn der Beobachtung vor 20 Jahren.

Man versteht unter einem **Wachstumsfaktor a** jene Zahl, mit der man einen Anfangswert multipliziert um den nachfolgenden Wert zu erhalten. Es gilt folgende Beziehung:

Wachstumsfaktor = 1 + prozentuelle Wachstumsrate, $a = 1 + \frac{p}{100}$ zB p = 7 %, a = 1,07

Bei Abnahmen ist die Wachstumsrate negativ, daher gilt $\mathbf{a = 1 - \frac{p}{100}}$ zB p = 7 %, a = 0,93

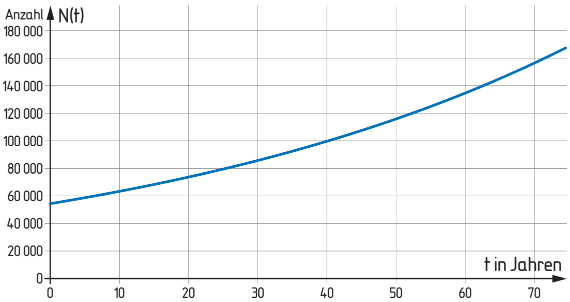
Bei exponentiellem Wachstum ist der Wachstumsfaktor **a** konstant.
Die exponentielle Zunahme wird durch die so genannte **Verdoppelungszeit T**, in der die Größe den doppelten Wert annimmt, charakterisiert. Analog spricht man bei Abnahmeprozessen von der **Halbwertszeit T**, in der die Größe auf die Hälfte schrumpft.

Im Falle des eingangs gestellten Beispiels wächst die Bevölkerung in einem Jahr von 55 000 auf $55\,000 \cdot 1{,}015 = 55\,825$.

Die Wachstumsrate beträgt $\frac{825}{55\,000} = 0{,}015$, das sind 1,5 %.

Man muss jedes Jahr mit dem Wachstumsfaktor multiplizieren, daher hat die Stadt heute $55\,000 \cdot 1{,}015^{20}$ Einwohner. Das sind 74 077 Einwohner.

Würde das Wachstum unbegrenzt mit diesem Wachstumsfaktor weitergehen, dann hätte die Stadt in 50 Jahren ab heute $55\,000 \cdot 1{,}015^{70}$ Einwohner. Das sind 155 950 Einwohner.



Die **Verdopplungszeit**:
Die Berechnung kann man einfach über den Gleichungslöser oder händisch mit Logarithmieren durchführen:

$110\,000 = 55\,000 \cdot 1{,}015^t$.

$$110\,000 = 55\,000 \cdot 1{,}015^t$$
$$2 = 1{,}015^t \quad |\ \ln$$
$$\ln 2 = t \cdot \ln 1{,}015$$
$$t = 46{,}555...$$

Der Anfangswert liegt bei 55 000 Einwohnern. Nach ca. $46\frac{1}{2}$ Jahren hat sich die Einwohnerzahl verdoppelt.

Dass dieses Problem in Wirklichkeit diskret ist, kann in der Grafik wegen der vielen Werte nicht dargestellt werden. Zu berücksichtigen ist es aber gegebenenfalls bei den Lösungen!

Beide Wachstumsprozesse, die exponentielle Zunahme und die exponentielle Abnahme (exponentieller Zerfall) sind gekennzeichnet durch eine **konstante prozentuelle Veränderung**.

Das exponentielle Wachstum lässt sich daher mithilfe der folgenden Exponentialfunktion darstellen: $f(t) = c \cdot a^t$

Häufig bevorzugt man die Schreibweise mit der e-Potenz, wobei $a = e^{\lambda}$ gesetzt wird:

$$f(t) = c \cdot e^{\lambda \cdot t}$$

c ... Anfangswert bei t = 0

$a = 1 + \frac{p}{100}$ ... Wachstumsfaktor

λ ... Wachstumskonstante

Anfangswert und Wachstumsfaktor sind positive reelle Zahlen.

Die Wachstumskonstante ist bei Zunahmeprozessen **positiv**, bei Abnahmeprozessen **negativ**.

2.7 Die Ausbreitung A einer Zellkultur wird zu zwei Zeitpunkten gemessen: ABC

Uhrzeit	Zeit t in Minuten	Größe A in mm^2
10:30	0	2 400
13:15	165	3 260

Erstelle die Gleichung der Wachstumsfunktion.

Lösung:
Aus den Angaben folgt, dass der Anfangswert bei t = 0 c = 2 400 ist.
Wir können daher folgende Gleichung aufstellen:
$3\,260 = 2\,400 \cdot a^{165}$
Sie muss nach a gelöst werden, entweder mit dem Gleichungslöser oder per Hand:

$$\frac{3\,260}{2\,400} = a^{164} \qquad \Big| \sqrt[164]{}$$

$$\sqrt[164]{\frac{3\,260}{2\,400}} = a$$

$$a = 1{,}00187$$

Die Gleichung der Wachstumsfunktion lautet: A(t) = 2 400 ˜ $1{,}00187^{t}$

2.8 Ein Wald hatte vor 15 Jahren einen Bestand von B(0) = 48 000 m^3. Im Verlauf der darauf folgenden 15 Jahre bis heute ist kein Holz gefällt worden, so dass sich der Bestand in dieser Zeit um 60 % vermehren konnte. AB

1) Stelle für den Waldbestand das Wachstumsgesetz auf, wenn exponentielles Wachstum angenommen werden kann.
2) Berechne den Bestand nach 10 Jahren und den zukünftigen Bestand ab heute in 20 Jahren.
3) Ermittle, wann sich der Bestand verdoppelt.

2.9 Ein Infrarot-Laserstrahl verliert mit zunehmender Eindringtiefe x (in mm) in ein Medium exponentiell an Intensität. Nach 1,65 mm ist bei einem bestimmten Stoff die Anfangsintensität J(0) = 100 % auf die Hälfte gesunken. AB

1) Stelle die Intensität J in Abhängigkeit von der Eindringtiefe x dar.
2) Nach dem Durchgang durch das Medium hat der Strahl 85 % seiner Intensität verloren. Berechne die Dicke der Schicht.

BD **2.10** Das exponentielle Wachstumsgesetz lautet $B(t) = B_0 \cdot e^{\lambda \cdot t}$ (λ ... Wachstumskonstante).
Der Zerfall als negatives Wachstum wird durch das Zerfallsgesetz ausgedrückt:
$B(t) = B_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$ (λ ... Zerfallskonstante)
Zeige, dass die Halbwertszeit beim Zerfallsgesetz und die Verdopplungszeit beim Wachstumsgesetz durch dieselbe Formel $T = \frac{\ln(2)}{\lambda}$ ausgedrückt werden können.

AB **2.11** Vor über 5 000 Jahren stieg ein Mann in die eisigen Höhen der Schnalstaler Gletscher zum Hauslabjoch und kam dort ums Leben. Im Jahre 1991 wurde er zufällig gefunden. Dieser Fund war eine archäologische Sensation und eine Momentaufnahme eines kupferzeitlichen Menschen. Der Mann wurde bekannt unter dem Namen „Ötzi". Doch wie konnte man sein Alter so genau bestimmen?

Man verwendet für die Altersbestimmung das radioaktive Kohlenstoff-Isotop C-14. Es wird durch kosmische Strahlung aus dem Stickstoff der Luft gebildet, von den Pflanzen aufgenommen und gelangt durch die Nahrungskette auch in den Körper von Mensch und Tier. Durch konstante Aufnahme und gleichzeitigen Zerfall stellt sich ein Gleichgewichtszustand an C-14-Isotopen ein. Stirbt das Lebewesen, so wird kein C-14 mehr aufgenommen. Nach jeweils 5 730 Jahren ist die Hälfte der vorhandenen Atomkerne zerfallen (Halbwertszeit). Aus der verbleibenden Reststrahlung lässt sich ermitteln, welche Zeit seit dem Ableben des untersuchten Lebewesens vergangen ist.

Die Reststrahlung des C-14-Isotops betrug beim Mann vom Hauslabjoch noch 53 %. Berechne, wann er ungefähr ums Leben kam.

Lösung:
Wir wenden das Zerfallsgesetz an, um die Zerfallskonstante zu bestimmen:
$N(t) = N_0 \,\tilde{}\, e^{-\lambda \cdot t}$
t ... Zeit in Jahren
N(t) ... Zahl der vorhandenen C-14 Isotope nach der Zeit von t Jahren

Für t = 5 730 Jahren gilt $N(t) = \frac{N_0}{2}$

$$\frac{N_0}{2} = N_0 \cdot e^{-5\,730\lambda} \qquad |:N_0$$
$$e^{-5\,730\lambda} = \frac{1}{2} \qquad |\ln$$

Du kannst hier auch den Gleichungslöser verwenden.

$$-\lambda \cdot 5\,730 = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$\lambda = 0{,}00012097$$

Mit der Zerfallskonstanten und den 53 % Reststrahlung lässt sich das Alter bestimmen:
$53 = 100 \cdot e^{-0{,}00012097 \cdot t}$
Mit dem Gleichungslöser erhält man: $t \approx 5\,250$ Jahre

ABC **2.12** Von einem radioaktiven Element misst man $m_0 = 86{,}2$ g.
30 Minuten später waren nur noch 57 g dieser Substanz vorhanden.
1) Berechne die Zerfallskonstante λ. Wie lautet das Zerfallsgesetz?
2) Berechne die Halbwertszeit T.
3) Stelle die Zerfallsfunktion grafisch dar.
4) Beantworte die folgenden Fragen zuerst anhand des Graphen, dann rechnerisch:
  A) Wie viel wird nach weiteren zwei Stunden noch vorhanden sein?
  B) Wie viel Substanz müsste es eine Stunde vor der ersten Messung gewesen sein?
  C) Wie lange nach der ersten Messung wird die Substanz auf 30 g zerfallen sein?

2.13 Der Überlebensanteil Ü von technischen Bauelementen nach t Stunden Einsatzzeit wird beschrieben durch die Funktionsgleichung ABC

$Ü(t) = 100 \cdot e^{-\frac{t}{T}}$.

t ... Einsatzzeit in Stunden

Ü(t) ... Überlebensanteil nach t Stunden in Prozent.

T ... durchschnittliche Lebensdauer in Stunden

Für gewisse Transistoren gilt der Wert T = 10 000 Stunden.

Beantworte ***1)*** und ***2)*** zuerst aus der Interpretation der Grafik, dann rechnerisch.

1) Berechne, wie groß der Prozentanteil ist, der 12 000 Stunden überlebt.

2) Bestimme die Einsatzzeit, die von 90 % der Transistoren überdauert wird.

3) Von einer anderen Sorte überleben ca. 70 % 5 000 Stunden. Berechne, welche durchschnittliche Lebensdauer T diese Bauteile haben.

4) Man möchte gerne, dass 80 % mindestens 5 000 Stunden überleben. Welche durchschnittliche Lebensdauer T muss angestrebt werden?

2.14 Der entzündungshemmende Arzneistoff Diclofenac wird im Körper exponentiell abgebaut. Seine wirksame Menge w im Körper halbiert sich im Mittel alle 1,5 Stunden. Jemand nimmt um 16:00 Uhr eine Tablette mit einer Wirkstoffmenge von 50 mg ein. AB

1) Stelle für die wirksame Menge w die Zerfallsfunktion auf, wenn exponentielle Abnahme angenommen wird.

2) Berechne, nach welcher Zeit die wirksame Menge im Körper auf 20 mg gesunken ist.

2.15 In der Erdatmosphäre nimmt der Luftdruck p mit zunehmender Höhe h bezogen auf den Meeresspiegel ab. ABC

Die Abhängigkeit des Luftdrucks von der Höhe lasst sich (annähernd) durch die sogenannte **Barometrische Höhenformel** beschreiben:

$p(h) = p_0 \cdot e^{-\lambda \cdot h}$

h ... Höhe in Meter (m)

p(h) ... Luftdruck in der Höhe h in Hektopascal (hPa)

p_0 = 1 013,25 hPa

Der Druck in 1 000 m Höhe beträgt 898,76 hPa.

1) Stelle die Funktion grafisch dar, interpretiere die Kurve hinsichtlich der folgenden Fragen:

A) In welcher Höhe ist der Luftdruck halb so groß wie auf Meereshöhe?

B) Wie groß ist der Luftdruck am Gipfel des Großglockners (3 798 m) bzw. am Gipfel des Mount Everest (8 848 m)?

2) Der höchste Berg Spaniens ist der 3 718 m hohe Teide auf Teneriffa. Mit einer Seilbahn kann man von 2 356 m Seehöhe ausgehend 1 199 Höhenmeter bewältigen. Berechne, um wie viel Prozent der Luftdruck zwischen Talstation und Bergstation sinkt.

2.16 In einem Palmenhaus gedeiht eine exotische Lianen-Art. Ihr Wachstum lässt sich durch die Funktion beschrieben: $y(t) = 0{,}05 \cdot 4^t$ ABC

t ... Zeit in Monaten, y(t) ... Länge nach t Monaten in Meter (m)

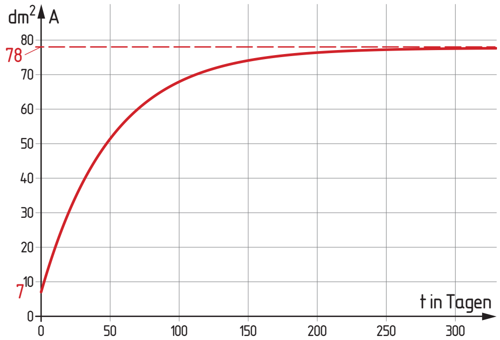
1) Zeichne den Graphen und lies ab, wie lang die Lianen nach 4 Monaten sind und wann sie sie mehr als 2 m lang sind.

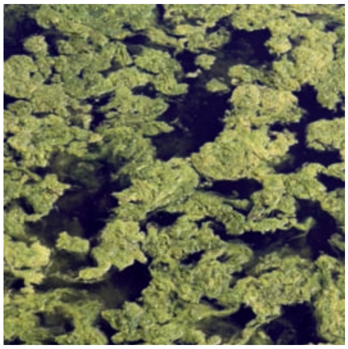
2) Berechne den Wachstumsfaktor der Länge der Lianen innerhalb einer Woche.

2.3 Beschränktes Wachstum

Das lineare und das exponentielle Wachstum berücksichtigen nicht, dass normalerweise jedes Wachstum eine natürliche Grenze hat. ZB Lebewesen wachsen nicht unbegrenzt weiter, sie erreichen eine für ihre Art typische Obergrenze. Ihre Vermehrung hängt häufig auch mit dem Nahrungsangebot und von vielen Umweltfaktoren ab.

ABC TE **2.17** Auf der Oberfläche eines stehenden Wassers in einem Bottich breiten sich Algen aus. Die Wasseroberfläche im Bottich beträgt ca. 78 dm^2.
Die Grafik zeigt die Wachstumskurve der Algen.





1) Interpretiere diese Kurve und lies alle für die Beschreibung des Wachstums relevanten Werte ab (Anfangsbestand, täglicher Zuwachs, obere Grenze).

2) Lies einige Werte aus der Kurve ab und gib die Funktionsgleichung für das Algenwachstum an.

Zu Beginn der Beobachtung ist eine Fläche von 7 dm^2 betroffen. Der Zuwachs pro Tag ist in den ersten Tagen hoch und wird allmählich immer kleiner. Die obere Grenze beträgt 78 dm^2, denn mehr als der Bottich Fläche bietet, kann sich die Alge nicht ausbreiten. Nach ca. 250 Tagen wird diese Grenze erreicht.

Das **beschränkte Wachstum** kann mit der folgenden Funktionsgleichung dargestellt werden:

$$f(t) = S \cdot (1 - b \cdot e^{\lambda \cdot t})$$

S ... Kapazitätsgrenze (obere Grenze bei der Zunahme, untere Grenze bei Abnahme)
b ... eine konstante reelle Zahl, die aus der Angabe berechnet werden kann
λ ... Wachstumskonstante
$S - f(t) = S \cdot b \cdot e^{\lambda \cdot t}$ ... gibt die jeweilige Differenz zwischen der momentanen Wachstumsgröße und der Grenze S, man bezeichnet diesen Term als **Restkapazität**.
t ... Zeit
f(t) ... Wachstumsgröße

Die Herleitung der Gleichung erfordert Kenntnisse der Analysis (Differential- und Integralrechnung), daher wird die Funktionsgleichung hier nur angegeben.

Von der Kurve kennen wir schon 2 Werte: $t = 0 \Rightarrow A(0) = 7$ und $S = 78$. Nach 50 Tagen sind ca. 52 dm^2 bedeckt. Wir setzen die Werte in die allgemeine Gleichung ein:

TE

$7 = 78\,(1 - b \cdot e^0) \Rightarrow b = 0{,}91$

$52 = 78\,(1 - 0{,}91 \cdot e^{50\lambda}) \Rightarrow \lambda \approx -0{,}0199$

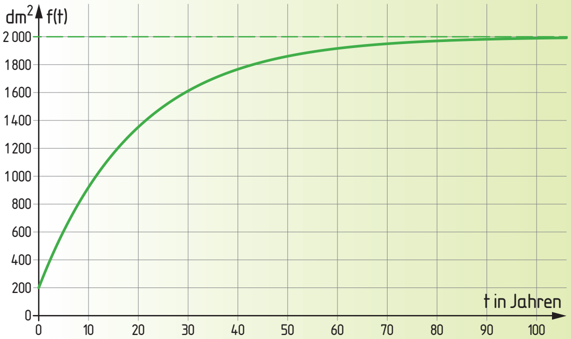
Die Gleichung lautet: $A(t) = 78 \cdot (1 - 0{,}897 \cdot e^{-0{,}0199t})$

2.18 Das Ökosystem im Nationalpark „Donau-Auen“ verträgt maximal S = 2 000 Exemplare einer Tiergattung. Es werden 200 Individuen dieser Spezies ausgesetzt.
Der Zuwachs nach einem Jahr beträgt jeweils zu Jahresbeginn 5 % der Restkapazität.

ABC

1) Erstelle die Funktionsgleichung für die Entwicklung dieser Individuen.
2) Stelle grafisch die Entwicklung für die nächsten 100 Jahre dar und lies ab, wann die Kapazitätsgrenze erreicht wird.

Lösung:
1) Zunächst musst du herausfinden, wie viele Individuen es ein Jahr später gibt.
Es sollen 5 % der Restkapazität Zuwachs sein.
Restkapazität: 2 000 – 200 = 1 800, davon 5 % = 90
Nach einem Jahr sind demnach 290 Individuen vorhanden.
Einsetzen in die allgemeine Gleichung für das beschränkte Wachstum:
$200 = 2\,000 \cdot (1 - b \cdot e^{0}) \Rightarrow b = 0{,}9$
$290 = 2\,000 \cdot (1 - 0{,}9 \cdot e^{\lambda}) \Rightarrow \lambda \approx -0{,}0513$
Gleichung: $f(t) = 2\,000 \cdot (1 - 0{,}9 \cdot e^{-0{,}0513 \cdot t}) = 2\,000 - 1\,800 \cdot e^{-0{,}0513 \cdot t}$

2)


Die Grenze ist in ca. 100 Jahren erreicht.

2.19 Ein neues Produkt wird am Markt eingeführt. Man rechnet zu Beginn mit einer Nachfrage von annähernd 3 000 Stück/Monat, wobei man annimmt, dass die Nachfrage mit der Zeit sinken wird.
Längerfristig wird eine monatliche Absatzmenge von ca. S = 1 200 Stück/Monat erwartet. Die nachgefragte Menge sinkt monatlich um 5 % der jeweiligen Differenz aus der momentanen Absatzmenge und der Untergrenze von 1 200 Stück/Monat.

ABC

1) Erstelle die Funktionsgleichung für die Nachfrage mit dem Modell der beschränkten Abnahme: $f(t) = S \cdot (1 - b \cdot e^{-\lambda \cdot t})$
2) Erstelle den Graph für die monatliche Absatzmenge. Lies ab, wann nur mehr die Hälfte der ursprünglichen Stückzahl nachgefragt wird.

2.20 Ein neues Produkt wird am Markt eingeführt. Zu Beginn können 120 Einheiten verkauft werden. Man nimmt an, durch steigenden Bekanntheitsgrad wachsende Verkaufsziffern erreichen zu können. Gleichzeitig weiß man aber, dass sich die Verkaufszahlen nicht unbegrenzt steigern lassen. Nach 10 Wochen werden 230 Einheiten verkauft. Die Kapazitätsgrenze S liegt bei 600 Einheiten.

AB

1) Nimm beschränktes Wachstum an und berechne, wann das Dreifache des Anfangswerts verkauft wird.
2) Bestimme, welche Menge nach Jahresfrist noch verkauft werden kann.

Wachstumsprozesse

ABC **2.21** Ein Körper mit einer Temperatur von 60 °C wird einer Raumtemperatur von 20 °C ausgesetzt. Wird die Zeit in Sekunden gemessen, dann hat die Wachstumskonstante λ in diesem speziellen Fall den Wert $-4{,}6 \cdot 10^{-3}$.

1) Erstelle die Funktionsgleichung, die die Abkühlung im Laufe der Zeit beschreibt.

2) Zeichne die Abkühlkurve und interpretiere sie hinsichtlich folgender Fragen:

A) Zu welchem Zeitpunkt hat sich der Körper auf 30 °C abgekühlt?

B) Welche Temperatur hat der Körper nach einer Minute?

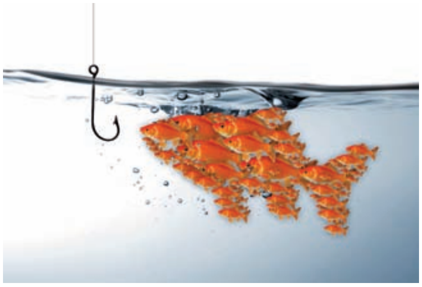
AB **2.22** Die Gussmasse für eine Schiffsschraube kühlt in ihrer Form in 28 Tagen von 1 000 °C auf 100 °C ab. Die Außentemperatur beträgt gleich bleibend 10 °C.

1) Bestimme die Gleichung der „Abkühlfunktion“.

2) Eine Weiterbearbeitung der Gussmasse ist erst bei einer Temperatur von 50 °C möglich. Berechne, wann das frühestens sein kann.

AB **2.23** Eine auf 2 °C abgekühlte Getränkeflasche wird aus dem Gefrierfach genommen, um bei einer Raumtemperatur von 22 °C genossen zu werden. Nach 6 Minuten hat das Getränk eine Temperatur von 8 °C.
Berechne, wann es getrunken werden sollte, wenn 15 °C seinen Geschmack am besten zur Geltung bringen.

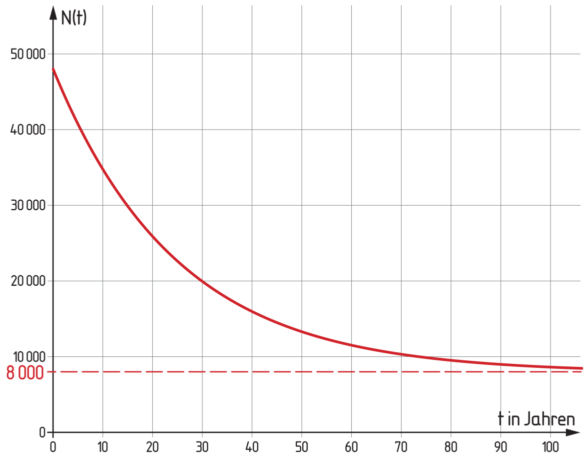
ABC **2.24** In einem Teich mit der Kapazität von 800 Fischen werden 12 Fische ausgesetzt.
Der jährliche Zuwachs beträgt jeweils zu Jahresbeginn 15 % der Restkapazität.



1) Erstelle die Funktionsgleichung für die Entwicklung der Fischpopulation.

2) Stelle grafisch die Entwicklung für die nächsten 8 Jahre dar und lies ab, wann die Kapazitätsgrenze ungefähr erreicht wird.

ABC **2.25** Die nebenstehende Grafik gibt die Entwicklung der Bevölkerung eines bestimmten Lands wieder, in dem die Bevölkerungszahl schrumpft.



t ... Zeit in Jahren
N(t) ... Anzahl der Bewohner/innen des Lands t Jahre nach Beobachtungsbeginn

1) Interpretiere diese Kurve und lies alle für die Beschreibung des Wachstums relevanten Werte ab (Anfangsbestand, jährlicher Zuwachs, untere Grenze).

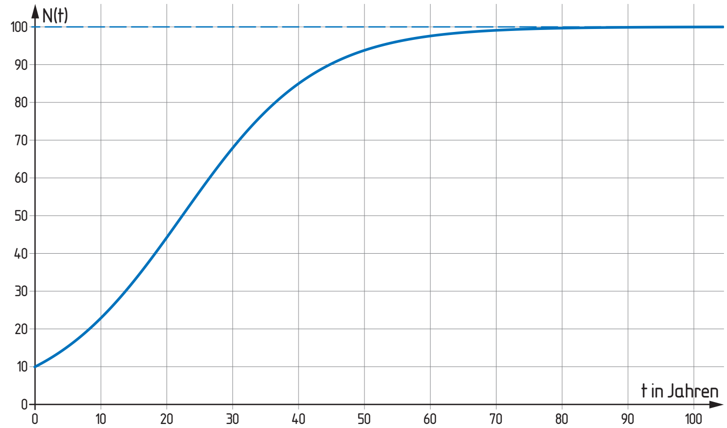
2) Lies einige Werte aus der Kurve ab und gib die Funktionsgleichung für das Bevölkerungswachstum an.

2.4 Logistisches Wachstum

Häufig kommt es vor, dass das Wachstum zu Beginn uneingeschränkt exponentiell verläuft und erst verzögert auf eine Kapazitätsgrenze reagiert.

2.26 Das Wachstum der Population von Grizzlybären im Yellowstone Nationalpark seit dem Jahre 1970 kann durch den folgenden Funktionsgraphen veranschaulicht werden. ABC

$N(t)$ ... Anzahl der Bären, t ... Zeit nach 1970 in Jahren



a) Interpretiere diese Kurve und lies alle für die Beschreibung des Wachstums relevanten Werte ab (Anfangsbestand, Zuwachs, obere Grenze).

b) Lies einige Werte aus der Kurve ab und gib die Funktionsgleichung für das logistische Wachstum der Bärenpopulation an.

Man kann deutlich den exponentiellen Verlauf zu Beginn erkennen. Zunächst waren im Jahre 1970 10 Bären vorhanden. Sie vermehrten sich exponentiell ungefähr 25 Jahre lang. Seit 1995 ist ein begrenztes Wachstum zu erkennen, das sich der Kapazitätsgrenze von 100 Bären nähert. Die Grenze wird nach diesem Modell ca. 2050 erreicht sein.

Die Funktionsgleichung dieser charkteristischen Kurve mit ihrem s-förmigen Verlauf lässt sich wieder erst mit Kenntnissen der Analysis (Differential- und Integralrechnung) herleiten, so dass hier die Funktionsgleichung nur angegeben werden kann:

Das **logistische Wachstum** kann mit der folgenden Funktionsgleichung annähernd dargestellt werden:

$$f(t) = \frac{S}{1 + c \cdot e^{\lambda \cdot t}}$$

S ... Kapazitätsgrenze (obere Grenze bei Zunahme, untere Grenze bei Abnahme)
c ... eine konstante reelle Zahl, die aus der Angabe berechnet werden kann
λ ... Wachstumskonstante
t ... Zeit
$f(t)$ ... Wachstumsgröße

Setze nun die Werte, die man gut ablesen kann, in die Gleichung ein:
$t = 0 \Rightarrow N(0) = 10$, $S = 100$, $t = 40 \Rightarrow N(40) = 85$
Wir benötigen zwei Gleichungen für c und λ.

$10 = \frac{100}{1 + c} \Rightarrow c = 9$

$85 = \frac{100}{1 + 9 \cdot e^{\lambda \cdot 40}} \Rightarrow \lambda \approx -0{,}983$ (Zum schnellen Rechnen mit Gleichungslöser arbeiten.)

Die Funktionsgleichung für das Wachstum der Bärenpopulation lautet: $N(t) = \frac{100}{1 + 9 \cdot e^{-0{,}0983 \cdot t}}$

ABC

TE

2.27 Steueraufkommen:

Die Steuereinnahmen eines Wirtschaftszweigs wachsen nach der Formel

$S(t) = \frac{6}{1 + 4 \cdot e^{\lambda \cdot t}}$.

t ... Zeit in Jahren

S(t) ... Steuereinnahmen nach t Jahren in Geldeinheit 100 000,00 €

Nach t = 3 Jahren betragen die Einnahmen bereits 270 000,00 €.

1) Berechne die Wachstumskonstante λ auf drei Dezimalstellen genau.

2) Zeichne den Funktionsgraphen in einem geeigneten Maßstab.
Interpretiere den Graphen hinsichtlich folgender Fragen:

A) Mit welchen Einnahmen wurde begonnen?

B) Zu welchem Zeitpunkt steigt das Steueraufkommen am raschesten?

C) Wie hoch ist die Obergrenze der Steuereinnahmen?

Lösung:

1) Setze die Angaben in die Formel ein:

$t = 3 \Rightarrow S(3) = 2{,}7$

$2{,}7 = \frac{6}{1 + 4 \cdot e^{3\lambda}}$ ... Die Gleichung mit Gleichungssolver lösen oder per Hand:

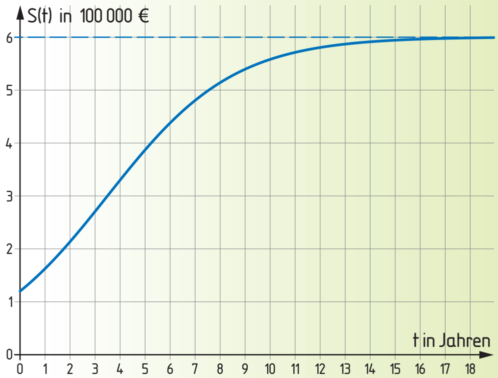
$$2{,}7 \cdot (1 + 4 \cdot e^{3\lambda}) = 6 \qquad |:2{,}7 \quad |-1$$

$$4 \cdot e^{3\lambda} = \frac{11}{9} \qquad |:4 \quad |\ln$$

$$3\lambda = \ln\left(\frac{11}{36}\right)$$

$$\lambda = -0{,}395$$

2)



A) Einnahmen zu Beginn: 120 000,00 €

B) Zwischen dem 3. und 4. Jahr und dem 4. und 5. Jahr ist der Anstieg der Kurve am steilsten, dort steigt das Steueraufkommen am raschesten. Der jährliche Zuwachs beträgt in diesen beiden Jahren ungefähr 60 000,00 €.

C) Die Obergrenze liegt bei 600 000,00 €.

2.28 **You are the expert** (nach Waner & Costenoble, Calculus Applied to the Real World): ABC TE
A mysterious epidemic is spreading to the population of the United States.
An estimated 150 000 000 people are susceptible to this particular desease.
There are 10 000 people already infected, and the number is doubling every two months.
As advisor to the Surgeon General, it is your job to predict the course of the epidemic.
In particular, the Surgeon General needs to know when the desease will have infected 1 000 000 people, when it will have reached 10 000 000, and when it will have affected 100 000 000 people.
Although the initial spread of an epidemic appears to be exponential, it cannot continue to be so, since the susceptible population is limited. A commonly used model for epidemics is the logistic curve, given by the function:

$$A(t) = \frac{S}{1 + c \cdot e^{\lambda \cdot t}}$$

where A(t) is the infected population at time and S the total susceptible population. The number λ is a constant that governs the rate of spread of the epidemic.

1) Fertige eine Übersetzung des Texts an.
2) Bestimme die logistische Wachstumskurve und zeichne sie.
3) Beantworte die Fragen des Surgeon General.

2.29 Der Absatz eines Produkts auf einem Markt mit begrenzter Marktkapazität nimmt zu, wobei jeder potenzielle Käufer das Produkt nur einmal erwirbt. Die Kapazitätsgrenze liegt bei 1 500 Exemplaren. Man startet mit der Verteilung von 20 Exemplaren des Produkts. Der Absatz im 1. Monat beträgt 34 Exemplare. ABC TE

1) Stelle die Vermehrung der Absatzmengen mit einer geeigneten logistischen Funktion dar.
2) Zeichne den Funktionsgraphen und interpretiere die Grafik hinsichtlich folgender Fragen:
   A) Wann wird die halbe Marktkapazität erreicht?
   B) Wann wird die 1 000-Einheiten-Grenze übersprungen?

2.30 In einer Stadt mit ca. 40 000 Einwohnern sei die Anzahl N(t) derer, die nach t Tagen von einem bestimmten Gerücht gehört haben, näherungsweise durch folgende Funktionsgleichung gegeben: ABCD TE

$$N(t) = \frac{40\,000}{1 + 39\,999 \cdot e^{-2{,}5 \cdot t}}$$

1) Zeichne den Funktionsgraphen und interpretiere ihn hinsichtlich folgender Fragen:
   A) Wie viele Personen wissen nach 3 Tagen von dem Gerücht?
   B) Wie lange dauert es, bis die halbe Stadt davon weiß?
   C) Zu welchem Zeitpunkt ist das Gerücht am lebendigsten?
   D) Bis wann ist deiner Meinung nach auch der letzte Bürger davon informiert?
2) Argumentiere, welche Größe in der Funktionsgleichung für die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Gerüchts verantwortlich ist. Gib an, wie man diese Größe verändern muss, um eine langsamere Verbreitung zu beschreiben.

Wachstumsprozesse

Zusammenfassung

Lineares Wachstum
Die lineare Zunahme (oder die lineare Abnahme) einer Größe lässt sich durch das Modell einer Geraden beschreiben. Der Geradenanstieg k liefert die so genannte **Wachstumsrate**, das ist der **Zuwachs** (bzw. die Abnahme) der jeweiligen Wachstumsgröße pro Zeiteinheit (oder Längeneinheit). Sie ist bei linearem Wachstum konstant.
Zu beachten: Bei Abnahmen ist die Wachstumsrate negativ.

Exponentielles Wachstum
Beide Wachstumsprozesse, die exponentielle Zunahme und die exponentielle Abnahme (exponentieller Zerfall) sind gekennzeichnet durch eine **konstante prozentuelle Veränderung**. Bei exponentiellem Wachstum ist der so genannte **Wachstumsfaktor** konstant.
Man versteht unter einem **Wachstumsfaktor** jene Zahl, mit der man einen Anfangswert multipliziert um einen späteren Wert zu erhalten. Er wird bezogen auf eine Einheit angegeben. Daher gilt:
Wachstumsfaktor a = 1 + Wachstumsrate in Prozent p also: $\mathbf{a = 1 + \frac{p}{100}}$.
Das exponentielle Wachstum lässt sich mithilfe einer Exponentialfunktion

$$f(t) = c \cdot a^t \quad \text{oder} \quad f(t) = c \cdot e^{\lambda \cdot t}$$

darstellen, wobei c und a positive reelle Zahlen sind,
λ ... Wachstumskonstante, ist bei Zunahmeprozessen **positiv**, die Funktion steigt.
λ ist bei Abnahmeprozessen **negativ**, die Funktion ist fallend.

Die exponentielle Zunahme wird durch die so genannte **Verdoppelungszeit T**, in der die Größe den doppelten Wert annimmt, charakterisiert. Analog spricht man bei Abnahmeprozessen von der **Halbwertszeit T**, in der die Größe auf die Hälfte schrumpft.

Beschränktes Wachstum kann mit der folgenden Funktionsgleichung dargestellt werden:

$$f(t) = S \cdot (1 - b \cdot e^{\lambda \cdot t})$$

S ... Kapazitätsgrenze (obere Grenze bei der Zunahme)
b ... eine konstante reelle Zahl, die aus der Angabe berechnet werden kann
λ ... Wachstumskonstante
t ... Zeit
f(t) ... Wachstumsgröße

Logistisches Wachstum kann mit der folgenden Funktionsgleichung annähernd dargestellt werden:

$$f(t) = \frac{S}{1 + c \cdot e^{\lambda \cdot t}}$$

S ... Kapazitätsgrenze (obere Grenze bei Zunahme, untere Grenze bei Abnahme)
c ... eine konstante reelle Zahl, die aus der Angabe berechnet werden kann
λ ... Wachstumskonstante
t ... Zeit
f(t) ... Wachstumsgröße

Die Abhängigkeit der Wachstumsgröße ist nicht allein auf die Zeit beschränkt, es kann zB auch eine Abhängigkeit von der Länge x bestehen! Es gelten die selben Gleichungen, t wird durch x ersetzt.

Weitere Aufgaben

2.31 Eine Regentonne fasst 300 ℓ Wasser und beinhaltet momentan 30 ℓ Wasser. Während eines Dauerregens fließen 3,6 ℓ Regenwasser pro Minute zu. ABCD

1) Stelle eine geeignete lineare Funktionsgleichung auf, die die Zunahme des Wassers in der Tonne annähernd beschreibt.
2) Berechne, wann die Tonne halb voll und wann sie ganz voll ist.
3) Die Regentonne ist voll. Durch ein kleines Loch im Boden versickern unbemerkt 2,5 ℓ pro Stunde.
Zeichne dazu den passenden Funktionsgraphen und interpretiere ihn hinsichtlich folgender Fragen:
A) Wann ist die Tonne halb leer?
B) Wann ist die Tonne leer?
C) Wie viel Liter Wasser beinhaltet die Tonne nach 2 Stunden?

2.32 Ein See mit einer Wasserfläche von 12 000 m^2 wird von einer Sorte sich rasch vermehrender Wasserpflanzen langsam zugedeckt. Ursprünglich sind etwa 500 m^2 bedeckt, doch vermehren sich die Pflanzen wöchentlich um den Prozentsatz p der gerade freien Wasserfläche. AB

1) Ermittle die Funktionsgleichung für das beschränkte Wachstum, wenn der See nach 39 Wochen zu 99 % zugedeckt ist.
2) Berechne, wann der See zu 75 % bedeckt sein wird.
3) Zeichne den Graphen und zeichne die berechneten Werte ein.

2.33 Das Isotop Beryllium-8 hat eine Halbwertszeit von $2 \cdot 10^{-16}$ s. AB

1) Berechne die Zerfallskonstante λ.
2) Berechne, nach welcher Zeit noch 30 % der ursprünglichen Kerne vorhanden sind.

2.34 Das Isotop Uran-238 hat eine Halbwertszeit von $4{,}5 \cdot 10^9$ Jahre. AB

1) Berechne die Zerfallskonstante λ.
2) Berechne, nach welcher Zeit noch 30 % der ursprünglichen Kerne vorhanden sind.

2.35 Für den Zerfall des radioaktiven C-14 kennst du bereits die Halbwertszeit von 5 730 Jahren. AB
Bestimme das Alter eines Fossils, dessen C-14-Anteil noch **a)** 4 %, **b)** 5,5 %, **c)** 8 %, **d)** 15 % beträgt.

2.36 Mit den neu erworbenen Kenntnissen über das beschränkte Wachstum (die beschränkte Zu- bzw. Abnahme) möchtest du im kommenden Monat dein Taschengeld von 60,00 € verwalten. Am ersten Tag willst du 12,00 € ausgeben, am Monatsende (nach 30 Tagen) sollen dir noch ca. 6,00 € übrig bleiben. ABC

1) Stelle das Funktionsmodell auf und zeichne die Graphen.
2) Fertige eine Tabelle mit dem täglichen Restbestand deines Taschengelds an.
3) Gib an, nach wie vielen Tagen die Ausgaben unter 1,00 € sinken müssen.

ABC TE **2.37** Die Verkaufszahlen eines neuen Smartphones an einem bestimmte Standort lassen sich durch die folgende Funktion näherungsweise beschreiben:

$y(t) = \frac{400}{1 + 3 \cdot e^{-0{,}08 \cdot t}}$

t ... Anzahl der Tage

y(t) ... Verkaufszahlen nach t Tagen

1) Zeichne die Funktion in ein geeignetes Koordinatensystem. Lies aus der Zeichnung die Anzahl verkaufter Smartphones nach einem Tag und nach 10 Tagen ab.

2) Berechne, wann mehr als 380 Smartphones verkauft werden.

ABC TE **2.38** Rabbits, Rabbits everywhere (nach Demana & Waits, Calculus):

The population of rabbits in a certain area is given

$P(t) = \frac{1\,000}{1 + 121{,}51 \cdot e^{-0{,}7 \cdot t}}$

where t is the number of months after a few rabbits are released.

Try to answer the following questions first by inspecting the function graph and/or the value table.

Then confirm your answer numerically.

1) Estimate the initial number of rabbits released.

2) What is the maximum possible number of rabbits that this area can sustain?

3) When, if ever, will the number of rabbits be 700?

4) When will the rate at which the rabbits reproduce be a maximum?