

James Joseph Sylvester (1814 – 1897) war ein britischer Mathematiker. Eines seiner vielseitigen Arbeitsgebiete war die Theorie von Matrizen und Determinanten. Die Bezeichnung „Matrix“ wurde 1850 von ihm eingeführt. Matrizen sind ein Grundkonzept der linearen Algebra. Sie spielen in vielen Gebieten der Mathematik eine Rolle und erleichtern komplexere Rechengänge. Hauptsächlich angewendet werden sie bei der Darstellung von linearen Abbildungen, wie zB der Gozintographen im Wirtschaftsbereich und zur Beschreibung und Lösung von linearen Gleichungssystemen. Matrizen stellen Tabellen, die wirtschaftliche, technische oder naturwissenschaftliche Vorgänge veranschaulichen, als selbstständige Rechenobjekte dar. Das Rechnen mit Matrizen liefert daher Methoden, die zur Weiterverarbeitung tabellierter Zahlenwerte dienen.



2.1 Definition

ABC

2.1 Ein Betrieb erzeugt aus den Rohstoffen R_1, R_2, R_3 und R_4 drei Produkte P_1, P_2 und P_3 . In der Tabelle wird aufgelistet, wie viele Mengeneinheiten ME man jeweils für je eine Einheit der Produkte braucht. Stelle die Tabelle als Bedarfsmatrix dar. Veranschauliche die Materialverflechtung in einem Gozintographen.

$R \rightarrow P$	P_1	P_2	P_3
R_1	1	3	4
R_2	0	4	5
R_3	5	1	3
R_4	1	2	0

Um diese Aufgabe lösen zu können, benötigen wir einige neue Definitionen und Klärungen von Begriffen. Was ist eine Matrix?

Die **Matrix vom Typ $(m \times n)$** ist ein in eine Klammer gesetztes rechteckiges Zahlenschema, das aus **m Zeilen** und **n Spalten** besteht. Matrizen werden meist mit Großbuchstaben bezeichnet.

Die Zahlen der Matrix werden **Elemente** genannt. Allgemein bezeichnet man sie mit Kleinbuchstaben und einem Index ij , wobei i die Nummer der Zeile und j die Nummer der Spalte angibt, wo sich das Element in der Matrix befindet. Eine Matrix, die nur aus einer Zeile oder nur aus einer Spalte besteht, wird auch „**Vektor**“ genannt, zB $(3 \ 4 \ 5)$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}$$

a_{32} ... Element in der 3. Zeile und 2. Spalte

Eine Matrix, die den Bedarf an Rohstoffen für die Erzeugung der 3 Produkte im Beispiel darstellen soll, enthält nur mehr das Wesentliche, nämlich die Darstellung der Zahlenwerte. Damit man einen inhaltlichen Anhaltspunkt hat, ist zu empfehlen, dass man für die Matrixbezeichnung 2 Buchstaben benützt. ZB: RP ... von R nach P .

$$RP = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Bedarfsmatrix

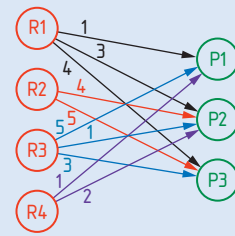
Man liest die Matrix in **Richtung von der Zeile in die Spalte**.

Die grafische Veranschaulichung einer solchen Bedarfsmatrix geschieht mit dem so genannten Gozintographen.

Der **Gozintograph** hat seinen Namen von „**goes into**“, das bedeutet, es wird eine Richtung angegeben.

Ein Gozintograph beschreibt, aus welchen Teilen sich ein oder mehrere Produkte zusammensetzen bzw. wie diese mengenmäßig miteinander verflochten sind.

ZB: Zur Tabelle bzw. zur Matrix in unserem Eingangsbeispiel können wir nebenstehenden einfachen Gozintographen erstellen.



Je nach Anzahl der Zeilen bzw. der Spalten unterscheidet man

Spezielle Arten von Matrizen

- **Zeilenvektor**

Einzeilige Matrix, zB: $A = (3 \ -1 \ 0 \ 2)$

- **Spaltenvektor**

Einspaltige Matrix, zB: $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Im Wirtschaftsbereich sind hier besonders 3 Vektoren häufig im Einsatz: der **Produktionsvektor** X , der **Nachfragevektor** N und der **Preisvektor** P . Der Produktionsvektor gibt die Mengen an, die im betrachteten Produktionsprozess hergestellt werden. Der Nachfragevektor enthält jene Mengen, die von dem Produkt auf dem Markt nachgefragt werden und der Preisvektor die Zusammenfassung der Verkaufspreise pro Mengeneinheit für mehrere Produkte.

Die Anzahl der Zeilen m und Spalten n einer Matrix bestimmen den **Typ** der Matrix:

- **Quadratische Matrix**

Es gibt gleich viele Zeilen und Spalten, zB (3×3) -Matrix: $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ -1 & 12 & 1 \\ 0 & 9 & 7 \end{pmatrix}$

Die Anzahl der Zeilen und Spalten einer quadratischen Matrix wird als **Ordnung** bezeichnet. Eine $(m \times m)$ -Matrix hat die Ordnung m .

- **Nullmatrix O**

Alle Elemente der Matrix haben den Wert null, zB: $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

- **Einheitsmatrix E**

Diagonalmatrix, bei der alle Elemente der Hauptdiagonale gleich 1 sind. Einheitsmatrizen sind immer quadratisch.

$$\text{ZB: } E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- **Transponierte Matrix**

Aufgrund der jeweiligen Aufgabenstellung kann es beim Rechnen mit Matrizen notwendig sein, die Daten aus Zeilen und Spalten einer Matrix A zu vertauschen. Die auf diese Art entstehende Matrix A^T nennt man die transponierte Matrix von A .

$$\text{ZB: } A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Im Anwendungsbereich hat man es meist mit Größen zu tun, die einander durch die Matrix zugeordnet werden. ZB Geräte G werden bestimmten Filialen F zugeordnet, man könnte die Zuordnungsmatrix mit GF bezeichnen. Die Elemente von G sind in den Zeilen, die Elemente von F in den Spalten angeordnet. Beim Transponieren werden sie vertauscht.

Matrizen

ABC

2.2 An 3 Filialen F_1, F_2 und F_3 eines Geschäfts werden 3 Geräte G geliefert: Bildschirm B , Receiver R und USB-Sticks U .

Die Anzahl der Geräte ist in der Tabelle aufgelistet.

Stelle die Tabelle als Matrix dar.

Beschreibe den Typ der Matrix.

Erkläre, was das Element a_{32} aussagt.

Veranschauliche die Zuordnung mit einem Gozintographen.

Erkläre, was das Element b_{32} in der transponierten Matrix aussagt.

Lösung:

$$\text{Matrix: } GF = \begin{pmatrix} 54 & 26 & 43 \\ 12 & 5 & 14 \\ 123 & 88 & 105 \end{pmatrix}$$

Es handelt sich um eine quadratische (3×3)-Matrix.

$a_{32} = 88 \dots$ 3. Zeile, 2. Spalte: Anzahl der gelieferten USB-Sticks an die 2. Filiale

Transponierte Matrix:

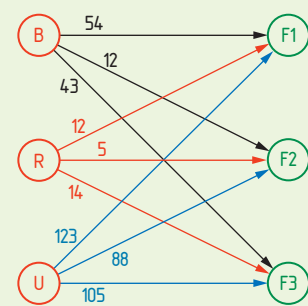
$$GF^T = FG = \begin{pmatrix} 54 & 12 & 123 \\ 26 & 5 & 88 \\ 43 & 14 & 105 \end{pmatrix}$$

$b_{32} = 14 \dots$ Anzahl der an die 3. Filiale gelieferten Receiver



$G \rightarrow F$	F_1	F_2	F_3
B	54	26	43
R	12	5	14
U	123	88	105

Grafische Darstellung von GF :



BCD

2.3 Zur Herstellung von Produkten P_1, P_2, P_3 und P_4 werden von einem Betrieb mehrere Rohstoffe R_1, R_2 und R_3 in unterschiedlichen Mengen benötigt. Die Zusammensetzungen sind in einer Tabelle angegeben, wobei die Zahlenwerte die erforderlichen Mengeneinheiten (ME) wiedergeben.

a) Stelle die Tabelle als Matrix RP dar.

Beschreibe den Typ der Matrix.

Erkläre, was das Element a_{24} aussagt.

b) Veranschauliche die Materialverflechtung mit einem Gozintographen.

c) Erkläre, was das Element b_{42} in der transponierten Matrix aussagt.

	P_1	P_2	P_3
R_1	1	3	4
R_2	0	4	5
R_3	5	1	3
R_4	1	2	0

BD

2.4 Gib den Typ der Matrix an und bestimme die angegebenen Elemente.

a) $M = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 7 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}; m_{23}, m_{11}, m_{13}, m_{21}$

b) $F = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}; f_{14}, f_{12}, f_{13}, f_{11}$

c) $K = \begin{pmatrix} -3 & 12 & 0 \\ 15 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}; k_{32}, k_{23}, k_{12}, k_{31}$

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; a_{33}, a_{12}, a_{24}, a_{21}$

2.5 Transponiere die Matrix.

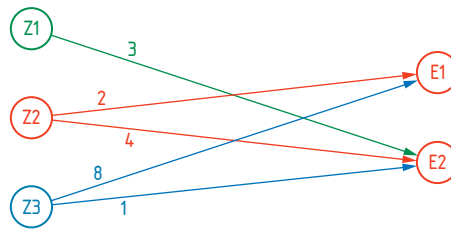
a) $M = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & 8 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ b) $N = \begin{pmatrix} 10 & -10 \\ 5 & 20 \\ 1 & -10 \end{pmatrix}$ c) $K = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$ d) $B = \begin{pmatrix} a & 0 & -b & 1 \\ b & 0 & 1 & a \\ c & 1 & e & 0 \\ -c & -e & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2.6 Argumentiere anhand eines selbstgewählten Beispiels ...

... welche Art von Matrix entsteht, wenn man einen Zeilenvektor transponiert.

... welche Matrix entsteht, wenn man eine Einheitsmatrix transponiert.

2.7 Interpretiere den folgenden Gozintographen, bei dem aus Zwischenprodukten Endprodukte erzeugt werden sollen.

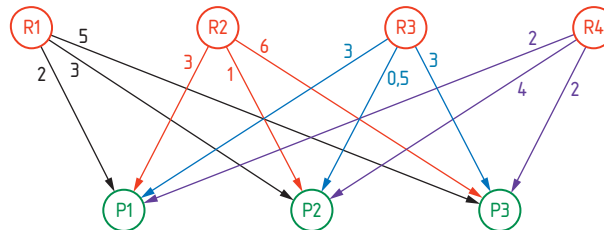


Erstelle die dazu passende Bedarfsmatrix.

Transponiere die Matrix.

Erkläre, was das Element a_{21} in der transponierten Matrix aussagt.

2.8 Interpretiere den gegebenen Gozintographen, der einen Rohstoff-Bedarf für die Erzeugung von 3 Produkten in Mengeneinheiten (ME) visualisiert.



Erstelle die dazu passende Bedarfsmatrix.

Transponiere die Matrix.

Erkläre, was das Element a_{13} in der transponierten Matrix aussagt.

2.9 Für die Erzeugung zweier Produkte werden die dafür benötigten Rohstoffe R_1 , R_2 und R_3 pro Tonne in der folgenden Matrix beschrieben.

$$RP = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 3 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$$

Ein Kunde bestellt 140 Tonnen eines Endprodukts P_1 sowie 240 Tonnen eines Endprodukts P_2 .

Stelle den Bedarf an Rohstoffen pro Tonne der Endprodukte in einem Gozintographen dar.

Ermittle, wie viel Tonnen der Rohstoffe R_1 bis R_3 jeweils für die Produktion von P_1 und P_2 an die Firma geliefert werden müssen.



B

D

ABCD

ABCD

AB

2.2 Rechnen mit Matrizen

2.2.1 Addition, Subtraktion und Multiplikation mit einer reellen Zahl

ABD



2.10 Ein Smartphone-Hersteller hat die Verkaufszahlen zweier Handy-Modelle MoTeen und MoTwen von 3 Vertriebsfilialen F_1 , F_2 und F_3 für die Monate März und April in Form von den nebenstehenden Tabellen festgehalten. Stelle beide Tabellen als Matrizen dar.

- Berechne, wie viele von jedem Modell in jeder der 3 Filialen in beiden Monaten verkauft wurden.
- Im Mai haben sich die Verkaufszahlen von April verdoppelt. Berechne die Verkaufszahlen für den Monat Mai.
- MoTeen wird um 230 € verkauft, MoTwen kostet 260 €. Stelle die Preisvektoren dar.
- Erkläre, wie man mit der Matrix für den Monat Mai und der Preismatrix eine Matrix für den Umsatz der einzelnen Filialen ermitteln kann.



März	F_1	F_2	F_3
MoTeen	89	56	0
MoTwen	31	22	86

April	F_1	F_2	F_3
MoTeen	7	18	93
MoTwen	72	0	78

Um die Aufgabe lösen zu können, musst du wissen, wie Matrizen addiert und mit einer reellen Zahl – die man im Zusammenhang mit Matrizen auch als **Skalar** bezeichnet – multipliziert werden.

- Addition und Subtraktion von Matrizen gleichen Typs:
Gleichplatzierte Elemente werden addiert bzw. subtrahiert.

$$\text{ZB: } \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 + (-3) & (-5) + 1 \\ 2 + (-1) & 1 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - (-3) & (-5) - 1 \\ 2 - (-1) & 1 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrizen unterschiedlichen Typs können weder addiert noch subtrahiert werden.

- Multiplikation mit einem Skalar:
Jedes Element der Matrix wird mit dem Skalar multipliziert.

$$\text{ZB: } 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 & 2 \cdot (-5) \\ 2 \cdot 2 & 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -10 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Matrizen können nur dann addiert bzw. subtrahiert werden, wenn die Anzahl ihrer Zeilen m und ihrer Spalten n gleich sind.

Man addiert bzw. subtrahiert paarweise die entsprechenden gleichplatzierten Elemente. Als Ergebnis erhält man eine Matrix von gleichem $(m \times n)$ -Typ wie beide Ausgangsmatrizen.

Weiters gilt:

- Die Addition ist **kommutativ** und **assoziativ**: $A + B = B + A$, $A + (B + C) = (A + B) + C$
- $A + O = A$ und $A + (-A) = O$ mit $O \dots$ Nullmatrix
- $1 \cdot A = A$ und $0 \cdot A = O$
- $s \cdot (A \pm B) = s \cdot A \pm s \cdot B$ und $(s \pm t) \cdot A = s \cdot A \pm t \cdot A$ mit $s, t \in \mathbb{R}$

Mit diesen Kenntnissen lassen sich die Aufgaben des Eingangsbeispiels lösen:

a) Die beiden Matrizen:

$$\text{März: } F_1 = \begin{pmatrix} 89 & 56 & 0 \\ 33 & 22 & 86 \end{pmatrix}; \text{ April: } F_2 = \begin{pmatrix} 7 & 18 & 93 \\ 72 & 0 & 78 \end{pmatrix}$$

$$F_1 + F_2 = \begin{pmatrix} 96 & 74 & 93 \\ 105 & 22 & 164 \end{pmatrix}$$

b) Mai: $2 \cdot \begin{pmatrix} 7 & 18 & 93 \\ 72 & 0 & 78 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 36 & 186 \\ 144 & 0 & 156 \end{pmatrix}$

c) Preisvektor: $P = \begin{pmatrix} 230 \\ 260 \end{pmatrix}$

d) Die erste Zeile stellt den Absatz in den Filialen des Modells MoTeen, die zweite Zeile jene des Modells MoTwen dar. Daher muss man die Elemente der ersten Zeile mit 230 und die Elemente der 2. Zeile mit 260 multiplizieren. Um die Gesamtumsätze je eines Modells in allen drei Filialen zu erhalten, bildet man die Zeilensumme.



Im nächsten Abschnitt wird gezeigt, wie man dies mit einer einzigen Matrizenoperation berechnen kann.

Obwohl dieses Beispiel sehr einfach zu lösen war, interessiert es dich ja sicher, wie man diese Berechnungen mithilfe von Technologieinsatz durchführt.

TI-Nspire:

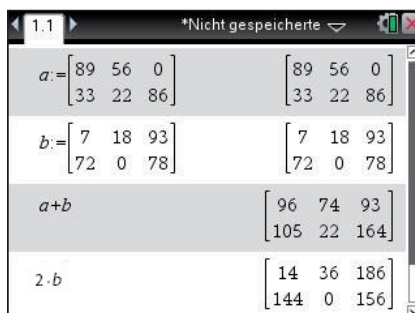
Im Menü den Calculator öffnen.

Definiere die Matrix mithilfe eines Buchstaben: **a :=**

Das Definitionszeichen ist in der 2. Ebene über der Vorlagentaste.

Für Matrizen gibt es Vorlagen. Drücke die Vorlagentaste. Es öffnet sich ein Dialogfenster, in dem du die Anzahl der Zeilen und Spalten der Matrix eingeben kannst.

Wiederhole den Vorgang mit der 2. Matrix und führe die Berechnungen durch:



Transponieren einer Matrix: **Menu 7Matrix und Vektoren/2 Transponieren**



Die Bedienung von TI 82-84, EXCEL und Geogebra bei Matrizenrechnung
siehe www.hpt.at (Schulbuch Plus für Schüler/innen)

Matrizen

B



2.11 Ein Betrieb stellt 3 Güter G_1 , G_2 und G_3 her. Er liefert sie an 4 Filialen F_1 , F_2 , F_3 und F_4 . Die Liefermatrizen für 2 Monate sind die folgenden:

1. Monat: $\begin{pmatrix} 12 & 8 & 0 & 20 \\ 7 & 5 & 20 & 10 \\ 14 & 4 & 6 & 15 \end{pmatrix}$ 2. Monat: $\begin{pmatrix} 13 & 12 & 5 & 10 \\ 13 & 7 & 8 & 20 \\ 12 & 8 & 7 & 15 \end{pmatrix}$

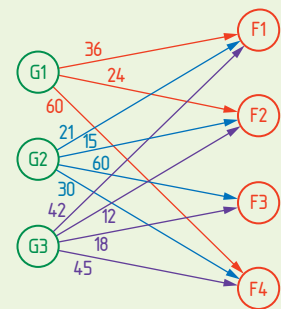
- a) Berechne die Gesamtlieferung an die einzelnen Filialen.
- b) Der Betrieb möchte im 3. Monat das Ergebnis des 1. Monats verdreifachen. Man stellt sich vor, dass man an alle Filialen die dreifache Menge der Güter G_1 , G_2 und G_3 sendet. Berechne die „Liefermatrix“. Stelle die „Liefermatrix“ grafisch dar.



Lösung:

a) $\begin{pmatrix} 12 & 8 & 0 & 20 \\ 7 & 5 & 20 & 10 \\ 14 & 4 & 6 & 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 13 & 12 & 5 & 10 \\ 13 & 7 & 8 & 20 \\ 12 & 8 & 7 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 20 & 5 & 30 \\ 20 & 12 & 28 & 30 \\ 26 & 12 & 13 & 30 \end{pmatrix}$

b) $3 \cdot \begin{pmatrix} 12 & 8 & 0 & 20 \\ 7 & 5 & 20 & 10 \\ 14 & 4 & 6 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 & 24 & 0 & 60 \\ 21 & 15 & 60 & 30 \\ 42 & 12 & 18 & 45 \end{pmatrix}$



B



2.12 Die Nettopreise für 3 Produkte P_1 , P_2 und P_3 in Euro pro Stück in 3 Filialen F_1 , F_2 und F_3 betragen:

$$PF = \begin{pmatrix} 122 & 112 & 120 \\ 214 & 200 & 220 \\ 168 & 170 & 165 \end{pmatrix}$$

Berechne die Bruttopreise mit 20 % Mehrwertsteuer.

ABC



2.13 Eine Firma lieferte in den vergangenen 2 Jahren an 3 Standorte ST_1 , ST_2 , ST_3 folgende Mengen von 3 Produkten P_1 , P_2 und P_3 :

Vorletztes Jahr:

$P \rightarrow ST$	ST_1	ST_2	ST_3
P_1	1 250	2 500	0
P_2	1 000	1 400	900
P_3	1 300	0	2 000

Letztes Jahr:

$P \rightarrow ST$	ST_1	ST_2	ST_3
P_1	1 050	0	1 480
P_2	0	1 200	900
P_3	1 270	500	0

- a) Berechne die gesamte Lieferung der 3 Produkte beider Jahre an die einzelnen Standorte mithilfe der beiden „Liefermatrizen“.
- b) Beschreibe die Veränderung der Lieferung in den beiden Jahren.
- c) Für das laufende Jahr erwartet man eine generelle Zunahme um 1,2 % gegenüber dem letzten Jahr. Erstelle die neue voraussichtliche Liefertabelle.

- 2.14** Die Kosten K_1 , K_2 und K_3 für die Herstellung von 3 unterschiedlichen Produkten betragen im ersten Quartal 60 €, 75 € bzw. 79 € und im zweiten Quartal 95 €, 102 € bzw. 115 €.

- a) Ermittle den Kostenzuwachs im 2. Quartal.
b) Durch Einsparungsmaßnahmen sollen die Kosten im 3. Quartal generell um 3 % gesenkt werden.
Erstelle die neue Kostenmatrix für das 3. Quartal.

- 2.15** Eine Firma erzeugt 2 Typen von Maschinen M_1 und M_2 in 2 Fabriken. An 5 Tagen T_1 bis T_5 der Woche ist die Produktion in Mengeneinheiten (ME) in den folgenden Tabellen angegeben:

1. Fabrik

$M \rightarrow T$	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
M_1	36	34	38	35	18
M_2	30	28	32	29	15

2. Fabrik

$M \rightarrow T$	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
M_1	26	32	29	37	22
M_2	28	30	27	31	20

- a) Berechne die tägliche Gesamtproduktion von M_1 und M_2 in den beiden Fabriken.
b) Beschreibe die unterschiedlichen Herstellungsmengen in den beiden Produktionsstätten.
c) In der 2. Fabrik sollte die Produktion um 25 % angekurbelt werden.
Berechne, welche Produktionsmengen dies ergibt.

- 2.16** 4 Studentinnen S_1 bis S_4 bekommen ein monatliches Taschengeld G_1 von ihren Eltern. Daneben haben sie ein regelmäßiges monatliches Einkommen G_2 durch Nachhilfestunden.

$S \rightarrow G$	G_1 in €/Monat	G_2 in €/Monat
S_1	100	215
S_2	90	185
S_3	110	280
S_4	120	100



- a) Interpretiere anhand von Matrizen den Unterschied zwischen dem monatlichen Taschengeld und dem zusätzlich verdienten Monatseinkommen.
b) Erstelle eine Matrix, die angibt, wie viel jede Studentin pro Jahr Taschengeld und zusätzlich verdientes Geld einnimmt.

- 2.17** In der Zentrale einer großen Elektronikfirma sind die Verkaufszahlen der Sommermonate M_1 , M_2 und M_3 von den Produkten P_1 , P_2 bzw. P_3 aus zwei Vertriebsfilialen A und B in Tabellenform eingelangt. Der Geschäftsführer der Filiale C gibt an, jeweils doppelt so viel Produkte verkauft zu haben wie in Filiale A verkauft wurden.

A	F_1	F_2	F_3
M_1	154	112	223
M_2	126	105	188
M_3	143	114	205

B	M_1	M_2	M_3
F_1	131	134	158
F_2	114	125	116
F_3	243	214	167

- a) Erstelle in Matrizenschreibweise die Formel, mit der die Gesamtverkaufszahlen aller drei Filialen A, B und C in den 3 Sommermonaten berechnet werden kann.
b) Berechne die Verkaufsmatrix für die 3 Sommermonate.

AB



BC



AB



ABC



2.2.2 Die Multiplikation von Zeilenvektoren mit Spaltenvektoren

AB

2.18 Julius hat einen Einkaufszettel mitbekommen. Er soll 1 kg Mehl, 20 Eier, 3 l Milch und 2 kg Äpfel einkaufen. Es gelten die folgenden Preise für die Produkte, die Julius gewählt hat:

	1 kg Mehl	10 Eier	1 l Milch	1 kg Äpfel
Preis/Einheit	0,35 €	1,29 €	0,72 €	1,1 €



Stelle den Mengen- und den Preisvektor auf.
Ermittle, wie viel Geld Julius ausgehen wird.

Diese Aufgabe lässt sich ganz leicht auch ohne Matrizen mit einfachster Mathematik lösen. Hier jedoch soll sie dazu dienen, grundlegendes Verständnis für die Multiplikation von 2 Vektoren (das sind einzeilige oder einspaltige Matrizen) zu erarbeiten.

Wir stellen die Liste der Preise in Form eines Spaltenvektors dar: $\vec{p} = \begin{pmatrix} 0,35 \\ 1,29 \\ 0,27 \\ 1,1 \end{pmatrix}$

(Um anzudeuten, dass ein Vektor vorliegt, schreibt man häufig statt der Matrix-Großbuchstaben einen kleinen Buchstaben mit einem Pfeil.)

Die Liste der benötigten Mengen schreiben wir in Form eines Zeilenvektors: $\vec{m} = (1 \ 2 \ 3 \ 2)$. Die Multiplikation der Mengen und Preise ergibt die insgesamt benötigte Geldsumme – also eine Zahl (= Skalar).

Daher muss die Multiplikation der beiden Vektoren dementsprechend definiert werden.

Es wird jedes Zeilenelement mit dem passenden Spaltenelement multipliziert und die so erhaltenen Produkte addiert.

$$\vec{m} \cdot \vec{p} = (1 \ 2 \ 3 \ 2) \cdot \begin{pmatrix} 0,35 \\ 1,29 \\ 0,27 \\ 1,1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 0,35 + 2 \cdot 1,29 + 3 \cdot 0,72 + 2 \cdot 1,1 = 7,29 \text{ €}$$

Zeilenvektor mal Spaltenvektor nennt man das „**Skalarprodukt von 2 Vektoren**“

Skalarprodukt von 2 Vektoren = Zeile $\vec{z}$ mal Spalte $\vec{s}$:

$$(z_1, z_2) \cdot \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = z_1 \cdot s_1 + z_2 \cdot s_2 \dots \text{Skalar}$$

B 2.19 Multipliziere die beiden Vektoren.

a) $(26 \ 9) \cdot \begin{pmatrix} 1,7 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $(2,3 \ 0 \ 1,2) \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 13 \\ -8 \end{pmatrix}$

c) $(3 \ 4 \ 1 \ 2) \cdot \begin{pmatrix} 716 \\ -133 \\ 185 \\ 824 \end{pmatrix}$

d) $(2x \ 10) \cdot \begin{pmatrix} 18 \\ x \end{pmatrix}$

e) $(3a \ -a \ 1,2) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix}$

f) $(-1 \ 0 \ x \ 2y) \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

B 2.20 Ein Lebensmittelhändler kauft Äpfel, Birnen, Zwiebeln und Karotten ein.

Mengenvektor $\vec{m} = (15 \ 10 \ 24 \ 12)$ in kg; Preisvektor $\vec{p} = \begin{pmatrix} 0,92 \\ 1,30 \\ 0,55 \\ 0,5 \end{pmatrix}$ in €/kg

Berechne, wie viel der Händler insgesamt ausgibt.

- 2.21** Ein Kunde will die in der Tabelle angegebenen Produkte kaufen. Er studiert vorab die Preise für die gleichen Lebensmittel in 2 verschiedenen Supermärkten A und B:

	Zucker	Butter	Mehl	Reis	Schinken
gewünschte Menge in kg	2	0,5	3	1	0,3
Preis pro kg in € (A)	0,79	10,1	0,39	4,22	21,50
Preis pro kg in € (B)	1,39	8,80	0,42	3,98	22,00

Erstelle den Mengen- und die beiden Preisvektoren.

Berechne mithilfe von Skalarprodukten, wo der Kunde billiger einkauft.

2.2.3 Multiplikation von Matrizen

- 2.22** Auf einer Schihütte werden 2 Sorten Schiwasser angeboten, die sich bei je 30 Liter nur durch das Mischverhältnis von Mineralwasser und Himbeersirup unterscheiden.

	Mischung 1	Mischung 2
Sirup	5 Liter	3 Liter
Wasser	25 Liter	27 Liter

Ein Liter Mineralwasser kostet im Handel 0,47 €, ein Liter Himbeersirup 2,99 €.

Erstelle die „Mischverhältnismatrix“ und den Zeilenvektor der „Preismatrix“.

Ermittle, wie viel jede Mischung insgesamt kostet.



Mischverhältnismatrix M (Angaben in Liter): $M = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 25 & 27 \end{pmatrix}$

Preismatrix P (Angaben in €): $P = (\text{Sirup} \quad \text{Wasser}) = (2,99 \quad 0,47)$

Um zu ermitteln, wie viel jede Mischung insgesamt kostet, müssen die Literpreise der jeweiligen Zutaten mit ihren Anteilen an den Mischungen multipliziert werden.

Für Mischung 1 ergibt sich: $2,99 \cdot 5 + 0,47 \cdot 25 = 26,70$

Für Mischung 2 ergibt sich: $2,99 \cdot 3 + 0,47 \cdot 27 = 21,66$

In beiden Fällen werden die Elemente der Zeile von P mit den passenden Elementen der jeweiligen Spalte von M multipliziert und anschließend addiert. Diese Berechnung kann man in kompakter Form als Multiplikation der Matrix P mit der Matrix M anschreiben. Man erhält als Ergebnis eine Matrix, die die Gesamtpreise für 30 Liter beider Sorten angibt:

$$P \cdot M = (2,99 \quad 0,47) \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 25 & 27 \end{pmatrix} = (2,99 \cdot 5 + 0,47 \cdot 25 \quad 2,99 \cdot 3 + 0,47 \cdot 27) = (26,70 \quad 21,66)$$

Matrizen

Damit man zwei Matrizen miteinander multiplizieren kann, muss die **Anzahl der Spalten der 1. Matrix der Anzahl der Zeilen in der 2. Matrix entsprechen**.

Die Elemente der 1. Zeile werden mit den Elementen der 1. Spalte paarweise multipliziert und anschließend zusammengezählt, dh. „**Zeile mal Spalte**“, man bildet also die **Skalarprodukte der Zeilen- mit den Spaltenvektoren**.

Das Ergebnis der **Multiplikation zweier Matrizen**

$A = (a_{ik})$ und $B = (b_{kj})$ ist eine Matrix $C = (c_{ij})$ mit den Elementen:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj}$$

Matrixtyp $(m \times n)$ multipliziert mit Typ $(n \times r)$ ergibt den Typ $(m \times r)$.

Es gilt für die Matrizenmultiplikation:

Die Multiplikation zweier Matrizen ist im Allgemeinen **nicht kommutativ**: $A \cdot B \neq B \cdot A$

$A \cdot O = O$ und $O \cdot A = O$ mit $O \dots$ Nullmatrix

$A \cdot E = A$ und $E \cdot A = A$ mit $E \dots$ Einheitsmatrix

$s \cdot (A \cdot B) = (s \cdot A) \cdot B = A \cdot (s \cdot B)$ mit $s \in \mathbb{R}$

AC 2.23 Multipliziere die Matrix A mit der Matrix B.

Dokumentiere die einzelnen Rechenschritte.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \\ c_{41} & c_{42} \end{pmatrix}$$

$$c_{11} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + a_{13} \cdot b_{31} = (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-2) = -1$$

$$c_{21} = a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} + a_{23} \cdot b_{31} = 4 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot (-2) = 8$$

...

$$c_{12} = a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} + a_{13} \cdot b_{32} = (-1) \cdot 3 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 2 = 3$$

$$c_{22} = a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} + a_{23} \cdot b_{32} = 4 \cdot 3 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 2 = 14$$

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 8 & 14 \\ 11 & 6 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$$

Zur übersichtlichen Gestaltung der Matrizenmultiplikation kann das **Falk'sche Schema**

(Dr.-Ing. Sigurd Falk, *1921, ehemaliger Professor an der Technischen Universität Braunschweig, Deutschland) angewendet werden.

·	B	⇒	-1 2 3	1 3
A	C = A · B		-1 2 3	1 3
4	2	1	(-1) · 1 + 2 · 3 + 3 · (-2) = -1	8 14
2	3	0	11	6
-2	1	3	-5	0

Du solltest wissen, wie die Multiplikation von Matrizen festgelegt ist und sie auch im Prinzip händisch ausführen können. Allerdings ist bei anwendungsbezogenen Aufgaben die Benützung von Technologie unbedingt anzuraten.

2.24 Berechne Aufgabe 2.23 mithilfe von Technologieinsatz.

Lösung:

Die Matrizen werden zuerst definiert mit **a:=** und **b:=**

Anschließend wird mit dem normalen Multiplikationszeichen multipliziert.

The screenshot shows a TI-84 calculator screen with the following content:

$a := \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$
$b := \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$
$a \cdot b$	$\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 8 & 14 \\ 11 & 6 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$

B



Die Bedienung von TI 82-84, EXCEL und Geogebra bei Matrizenmultiplikation
siehe www.hpt.at (Schulbuchplus für Schüler/innen)

2.25 Multipliziere die Matrizen P und Q zunächst händisch und überprüfe anschließend mithilfe von Technologieinsatz.

a) $P = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 5 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 8 & 0 \\ -3 & 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$

b) $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ -4 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

c) $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & -5 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

d) $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 8 & -10 \\ 0 & 8 \\ 12 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

B



2.26 Es sind die Matrizen F , G und H gegeben.

$F = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -2 & 10 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 6 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

Argumentiere, welche der folgenden Multiplikationen sich nicht ausführen lassen. Berechne jene Multiplikationen, die möglich sind.

a) $F \cdot G$ b) $F \cdot H$ c) $G \cdot H$ d) $H \cdot G$ e) $G \cdot F$ f) $H \cdot F$

2.27 Erstelle 2 Matrizen, deren Produkt die gegebene Matrix A ergibt.

a) $A = (a \cdot d + b \cdot f \quad a \cdot e + b \cdot g)$

b) $A = \begin{pmatrix} 3a + 4c & 3b + 4d \\ -a + 2c & -b + 2d \end{pmatrix}$

AD



A

Matrizen

BC 2.28 Berechne die folgenden Matrizenmultiplikationen:

$A \cdot B$; $B \cdot A$; $A \cdot E$ und $E \cdot A$



$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Vergleiche die Ergebnisse. Was fällt dabei auf?

ABD 2.29 Für die Sportwoche gibt es für die 4 Klassen (K)

A, B, C, D das Angebot zwischen Sportarten (S):

Tennis, Reiten oder Windsurfen.

Die Anmeldungsliste:



$S \rightarrow K$	A	B	C	D
Tennis	10	8	6	0
Reiten	9	12	13	10
Surfen	11	10	11	20

Die Kursteilnahme kostet pro Person für Tennis 210 €, für Reiten 105 € und Surfen 150 €.

- Stelle die passende Klassen-Matrix KS und den Spalten-Vektor für die Kosten auf.
- Berechne, wie viel Geld in den einzelnen Klassen eingesammelt werden muss.
- Stelle einen Zeilenvektor für die Kosten auf. Argumentiere, wie du den Zeilenvektor mit der Klassen-Matrix multiplizieren kannst, um auch wieder die Gesamtkosten für die einzelnen Sportarten zu erhalten.



2.2.4 Die Matrixgleichung und die inverse Matrix

Eine wichtige Anwendung der Matrizen ist die übersichtliche Handhabung bei der Lösung eines linearen Gleichungssystems (LGS) mit beliebig vielen Variablen.

A 2.30 Stelle das folgende LGS in Matrizenform dar.

I: $2x - 3y = 15$

II: $2x + 5y = 26$

Du kannst die Zeilen des Gleichungssystems als Matrizenmultiplikation auffassen.

Definiere X als Spaltenvektor mit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Erzeuge mit den Koeffizienten eine Matrix: $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$... **Koeffizientenmatrix**

Bilde mit der rechten Seite der Gleichung einen Spaltenvektor $Y = \begin{pmatrix} 15 \\ 26 \end{pmatrix}$

Nun ist es möglich, das LGS als Matrixgleichung anzuschreiben: **$A \cdot X = Y$**

Häufig wird für das LGS, besonders bei Berechnungen mit Technologie, auch die so genannte **erweiterte Koeffizientenmatrix** angegeben, die den Ergebnisvektor Y als letzte Spalte enthält:

$$AY = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 15 \\ 2 & 5 & 26 \end{pmatrix}$$

Formal lässt sich ein lineares Gleichungssystem (LGS) mit n Unbekannten als Matrixgleichung deuten.

Die Koeffizientenmatrix A multipliziert mit dem Variablenvektor ergibt den Ergebnisvektor.

$$A \cdot X = Y$$

A ... Koeffizientenmatrix, X ... Spaltenvektor der Unbekannten,

Y = Spaltenvektor des Ergebnisses

Als „**erweiterte Koeffizientenmatrix**“ bezeichnet man eine Matrix, die neben den Koeffizienten in der letzten Spalte den Ergebnisvektor enthält.

- 2.31** Stelle die Matrixgleichung als lineares Gleichungssystem dar.
Löse es mithilfe von Technologieeinsatz.

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -9 \end{pmatrix} \quad \text{c) } \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -9 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -36 \end{pmatrix}$$

- 2.32** Löse das Gleichungssystem mithilfe von Technologieeinsatz.
Stelle das Gleichungssystem als Matrixgleichung dar.

$$\begin{array}{lll} \text{a) I: } 5c - 4d = 18 & \text{b) I: } 2x + 3y = -7 & \text{c) I: } 3y + 4z = 16 \\ \text{II: } 7c + 2d = 10 & \text{II: } 4y + 3z = 8 & \text{II: } 2x + y - 2z = 8 \\ \text{III: } x + y + z = 1 & \text{III: } 8x - 3y = 12 \end{array}$$

Du bist in der Lage, lineare Gleichungssysteme mithilfe von Technologieeinsatz zu lösen.

Aber das LGS lässt sich auch mithilfe einer Matrizenoperation lösen.

Könnte man die Matrixgleichung $Y = A \cdot X$ durch A dividieren, dann hätte man die gesuchte Matrix X .

Die Division durch eine Matrix ist aber nicht definiert!

Du kannst dir jedoch mit einem Trick behelfen, mit dem man die Matrix A „beseitigen“ kann, nämlich durch Multiplikation mit der **inversen Matrix A^{-1}** .

Es funktioniert dies ganz ähnlich wie bei einer normalen „Zahlenmultiplikation“. Durch die Multiplikation mit der Inversen kann die Division umgangen werden.

ZB: $2x = 5$, Die Frage lautet: Womit müsste man 2 multiplizieren, damit 1 entsteht.

1 ist das neutrale Element der Multiplikation! Die Multiplikation mit dem inversen Element der Multiplikation, in diesem Fall also mit $\frac{1}{2}$, ist zielführend.

$$2x = 5 \quad | \cdot \frac{1}{2}$$

$$1 \cdot x = 2,5$$

Ähnlich wie bei dieser Zahlenmultiplikation wird die **inverse Matrix A^{-1}** definiert. Wir fragen, womit man A multiplizieren müsste, um die **Einheitsmatrix E** zu erhalten. Sie ist das neutrale Element der Matrizenmultiplikation! Die Einheitsmatrix ist eine quadratische Matrix.

Daher kann die Inverse immer nur von quadratischen Matrizen gebildet werden!

Vorsicht: Es gibt nicht zu jeder quadratischen Gleichung eine Inverse.

Eine quadratische Matrix A ist invertierbar, wenn sie die Definitionsgleichung für die Inverse A^{-1} erfüllt:

$$A^{-1} \cdot A = E \quad \text{oder} \quad A \cdot A^{-1} = E$$

AB



AB



B 2.33 Löse die Matrixgleichung $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix}$ mithilfe der Inversen.

1. Schritt: Berechne die inverse Matrix A^{-1} .

Rechne vorerst ohne Technologieeinsatz, um die dahinter stehende Idee zu verstehen:

Für die inverse Matrix gilt: $A^{-1} \cdot A = E$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Lösung des LGS ergibt die Elemente der inversen Matrix.

$$3a_{11} + 2a_{12} = 1$$

$$5a_{11} + 4a_{12} = 0 \Rightarrow a_{11} = 2; a_{12} = -2,5$$

$$3a_{21} + 2a_{22} = 0$$

$$5a_{21} + 4a_{22} = 1 \Rightarrow a_{21} = -1; a_{22} = 1,5$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2,5 \\ -1 & 1,5 \end{pmatrix}$$

Fasst man die Berechnungen so zusammen, dass die Elemente der ursprünglichen Matrix erkennbar sind, so ergibt sich für die Berechnung der Inversen einer quadratischen Matrix 2. Ordnung die folgende Formel:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

2. Schritt: Löse die Matrixgleichung

Multipliziere die beiden Seiten der Matrixgleichung mit der Inversen.

(Beachte die Reihenfolge bei der Multiplikation:

Zahl der Spalten der 1. Matrix = Zahl der Zeilen der 2. Matrix!

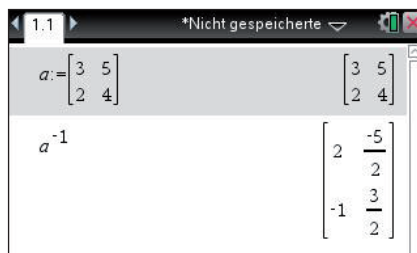
Daher muss linksseitig multipliziert werden!)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2,5 \\ -1 & 1,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow x = -1, y = 2$$



Die inverse Matrix ist mithilfe von Technologieeinsatz sehr einfach zu bestimmen:

TI-Nspire: A als Matrix mit Vorlage definieren, **a:=.... / a^-1 eingeben/ enter**

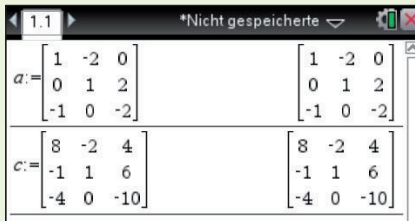


Die Bedienung von TI 82-84, EXCEL und Geogebra bei der Berechnung der inversen Matrix siehe www.hpt.at (Schulbuch Plus für Schüler/innen)

2.34 Berechne die Matrix B aus der Gleichung $A \cdot B = C$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ und } C = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & 6 \\ -4 & 0 & -10 \end{pmatrix}. \text{ Dokumentiere deine Vorgehensweise.}$$

Lösung mit TI-Nspire:



Ich definiere die beiden Matrizen **a** und **c** zum Beispiel mithilfe von **ctrl** **menu**,
8: Mathematische Vorlagen...

Die Gleichung lautet $A \cdot B = C$. Sie kann nach B gelöst werden, indem beide Seiten der Gleichung linksseitig mit A^{-1} multipliziert werden.



Ich ermittle die inverse Matrix **ai** mit **ai:=a^(-1)** und multipliziere die Gleichung auf beiden Seiten linksseitig mit **ai**:

$$A^{-1} \cdot A \cdot B = A^{-1} \cdot C$$

$$\text{Es gilt: } A^{-1} \cdot A = E \text{ und } E \cdot B = B$$

Damit ergibt sich für die Matrix B :

$$B = A^{-1} \cdot C, \text{ also } \mathbf{b:=ai*c}.$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & 6 \\ -4 & 0 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

2.35 Berechne die Matrix M aus der gegebenen Gleichung.

$$\mathbf{a)} \quad M \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b)} \quad \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 1 & -7 \end{pmatrix} \cdot M = \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ -5 & 17 \end{pmatrix}$$

2.36 Stelle die folgenden Gleichungssysteme jeweils in Matrixform dar.

Löse das System mithilfe der inversen Matrix.

Interpretiere die Lösung.

$$\mathbf{a) \text{ I: } } x + 3y - 2z = 70$$

$$\mathbf{b) \text{ I: } } a + b + 4c = 150$$

$$\mathbf{c) \text{ I: } } 3u - v + w = -0,5$$

$$\text{II: } 2x + y + 3z = 20$$

$$\text{II: } 2a + 3b - 3c = -10$$

$$\text{II: } 2u - 3v + 4w = 1$$

$$\text{III: } x - 2y + 4z = -3$$

$$\text{III: } a - b + c = 20$$

$$\text{III: } 4u + 3v - 2w = 2$$

2.37 Berechne jeweils die Matrix M aus der gegebenen Gleichung.

$$\mathbf{a)} \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & 10 & -1 \\ 7 & 6 & 0 \\ 19 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b)} \quad M \cdot \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -7 & 5 \\ -5 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 & 4 & -9 \\ -1 & -13 & 9 \\ -1 & -26 & 17 \end{pmatrix}$$

2.38 Invertiere die angegebenen Matrizen. Führe die Probe über die Einheitsmatrix durch.

$$\mathbf{a)} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b)} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ -1 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{c)} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 4 \\ 1 & -3 & -2 & -1 \\ 1 & 6 & 0 & -4 \\ -2 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

2.39 Erkläre, unter welchen Bedingungen die folgenden Matrixgleichungen gelten.

Forme die allgemeinen Matrixgleichungen nach X um.

$$\mathbf{a)} \quad A \cdot X + B = C$$

$$\mathbf{b)} \quad 2 \cdot B + A \cdot X = 3 \cdot C$$

$$\mathbf{c)} \quad X = A \cdot X + N$$

Matrizen



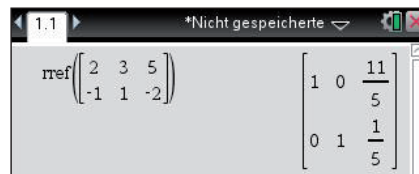
Beim Einsatz von TI-Nspire oder TI82-84 bewährt sich auch die **erweiterte Koeffizientenmatrix** zum Lösen eines linearen Gleichungssystems.

Mit dem Befehl **rref** wird diese Matrix so lange umgeformt, dass links die Koeffizientenmatrix zur **Einheitsmatrix** wird, also eine „**reduced row echelon form**“ (rref) erzeugt wird.

Die Lösungen des Systems liest man in der letzten Spalte rechts ab.

ZB: I: $2x + 3y = 5$

II: $-x + y = -2$



Beachte, dass Sonderformen mit keiner oder unendlich vielen Lösungen auftreten können, die im Kapitel „1 Lineare Gleichungssysteme“ erklärt wurden!

Bei Excel und Geogebra arbeitet man einfacher mit der Inversen oder dem Gleichungslöser.

AB

2.40 In der letzten Saison hat ein Fußballverein 44 Pflichtspiele absolviert. Die Anzahl der Spiele, die die Mannschaft nicht verloren hat, ist dreimal größer als die Anzahl der Niederlagen. Zudem hat sie um 14 Siege mehr als Niederlagen erzielt. Stelle dazu ein Gleichungssystem für die Anzahl der Siege, die der Unentschieden und die der Niederlagen auf.

Berechne diese Anzahlen mithilfe der Matrizenrechnung.



AB

2.41 Für eine Kaffeemischung mischt man 300 kg der ersten Sorte Kaffee mit 200 Kilo der 2. Sorte. Der Kunde bezahlt dafür 4.760 €. Mischt man hingegen 200 kg der 1. Sorte mit 300 kg der zweiten Sorte so sind die Kosten um 320 € geringer.

Stelle die Matrixgleichung auf.

Berechne den Kilopreis der beiden Kaffeesorten.



AB

2.42 Eine Möbelfabrik stellt 3 Sorten von Möbel M_1 , M_2 , M_3 zum Selbstaufbau her. Jedes Bauteil der Möbelstücke wird zunächst zugeschnitten, dann mit Bohrungen versehen und zum Schluss werden alle Teile verpackt.

Für das Zuschneiden bei M_1 benötigt die Maschine 20 Minuten, bei M_2 50 Minuten und bei M_3 45 Minuten. Um die Bohrungen anzubringen, benötigt man für M_1 10 Minuten, für M_2 5 Minuten und für M_3 15 Minuten; die Verpackung benötigt bei M_1 5 Minuten, bei M_2 15 Minuten und bei M_3 10 Minuten.

Für einen Großauftrag sind für das Zuschneiden 120 Stunden geplant; für die Bohrungen 35 Stunden und 50 Minuten und für das Verpacken 30 Stunden und 50 Minuten.

Erstelle die erweiterte Koeffizientenmatrix für dieses Problem.

Berechne, wie viele Möbelstücke jeder Sorte hergestellt werden können.



AB

2.43 Für eine Medaille soll eine neue Legierung verwendet werden, die aus 43 % Nickel, 38 % Kupfer und 19 % Zinn besteht. Die neue Legierung soll aus zwei alten Legierungen und aus reinem Kupfer gewonnen werden.

Legierung 1: 50 % Nickel, 30 % Kupfer, 20 % Zinn

Legierung 2: 60 % Nickel, 10 % Kupfer, 30 % Zinn

Erstelle die erweiterte Koeffizientenmatrix für dieses Problem.

Berechne die benötigten Anteile der Legierung 1 und 2 und des reinen Kupfers.



2.3 Zweistufige Produktionsprozesse

Eine wichtige Anwendung findet die Matrizenmultiplikation in der Planungsrechnung. Die Herstellung einer Mengeneinheit des Endprodukts kann über verschiedene Zwischenprodukte erfolgen, deren Produktion die Bereitstellung verschiedener Rohstoffe (Ausgangsstoffe) erfordert.

2.3.1 Reine zweistufige Prozesse (Rohstoff → Zwischenprodukt → Endprodukt)

2.44 Die Zusammensetzungen von 2 Endprodukten E_1 und E_2 aus den Zwischenprodukten Z_1 , Z_2 und Z_3 sowie die jeweilige Mengen der dafür benötigten Rohstoffe R_1 und R_2 sind in 2 Tabellen beschrieben. In der ersten Tabelle wird die Zusammensetzung der Zwischenprodukte aus den Rohstoffen, in der zweiten Tabelle die Zusammensetzung der Endprodukte aus den Zwischenprodukten in Mengeneinheiten (ME) angegeben.

	Z_1	Z_2	Z_3
R_1	5	7	9
R_2	12	0	1

	E_1	E_2
Z_1	0	3
Z_2	2	4
Z_3	8	1

- Zeichne einen Gozintographen.
- Es sollen 140 ME des 1. Endprodukts und 230 ME des 2. Endprodukts hergestellt werden. Berechne die Rohstoffmengen, die dafür benötigt werden.

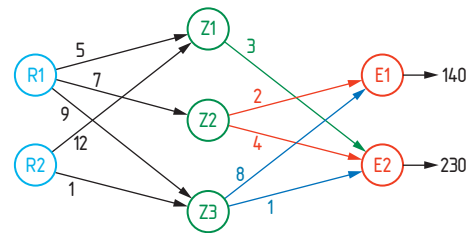


Du bist bereits mit dem Grundwissen ausgestattet und kannst diese Aufgabe lösen. Dabei legen wir aber noch einige Begriffe genauer fest.

Der Gozintograph enthält nun auch die Produktionsmengen, die nachgefragt werden.

N bezeichnen wir als „**Nachfragevektor**“, er beschreibt die Menge der Endprodukte, die an den Markt abgegeben werden.

Um herauszufinden, wie viel von jedem Rohstoff für welches Endprodukt bereitgestellt werden muss, ist es notwendig, die beiden Matrizen miteinander zu multiplizieren. Man erhält die „**Produktionskoeffizientenmatrix**“ C . Sie bezieht sich auf die Erzeugung von 1 Mengeneinheit je eines Endprodukts.



$$C = RZ \cdot ZE = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 12 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 4 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 86 & 52 \\ 8 & 37 \end{pmatrix}$$

	E_1	E_2
R_1	86	52
R_2	8	37

Zur Herstellung des Endprodukts E_1 benötigt man also 86 Mengeneinheiten (ME) von R_1 und 8 ME von R_2 . Für E_2 benötigt man 52 ME von R_1 und 37 ME von R_2 .

Um die nötigen Rohstoffmengen zur Herstellung von 140 Einheiten von E_1 und 230 Einheiten von E_2 zu ermitteln, wird ebenfalls die Matrizenmultiplikation verwendet.

Man erhält den „**Bedarfsvektor**“ (= **Rohstoffvektor**) R . Er beschreibt die für die Produktion der einzelnen Endprodukte benötigten Rohstoffe.

$$R = C \cdot N$$

$$N = \begin{pmatrix} 140 \\ 230 \end{pmatrix}; R = \begin{pmatrix} 86 & 52 \\ 8 & 37 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 140 \\ 230 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24\,000 \\ 9\,630 \end{pmatrix}$$

Zur Herstellung von 140 ME des Produktes E_1 und 230 ME des Produktes E_2 benötigt man 24 000 Mengeneinheiten von R_1 sowie 9 630 Mengeneinheiten von R_2 .

Die **Produktionskoeffizientenmatrix** C gibt an, wie viele Mengeneinheiten der Rohstoffe benötigt werden, um je 1 Mengeneinheit der Endprodukte zu erzeugen. Man erhält sie bei einem reinen zweistufigen Prozess durch Multiplikation der Zwischenstufenmatrix und der Endproduktmatrix. $C = RZ \cdot ZE$

Der **Nachfragevektor** N gibt an, wie viel insgesamt von den Endprodukten nachgefragt wird. Der **Rohstoffvektor** R gibt an, wie viel von jedem Ausgangsstoff insgesamt für die Herstellung der Endprodukte nötig ist.

Es besteht zwischen diesen Matrizen die folgende Beziehung: $R = C \cdot N$

ABC



- 2.45** Aus 2 Rohstoffen R_1 und R_2 werden 3 Zwischenprodukte Z_1, Z_2, Z_3 hergestellt. Aus den 3 Zwischenprodukten entstehen dann 2 Endprodukte E_1 und E_2 . Der jeweilige Materialverbrauch in Kilogramm zur Erzeugung von 1 kg der Endprodukte kann den folgenden Tabellen entnommen werden:

$Z \rightarrow R$	R_1	R_2	$Z \rightarrow E$	E_1	E_2
Z_1	2	4	Z_1	2	4
Z_2	3	1	Z_2	4	2
Z_3	5	2	Z_3	5	3

- a) Zeichne einen Gozintographen.
b) Man möchte 250 kg beider Endprodukte erzeugen.
Berechne die Rohstoffmengen, die dafür notwendig sind.

ABC



- 2.46** Ein Tischlereibetrieb stellt 4 verschiedene Bettenmodelle B_1, B_2, B_3 und B_4 für 3 unterschiedliche Möbelhäuser M_1, M_2 und M_3 her. Zusätzlich werden 3 verschiedene Holztypen H_1, H_2 und H_3 pro Modell verarbeitet. Die Tabelle „Fm“ gibt an, wie viel Festmeter einer Holzsorte für einen bestimmten Bettentyp verwendet werden. In der Tabelle „Anzahl“ steht die Anzahl der bestellten Stück für jedes Möbelhaus.

Fm	H_1	H_2	H_3	Anzahl	M_1	M_2	M_3
B_1	0,05	0,15	0,1	B_1	4	5	0
B_2	0,2	0	0,1	B_2	2	1	6
B_3	0,1	0,2	0,01	B_3	0	8	3
B_4	0,2	0,1	0	B_4	4	6	5

Kosten	H_1	H_2	H_3
Kosten pro Fm	53,50 €	61,20 €	48,90 €

Außerdem sind in der Tabelle „Kosten“ die Kosten pro Festmeter der Holztypen angegeben.

- a) Erstelle einen Gozintographen für Herstellung und Lieferung an die Möbelhäuser.
b) Berechne die gesamten Materialkosten für alle hergestellten Modelle.

ABC



- 2.47** Ein Unternehmer verwendet 4 verschiedene Rohstoffe R_1, R_2, R_3 und R_4 zur Herstellung von 3 Endprodukten E_1, E_2 und E_3 . Bei der Herstellung müssen die Rohstoffe zuerst zu 3 Zwischenprodukten Z_1, Z_2 und Z_3 verarbeitet werden. Die Tabellen enthalten die Mengenangaben in ME für je 1 ME der Endprodukte.

$Z \rightarrow R$	R_1	R_2	R_3	R_4	$Z \rightarrow E$	E_1	E_2	E_3
Z_1	1	10	2	0	Z_1	3	2,1	3
Z_2	2	0	0,5	5	Z_2	4	5	3,2
Z_3	2	7,5	0,5	2,5	Z_3	1,5	0	1

Es werden monatlich 300 ME von E_1 , 100 ME von E_2 und 250 ME von E_3 hergestellt.

- a) Veranschauliche die Situation mithilfe eines Gozintographen.
b) Die Rohstoffkosten pro ME betragen 6, 7, 4 bzw. 14 Geldeinheiten (GE).
Berechne die gesamten Rohstoffkosten der monatlichen Produktion.

- 2.48** Bei einem Produktionsprozess werden in der ersten Produktionsstufe aus den Einzelteilen T_1 , T_2 , T_3 und T_4 die Baugruppen B_1 , B_2 und B_3 hergestellt. Im zweiten Schritt werden aus den Baugruppen die Endprodukte E_1 , E_2 und E_3 gefertigt. Entnimm die benötigten Mengen für je 1 Mengeneinheit (ME) der Endprodukte den Tabellen.

	B_1	B_2	B_3
T_1	2	1	0
T_2	3	0	5
T_3	1	4	1
T_4	2	0	3

ABC

TE

- a) Erstelle einen Gozintographen, der die Materialverflechtung veranschaulicht.
 b) Erstelle mithilfe der Matrizenrechnung eine Tabelle, die den Zusammenhang zwischen den Einzelteilen und den Endprodukten darstellt.
 c) Berechne, wie viele Einzelteile notwendig sind, um 40 ME von E_1 , 70 ME von E_2 und 50 ME von E_3 zu produzieren.

	E_1	E_2	E_3
B_1	1	4	2
B_2	3	0	1
B_3	5	2	0

- 2.49** Bei der Herstellung von Trockenfutter für Haustiere werden zuerst die Zutaten Z_1 , Z_2 , Z_3 und Z_4 zu 3 verschiedenen Formen F_1 , F_2 und F_3 gepresst. Im zweiten Schritt werden diese Formen in 3 verschiedenen Mischungen M_1 , M_2 und M_3 verpackt. Die benötigten Mengeneinheiten der Zutaten bzw. Packungseinheiten der Mischungen:

	F_1	F_2	F_3
Z_1	40	12	23
Z_2	53	19	72
Z_3	42	16	85
Z_4	80	113	0

	M_1	M_2	M_3
F_1	1	4	2
F_2	3	0	1
F_3	5	2	0



ABC

TE

- a) Erstelle mithilfe der Matrizenrechnung eine Tabelle, die den Zusammenhang zwischen den Zutaten und den Mischungen darstellt.
 b) Erstelle einen Gozintographen.
 c) Berechne, wie viele Mengenanteile von den Zutaten notwendig sind, um 450 Packungen von M_1 , 750 Packungen von M_2 und 860 Packungen von M_3 herzustellen.

- 2.50** Ein Ausstatter für Büromöbel hat 4 Typen von Aktenschränken A_1 , A_2 , A_3 und A_4 in seinem Sortiment, für deren Zusammenbau die Bauelemente B_1 , B_2 , B_3 , B_4 und B_5 laut Tabelle „Tab1“ in unterschiedlichen Mengen kombiniert werden.

Eine Firma bestellt für 4 Bürohäuser H_1 , H_2 , H_3 und H_4 jeweils unterschiedliche Stückzahlen an Aktenschränken, die in der Tabelle „Tab2“ festgehalten sind.

- a) Stelle die Verflechtung der beiden Tabellen grafisch mithilfe eines Gozintographen dar.
 b) Berechne mithilfe der Matrizenrechnung die Gesamtkosten aller bestellter Aktenschränke. Verwende dazu die Werte aus der Tabelle „Tab3“.

Tab1	A_1	A_2	A_3	A_4
B_1	2	1	0	5
B_2	1	4	2	4
B_3	0	2	2	1
B_4	3	1	2	0
B_5	14	16	8	22

Tab2	H_1	H_2	H_3	H_4
A_1	54	37	0	44
A_2	26	35	6	16
A_3	38	12	3	0
A_4	12	0	8	10

ABC

TE

Tab3	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
€ pro Stück	72,90	38,40	52,10	25,60	3,50

2.3.2 Gemischte zweistufige Prozesse

In manchen Fällen läuft die Produktion mit Anteilen **ohne Zwischenstufen** oder mit Überspringen von Produktionsstufen ab. In diesem Fall setzt man am besten eine umfangreiche **Verflechtungsmatrix A** an, die die Zuordnung **aller Komponenten** einzeln berücksichtigt. Die Matrizen werden ziemlich groß und sind immer quadratisch mit vielen Nullen. Obwohl die Matrizen kompliziert aussehen, so sind weder die Erstellung noch die Berechnung mithilfe von Technologieeinsatz schwierig.

ABC

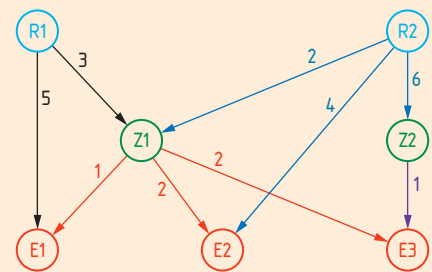


2.51 Ein Betrieb fertigt Endprodukte E_1 bis E_3 aus den Rohstoffen R_1 und R_2 und den Zwischenprodukten Z_1 und Z_2 nach dem nebenstehenden Gozintographen. (Zahlen in Mengeneinheiten ME)

a) Interpretiere den Graphen.

b) Erstelle die Verflechtungsmatrix A.

Berechne, wie viel auf jeder Stufe erzeugt wird, wenn die Nachfrage 100 ME von E_1 , 200 ME von E_2 und 300 ME von E_3 beträgt.



a) Der Rohstoff R_1 ist mit 5 ME bereits Teil von 1 ME des Endprodukts, 3 ME werden für das Zwischenprodukt Z_1 benötigt. R_2 geht mit 2 ME an Z_1 und mit 6 ME an Z_2 , 4 ME fließen direkt ins Endprodukt E_3 . Das Zwischenprodukt Z_1 wird in allen Endprodukten benötigt mit 1, bzw. 2 und 2 ME, Z_2 geht mit 1 ME an das 3. Endprodukt.

b)

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} R_1 & R_2 & Z_1 & Z_2 & E_1 & E_2 & E_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ Z_1 \\ Z_2 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Bezeichnen wir die Mengen, die auf jeder Stufe erzeugt werden mit $x_1, x_2 \dots$ bis x_7 , so müssten wir das folgende lineare Gleichungssystem (LGS) lösen:

$$x_1 = 3x_3 + 5x_5$$

$$x_2 = 2x_3 + 6x_4 + 4x_6$$

$$x_3 = x_5 + 3x_6 + 2x_7$$

$$x_4 = x_6$$

$$x_5 = 100$$

$$x_6 = 200$$

$$x_7 = 300$$

$$\text{Nachfragevektor } N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 100 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix}, \text{ Produktionsvektor } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix}$$

In Matrixform kann man das LGS folgendermaßen schreiben:

$$X = A \cdot X + N$$

Daraus erhält man mit Verwendung der Einheitsmatrix:

$$(E - A) \cdot X = N$$

Der Produktionsvektor X lautet:

$$X = (E - A)^{-1} \cdot N$$

Mit diesem Vektor erhält man alle Mengen, die bei dieser Nachfrage benötigt werden, die Menge der Rohstoffe sowie die Menge aller Zwischenprodukte.

Eine weitere mögliche Berechnung:

$A \cdot N$... die Menge aller nachgefragten Produkte, die nur 1 Stufe durchlaufen: die Menge der Zwischenprodukte und die direkt in die Endprodukte einfließenden Menge an Rohstoffen.

$A \cdot (A \cdot N) = A^2 \cdot N$... die Menge aller Rohstoffe, die im 2-stufigen Prozess verbraucht werden

$$X = N + A \cdot N + A^2 \cdot N = (E - A)^{-1} \cdot N$$

Die Summe der Nachfrage und der Anteile in den einzelnen Prozessstufen ergibt ebenfalls alle Komponenten der gemischten zweistufigen Produktion.

Ergebnis für alle Komponenten der Produktion:

$$E_7 - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 100 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\,800 \\ 4\,800 \\ 1\,100 \\ 300 \\ 100 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix}$$

Es werden 3 800 ME von R_1 , 4800 ME von R_2 benötigt, um 1 100 ME von Z_1 und 300 ME von Z_2 und die Endprodukte von 100 ME von E_1 , 200 ME von E_2 und 300 ME von E_3 zu produzieren.

2. Möglichkeit der Berechnung:

Nachgefragte Mengen aus der 1-stufigen Produktion:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 100 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500 \\ 800 \\ 1\,100 \\ 300 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

500 ME von $R_1 \rightarrow E_1$
800 ME von $R_2 \rightarrow E_2$ und
1 100 ME von Z_1
300 ME von Z_2 werden für die Endproduktion benötigt.

Nachgefragte Mengen aus der 2-stufigen Produktion:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 100 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\,300 \\ 4\,000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3 300 ME von R_1 gehen in die Zwischenprodukte.
4 000 ME von R_2 gehen in die Zwischenprodukte.

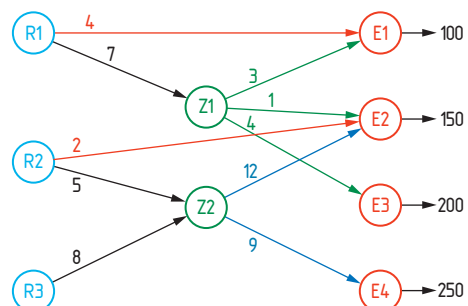
Die Summe aus allen 3 Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 100 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 500 \\ 800 \\ 1\,100 \\ 300 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3\,300 \\ 4\,000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\,800 \\ 4\,800 \\ 1\,100 \\ 300 \\ 100 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix}$$

Ergibt das gleiche Ergebnis, wie zu Beginn mit der inversen Matrix. Man erhält die Mengen, die von den Rohstoffen und den Zwischenprodukten insgesamt für die Nachfrage benötigt werden.

2.52 Aus 3 Ausgangsstoffen stellt man 2 Zwischenprodukte her, die für die Erzeugung von 4 Endprodukten nötig sind. Der Produktionsprozess ist im Gozintographen dargestellt. Die Angaben sind in Mengeneinheiten (ME).

- Erstelle die Verflechtungsmatrix A von allen Elementen dieser Produktion. Berechne die Mengen der jeweiligen Zwischen- und Endprodukte, die für die Erzeugung der nachgefragten Menge notwendig sind.
- Interpretiere die Grafik hinsichtlich folgender Fragestellungen:
Welche Prozesse verlaufen einstufig?
In welchen Produkten und Zwischenprodukten befindet sich der Rohstoff R_1 ?
- Berechne, wie viel von R_1 für die Zwischenprodukte benötigt werden.



Matrizen

Reine zweistufige Prozesse kann man ebenfalls mit der großen Verflechtungsmatrix A rechnen, die alle einzelnen Komponenten berücksichtigt. Dies ist vor allem dann empfehlenswert, wenn man auch die erzeugten Mengen an Zwischenprodukten wissen möchte.

Rechne in den Aufgaben 2.53 – 2.55 mit der Verflechtungsmatrix für alle Einzelkomponenten des Systems.

AB

- 2.53** Für die Herstellung von 3 Erzeugnissen E_1 , E_2 und E_3 werden pro Tonne 3 Rohstoffe R_1 , R_2 und R_3 benötigt. Die Informationen über den Produktionsprozess mit 2 Zwischenprodukten Z_1 und Z_2 liefern die beiden Matrizen:



$$RZ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } ZE = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$



Es besteht eine Nachfrage nach 4 ME von E_1 , 3 ME von E_2 und 1 ME von E_3 .

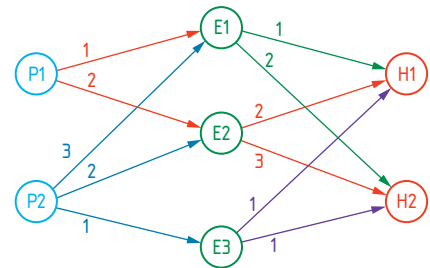
- Erstelle die Verflechtungsmatrix A für alle einzelnen Komponenten der Produktion.
- Berechne, welche Rohstoffmengen und Zwischenproduktmengen bei der Erzeugung der nachgefragten Menge der Endprodukte benötigt werden.
- Weise nach, dass $(RZ \cdot ZE) \cdot N$ die gleichen Rohstoffmengen wie **b)** ergeben.

ABC

- 2.54** In einer Fabrik werden 2 Typen von Hebebühnen H_1 und H_2 mit 3 Steuerelementen E_1 , E_2 und E_3 hergestellt.



Zur Fertigung dieser Steuerelemente benötigt man 2 verschiedene Pneumatikzylinder P_1 und P_2 .



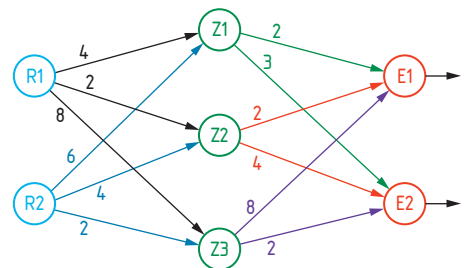
- Erstelle die Verflechtungsmatrix A für alle Komponenten der Produktion.
- Berechne, wie viele Pneumatikzylinder P_1 bzw. P_2 für die Herstellung von 15 Hebebühnen H_1 und 12 Hebebühnen H_2 benötigt werden.
- Erkläre, wie man die notwendige Anzahl von Steuerelementen für diese Nachfragemenge berechnen kann.

ABC

- 2.55** In einem Unternehmen werden Produkte mit dem skizzierten 2-stufigen Fertigungsablauf hergestellt.



- Von E_1 werden 300 Stück und von E_2 500 Stück angefordert. Berechne, die benötigten Anteile an Rohstoffen und die Anzahl der erzeugten Zwischenprodukte.



- Weise nach, dass die Beziehung $N + A \cdot N + A^2 N = (E - A)^{-1} \cdot N$ bei diesem Produktionsprozess gilt.
- Die Kosten pro ME R_1 betragen 4 € und von R_2 10 €. Berechne die Rohstoffkosten für diese Erzeugung.

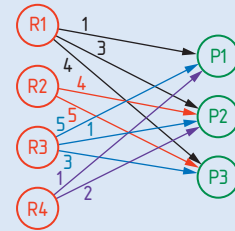
Zusammenfassung

Die **Matrix vom Typ $(m \times n)$** ist ein in eine Klammer gesetztes rechteckiges Zahlenschema, das aus **m Zeilen** und **n Spalten** besteht. Matrizen werden mit Großbuchstaben bezeichnet. Die Zahlen der Matrix werden **Elemente** genannt, die man mit Kleinbuchstaben mit einem Index ij bezeichnet, wobei i die Zahl der Zeile und j die Zahl der Spalte angibt, wo sich das Element in der Matrix befindet.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}$$

Der **Gozintograph** hat seinen Namen von „goes into“, das bedeutet, es wird eine Richtung angegeben.

Ein Gozintograph beschreibt, aus welchen Teilen sich ein oder mehrere Produkte zusammensetzen bzw. mengenmäßig miteinander verflochten sind.



Die **Addition** und **Subtraktion** zweier $(m \times n)$ -Matrizen und die **Multiplikation** einer Matrix **mit einer reellen Zahl** erfolgen komponentenweise.

Matrizenmultiplikation: Man bildet jeweils das Skalarprodukt der einzelnen Zeilenvektoren mit den Spaltenvektoren. Das Produkt einer $(m \times n)$ -Matrix mit einer $(n \times r)$ -Matrix ergibt eine $(m \times r)$ -Matrix

Merke: „**Zeile mal Spalte**“. Die Multiplikation ist nur möglich, wenn die Spaltenanzahl der 1. Matrix gleich der Zeilenzahl der 2. Matrix ist.

Ein lineares Gleichungssystem (LGS) kann als Matrixgleichung dargestellt werden. Die Koeffizientenmatrix A multipliziert mit dem Variablenvektor X ergibt den Ergebnisvektor Y .

$$A \cdot X = Y$$

Inverse Matrix A^{-1} : Das Produkt aus der Matrix und ihrer Inversen ergibt die Einheitsmatrix.

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$$

Mit Hilfe der inversen Matrix kann der Variablenvektor X isoliert werden.

Reine zweistufige Produktionsprozesse

Die **Produktionskoeffizientenmatrix C** gibt an, wie viele Mengeneinheiten der Rohstoffe R benötigt werden, um über die Zwischenprodukt Z je 1 Mengeneinheit der Endprodukte E zu erzeugen.

$$C = RZ \cdot ZE$$

Der **Nachfragevektor N** gibt an, wie viel insgesamt von Produkten nachgefragt wird.

Der **Rohstoffvektor R** gibt an, wie viel von jedem Ausgangsstoff insgesamt für die Herstellung der Endprodukte nötig ist.

$$R = C \cdot N$$

Gemischte zweistufige Prozesse

Für den Produktionsvektor X gilt:

$$X = A \cdot X + N$$

A ... Verflechtungsmatrix für alle Elemente der Produktion.

Daraus erhält man mit Verwendung der Einheitsmatrix:

$$(E - A) \cdot X = N$$

Der Produktionsvektor X lautet:

$$X = (E - A)^{-1} \cdot N$$

Mit diesem Vektor erhält man alle Mengen, die bei dieser Nachfrage benötigt werden, die Menge der Rohstoffe sowie die Menge aller Zwischenprodukte.

$A \cdot N$... die Menge aller Produkte, die nur 1 Stufe durchlaufen

$A \cdot (A \cdot N) = A^2 N$... die Menge aller Rohstoffe, die im 2-stufigen Prozess verbraucht werden.

$$X = N + A \cdot N + A^2 \cdot N = (E - A)^{-1} \cdot N$$

Vermischte Aufgaben zur Vertiefung

- B 2.56** Gegeben sind die Matrizen A , B und C . Berechne die Matrix D .

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -8 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 10 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) $D = A + B - C$ b) $D = 2 \cdot A - B + C$ c) $D = 0,5 \cdot (A - C) + B$
 d) $D = B^T - 3 \cdot (A + C)$ e) $D = (A - B)^T + 2 \cdot C$ f) $D = (A + C)^T - 3 \cdot B^T$

- ABC 2.57** Stelle die folgenden Gleichungssysteme in Matrixform dar. Löse das System mithilfe der inversen Matrix und Technologie. Interpretiere die Lösung.



- a) I: $3a - 3b - 3c = 0$ b) I: $r + s + t = -2$
 II: $-2a + b - 3c = 5$ II: $-r + 2s + t = 6$
 III: $8a + 10b + 2c = 6$ III: $2r - 4s + 2t = -6$
 c) I: $4x + 5y + 6z = 58$ d) I: $2u + 5v - 3w = 0$
 II: $2x - 10y + z = -70$ II: $4u - 4v + w = 0$
 III: $-3x - 2y + 3z = -40$ III: $4u - 2v + w = 1$

- AB 2.58** Erkläre, unter welchen Bedingungen die folgenden Matrixgleichungen gelten. Forme die allgemeinen Matrixgleichungen nach X um.



- a) $2 \cdot X + B = A \cdot X$ b) $2 \cdot C + A \cdot X = 3 \cdot X$ c) $B = A \cdot X + N$

- AC 2.59** Die Matrix A beschreibt den Bedarf an Mehl, Zucker und Milch für 3 Backwaren in ME pro Backware.

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 6 & 3 \\ 8 & 4 & 5 \\ 8 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

- a) Erstelle die Zutatentabelle.
 b) Stelle die transponierte Matrix auf. Interpretiere deren Aussage.

- ABC 2.60** Blusen werden in den Größen (G) S, M, L und XL auf 3 Maschinen M_1 , M_2 und M_3 erzeugt. Die Arbeitszeiten pro Maschine und pro Bluse sind in der folgenden Tabelle in Minuten aufgelistet:



GM	M_1	M_2	M_3
S	17,5	11	2,5
M	18	14	3
L	21	16	3,5
XL	21,5	20	3,8



Einem Textilmarkt werden 110 S-, 150 M-, 220 L- und 100 XL-Blusen geliefert.

- a) Stelle die Matrix GM und ihre Transponierte auf.
 b) Erstelle den Matrixrechenansatz, um die gesamte Arbeitszeit an jeder der Maschinen für jede der Blusentypen in Liefermenge zu erhalten. Berechne wie viele Stunden (gerundet auf Viertelstunden) dies jeweils sind.
 c) Visualisiere den Prozess mit einer Verflechtungsgraphik.

- 2.61** Ein Vertrieb beliefert jeweils 3 Filialen eines Modehauses F_1 , F_2 und F_3 in Graz, Salzburg und Wien mit den Markenjeans „Sivel“, „Pengler“ und „Petrol“. In der Tabelle „Lieferungen“ ist die Anzahl der Lieferungen an jede Filiale eingetragen. In „Gelieferte Stück“ ist die Gesamtanzahl der jeweiligen Jeansmarke für jede Stadt eingetragen. Berechne, wie viele Stück jeder Marke in jede Filiale geliefert werden.

Lieferungen	F_1	F_2	F_3
Graz	6	5	2
Salzburg	10	14	8
Wien	8	3	5

Gelieferte Stück	Sivel	Pengler	Petrol
Graz	165	201	132
Salzburg	424	462	338
Wien	236	234	196

ABC



- 2.62** Eine Firma erzeugt 2 Sorten von Fenstern F_1 und F_2 . Sie bestehen aus den Rohstoffen R : Holz H , Glas G und Aluminium A . Die Firma erzeugt die Fenster an 2 Standorten, in denen unterschiedliche Kosten K_1 (1. Standort) und K_2 (2. Standort) in Geldeinheiten GE für die Rohstoffe verrechnet werden.



$F \rightarrow R$	H	G	A
F_1	3	1	2
F_2	3	2	4

$K \rightarrow R$	H	G	A
K_1	8	1	6
K_2	10	1,5	7

ABC



Berechne die Kosten, die in beiden Standorten bei der Produktion von je 100 Fenstern anfallen.

- 2.63** Ein Unternehmen erzeugt Keramikartikel in 3 verschiedenen Typen K_1 , K_2 , K_3 und stellt diese in 2 Fabriken her. Die Arbeitszeiten pro Fabrik und Keramikteil sind in Stunden in der ersten Tabelle angegeben. Jede Fabrik arbeitet in 4 unterschiedlichen Arbeitsgängen mit den Stundenlöhnen von L_1 bis L_4 in Euro. Dies ist in der 2. Tabelle dargestellt.

$Z \rightarrow K$	K_1	K_2	K_3
Z_1	160	180	200
Z_2	200	240	270

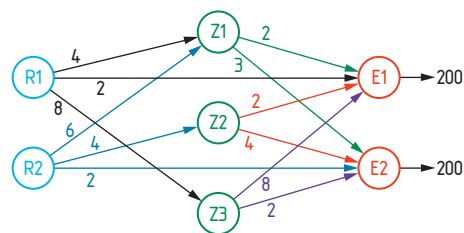
$Z \rightarrow L$	L_1	L_2	L_3	L_4
Z_1	9,5	12	15	8,5
Z_2	10	12,5	16	9

ABCD



- a) Berechne die gesamten Lohnkosten für die Herstellung der 3 Keramiksorten in den einzelnen Arbeitsgängen.
 b) Erkläre, wie man die Gesamtkosten für die Herstellung der Keramiksorte K_1 bzw. die Gesamtkosten in den einzelnen Arbeitsgängen ermitteln kann.
 Berechne die Höhe der Gesamtkosten der Produktion.

- 2.64** In einer Produktion werden aus 2 Einzelteilen (R_1 und R_2) 3 Zwischenprodukte (Z_1 , Z_2 und Z_3) gefertigt. Die beiden Endprodukte E_1 und E_2 werden aus den Zwischenprodukten und zusätzlichen Einzelteilen laut dem nebenstehenden Gozintographen zusammengesetzt. Die Mengen sind jeweils in Stück angegeben. Es sollen je 200 Stück von E_1 und E_2 angeboten werden.



ABC



- a) Markiere im Gozintographen die Verflechtungen, die eine Produktionsstufe überspringen.
 b) Berechne den Bedarf an Einzelteilen für diese Produktion.

Wissens-Check

Bearbeite die Aufgaben. **Begründe** jeweils deine Auswahl bzw. Zuordnung.

		gelöst
1	Kreuze die Aussage an, die zur gegebenen Matrix M passt. $M = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$ A ☐ $m_{12} = 2$ B ☐ $m_{32} = 8$ C ☐ $M^T = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -1 & 8 & 4 \\ -1 & 7 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ D ☐ $M^T = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 7 & -1 \\ 0 & 8 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ E ☐ 4 steht in der 4. Zeile und der 2. Spalte.	
2	Kreuze an, welche der folgenden Aussagen richtig ist. A ☐ Beim Invertieren einer Matrix werden ihre Zeilen und Spalten vertauscht. B ☐ Das Multiplizieren zweier Matrizen erfolgt komponentenweise. C ☐ Die Matrizenmultiplikation ist kommutativ. D ☐ Multipliziert man eine Matrix A mit ihrer Inversen, so erhält man die transponierte Matrix. E ☐ Die Multiplikation eine Matrix mit einer reellen Zahl ist kommutativ.	
3	Der Bedarf an A_1 und A_2 für die 3 Endprodukte C_1, C_2 und C_3 soll berechnet werden. Ordne den gegebenen Gozintographen 1 und 2 jeweils die korrekte Matrizenmultiplikation aus A bis D zu. 1 2 A $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ B $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ C $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ D $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$	

		gelöst
4	Kreuze die richtige Interpretation der folgenden Matrixoperation an. $A \cdot B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ A ☐ A ist die transponierte Matrix von B. B ☐ B ist die transponierte Matrix von A. C ☐ A ist die inverse Matrix von B. D ☐ Das Produkt ist nicht kommutativ. E ☐ $A = -B$	
5	Kreuze an, welche Summe man von den folgenden Matrizen bilden kann: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ A ☐ $A + B$ B ☐ $C + A$ C ☐ $A + D$ D ☐ $B + C$ E ☐ $D + D$	
6	Kreuze an, welches der folgenden Produkte gebildet werden kann. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ A ☐ $A \cdot B$ B ☐ $C \cdot A$ C ☐ $A \cdot D$ D ☐ $B \cdot C$ E ☐ $D \cdot C$	
7	Zeichne die fehlenden Elemente des Gozintographen, der mit der nebenstehenden Verflechtungsmatrix angegeben ist: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	

Lösung: 1) $\leftarrow D$ 2) $\rightarrow E$ 3) $1 \rightarrow D$; $2 \rightarrow A$ 4) C 5) E 6) A 7) im Lösungsheft