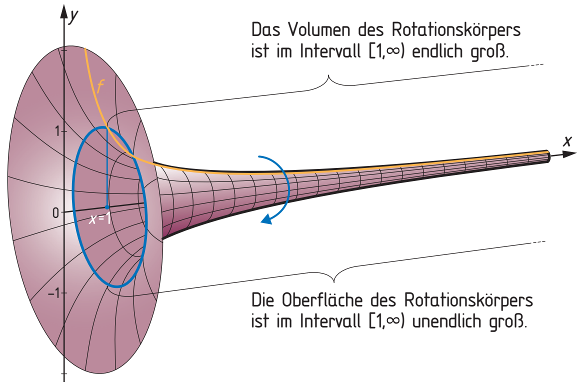
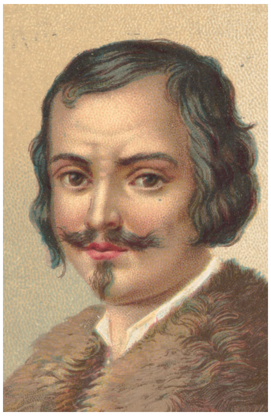
2 Anwendungen und Exaktifizierungen der Integralrechnung

Evangelista Torricelli (1608 – 1647) war ein italienischer Physiker und Mathematiker. Er war Assistent von **Galileo Galilei** (1564 – 1642) und wurde nach Galileis Tod zum Nachfolger als Hofmathematiker des Großherzogs der Toskana bestimmt. Torricelli untersuchte das entstehende Gebilde (Rotationskörper), wenn der Graph der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x}$ um die x-Achse rotiert. Seine Beiträge bereiteten die Differenzial- und Integralrechnung von Newton und Leibniz vor.




Evangelista Torricelli

Torricelli stellte fest: Der Rotationskörper rechts von $x = 1$ hat eine unendlich große Oberfläche, aber ein nur endlich großes Volumen, nämlich π. Dieser scheinbare Widerspruch ließ ihn selbst an der Gültigkeit der von ihm angewandten Methoden zweifeln.

2.1 Das bestimmte Integral in verschiedenen Kontexten

Durch die Umkehrung der Ableitungsregeln konnten bereits Regeln zur Berechnung der Stammfunktion überlegt werden. Wir beginnen diesen Abschnitt mit einer weiteren derartigen Regel.

2.1.1 Integranden der Form $f(k \cdot x)$ und $f(x + a)$

Für eine reelle Funktion f mit der Definitionsmenge D und der Stammfunktion F gilt:
Für $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist $\frac{1}{k} \cdot F(k \cdot x)$ eine Stammfuntion von $f(k \cdot x)$.

2.1 Zeige: Hat die Funktion f mit $f(x)$ eine Stammfunktion F mit $F(x)$, dann hat die Funktion $x \mapsto f(k \cdot x)$ mit $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ die Stammfunktion $x \mapsto \frac{1}{k} \cdot F(k \cdot x)$. *AN |3.1|4.2|*

Gegeben ist G mit $G(x) = \frac{1}{k} \cdot F(k \cdot x)$, dann ergibt sich durch Ableitung $G'(x) = \frac{1}{k} \cdot F'(k \cdot x)$ und durch die Anwendung der Konstantenregel $G'(x) = \frac{1}{k} \cdot k \cdot f(k \cdot x) = f(k \cdot x)$.

Lineare Transformationen des Arguments

Ist F mit $F(x)$ eine Stammfunktion von f mit $f(x)$, dann ist

- $\frac{1}{k} \cdot F(k \cdot x)$ eine Stammfunktion von $f(k \cdot x)$
- $F(x + a)$ eine Stammfunktion von $f(x + a)$, $a \in \mathbb{R}$

2.2 Berechne die bestimmten Integrale mithilfe der Stammfunktionen! *AN |3.1|4.2|*

a) $\int_0^4 e^{3\cdot x}\,dx$ b) $\int_0^\pi \cos(t+\pi)\,dt$ c) $\int_{\frac{\tau}{2}}^{\tau} \sin\left(\frac{2\pi}{\tau}t\right)dt \quad (\tau > 0)$

Lösung:

a) $\int_0^4 e^{3\cdot x}\,dx = \frac{e^{3\cdot x}}{3}\Big|_0^4 = \frac{e^{3\cdot 4}}{3} - \frac{e^{3\cdot 0}}{3} = \frac{e^{12}-1}{3}$

b) $\int_0^\pi \cos(t+\pi)\,dt = \sin(t+\pi)\Big|_0^\pi = \sin(2\cdot\pi) - \sin(\pi) = 0 - 0 = 0$

c) $\int_{\frac{\tau}{2}}^{\tau} \sin\left(\frac{2\pi}{\tau}t\right)dt = -\frac{\tau}{2\cdot\pi}\cos\left(\frac{2\pi}{\tau}\cdot t\right)\Big|_{\frac{\tau}{2}}^{\tau} = -\frac{\tau}{2\cdot\pi}\cos(2\cdot\pi) + \frac{\tau}{2\cdot\pi}\cdot\cos(\pi) = -\frac{\tau}{\pi}$

2.3 Berechne die bestimmten Integrale mithilfe der Stammfunktionen! *AN |3.1|4.2|*

a) $\int_2^5 e^{2\cdot x}\,dx$ b) $\int_{-1}^1 7\cdot e^{-x}\,dx$ c) $\int_0^\pi \cos\left(\frac{t}{\pi}\right)dt$

d) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x)\,dx$ e) $\int_{-\pi}^{\pi} 4\cdot\cos(x)\,dx$ f) $\int_{-1}^{1} e^{4x}\,dx$

2.4 Berechne die bestimmten Integrale mithilfe der Stammfunktionen ($a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 0$)! *AN |3.1|4.2|*

a) $\int_2^5 a^{3\cdot x}\,dx$ b) $\int_{-1}^1 7\cdot a^{-x}\,dx$ c) $\int_{-2}^2 a^{-2\cdot x}\,dx$

TE **2.5** Gegeben ist $\int_{-\pi}^{a} 3\cdot\cos(x)\,dx = -3$, $(0 \leqslant a \leqslant 2\pi)$.

Bestimme den Wert der oberen Grenze *a* mittels Technologieeinsatz, sodass das bestimmte Integral den gegebenen Wert erhält! *AN |3.1|4.2|*

Öffne das CAS-Fenster und nutze den Befehl **Integral(<Funktion>, <Variable>, <Startwert>, <Endwert>) = Wert des Integrals A(-π,a)**, um die obere Grenze *a* zu ermitteln. Drücke abschließend den Button $\boxed{=}$.
ZB Integral(3*cos(x), x, -pi, a) = -3.
Da $0 \leqslant a \leqslant 2\pi$ ist, entspricht *a* dem Wert $1{,}5\pi \approx 4{,}71$.

CAS	
1	Integral(3*cos(x), x, -pi, a)=-3
	→ $3\sin(a) = -3$
2	3sin(a) = -3,a=1
	NLöse: $\{a = -1.57, a = 4.71\}$

TE **2.6** Bestimme den Wert der oberen Grenze *a*, sodass das bestimmte Integral den gegebenen Wert erhält! *AN |3.1|4.2|*

a) $\int_0^a \cos(2\cdot x)\,dx = 0{,}5, \quad (0 \leqslant a \leqslant \pi)$ b) $\int_0^a \sin\left(\frac{1}{2}\cdot x\right) = 3, \quad (0 \leqslant a \leqslant 2\cdot\pi)$

2.1.2 Flächeninhalte

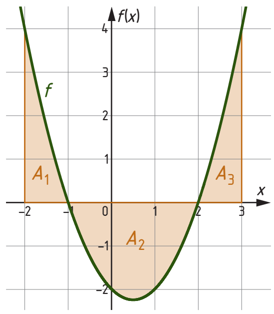
Fläche zwischen Funktionsgraph und x-Achse

Das bestimmte Integral kann als eine „unendliche" Summe von Produkten verstanden werden. Diese Produkte sind mit einem Vorzeichen behaftet, weil der Funktionswert positiv oder negativ sein kann. Daher darf das bestimmte Integral nicht generell als Flächeninhalt zwischen der Funktion und einem abgeschlossenen Intervall interpretiert werden.

TE **2.7** Gegeben ist die Funktion *f* mit $f(x) = x^2 - x - 2$.

a) Zeichne den Graphen von *f*!
b) Berechne den Flächeninhalt der Funktion *f* im Intervall [–2; 3]! *AN |4.3|*

a) Graph von f:



b) Zuerst werden die Nullstellen der Funktion f im Intervall $[-2; 3]$ bestimmt. Diese ergeben sich zu $x_1 = -1$ und $x_2 = 2$.

Der Graph liegt zwischen -2 und -1 oberhalb der x-Achse. Dort ist $f(x) \geqslant 0$.
Daher ist A_1 positiv und gleich der Flächeninhalt zwischen -2 und -1:

$$A_1 = \int_{-2}^{-1} (x^2 - x - 2)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2 \cdot x\right]_{-2}^{-1} = \frac{(-1)^3}{3} - \frac{(-1)^2}{2} - 2 \cdot (-1) - \left(\frac{(-2)^3}{3} - \frac{(-2)^2}{2} - 2 \cdot (-2)\right) =$$
$$= \frac{11}{6}\text{ LE}^2 = \frac{11}{6}\text{ FE}$$

Dabei steht LE für Längeneinheit und FE für Flächeneinheit. (LE^2 wird zu FE.)

Der Graph liegt zwischen -1 und 2 unterhalb der x-Achse. Dort ist $f(x) \leqslant 0$.
Daher ist A_2 negativ:

$$A_2 = \int_{-1}^{2} (x^2 - x - 2)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2 \cdot x\right]_{-1}^{2} = \frac{2^3}{3} - \frac{2^2}{2} - 2 \cdot 2 - \left(\frac{(-1)^3}{3} - \frac{(-1)^2}{2} - 2 \cdot (-1)\right) = -\frac{9}{2}$$

Der Flächeninhalt ist jedoch $\frac{9}{2}$ LE^2 = $\frac{9}{2}$ FE.

Der Graph ist zwischen 2 und 3 oberhalb der x-Achse. Dort ist $f(x) \geqslant 0$.
Daher ist A_3 positiv und gleich der Flächeninhalt zwischen 2 und 3:

$$A_3 = \int_{2}^{3} (x^2 - x - 2)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2 \cdot x\right]_{2}^{3} = \frac{3^3}{3} - \frac{3^2}{2} - 2 \cdot 3 - \left(\frac{2^3}{3} - \frac{2^2}{2} - 2 \cdot 2\right) = \frac{11}{6}\text{ LE}^2 = \frac{11}{6}\text{ FE.}$$

Der Flächeninhalt A von der Funktion f im Intervall $[-2; 3]$ ergibt sich daher zu

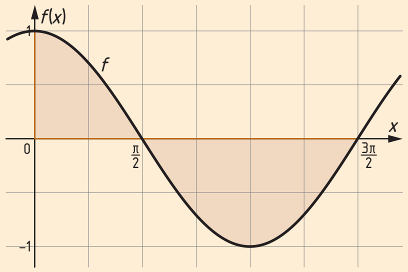
$$A = A_1 + |A_2| + A_3 = \frac{11}{6} + \left|-\frac{9}{2}\right| + \frac{11}{6} = \frac{49}{6}\text{ FE oder}$$
$$A = A_1 - A_2 + A_3 = \frac{11}{6} - \left(-\frac{9}{2}\right) + \frac{11}{6} = \frac{49}{6}\text{ FE.}$$

Bei der Berechnung des Flächeninhalts A zwischen dem Graphen einer Funktion f und der x-Achse über dem Intervall $[a; b]$ ist wie folgt vorzugehen:

1. Bestimmung der Nullstellen $n_1, n_2, \ldots, n_k$ von f auf $[a; b]$.
2. Berechnung der Integrale über die Teilintervalle,
   also $A_1 = \int_a^{n_1} f(x)\,dx$, $A_2 = \int_a^{n_2} f(x)\,dx$, ..., $A_k = \int_{n_k}^{b} f(x)\,dx$.
3. Addieren der Inhalte der Teilflächen, dies bedeutet die Beträge der einzelnen Integrale, also $A = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_k|$.

Wenn f im Intervall $[a; b]$ sowohl positive als auch negative Funktionswerte aufweist, dann ist das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ die Summe der positiv gezählten Flächeninhalte oberhalb der x-Achse und der negativen gezählten Flächeninhalte unterhalb der x-Achse.

2.8 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \cos(x)$.
Schätze jeweils den Flächeninhalt der gefärbten Fläche und berechne diesen!
AN |4.3|



Lösung:
Bei der Schätzung wird berücksichtigt, dass jedes ganze Kästchen einen Flächeninhalt von $\frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{2}$ FE aufweist. In Summe sind es 7 Kästchen, also etwa 2,8 FE.
Die Berechnung teilt das Intervall in zwei Teilintervalle:

$$A_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,dx \text{ und } A_2 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos(x)\,dx.$$

Der Flächeninhalt A der gefärbten Fläche ergibt sich daher zu
$A = A_1 + |A_2| = 1 + |-2| = 3$ FE oder $A = A_1 - A_2 = 1 - (-2) = 3$ FE.

2.9 Berechne den Flächeninhalt, der im angegebenen abgeschlossenen Intervall von der Funktion f festgelegt ist!
AN |4.3|

a) $f(x) = 9 - x^2$, $[-2; -1]$
b) $f(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2 - 2$, $[-3; -1]$
c) $f(x) = x^2 - 4 \cdot x + 3$, $[0; 2]$
d) $f(x) = x^2 - x - 2$, $[0; 3]$

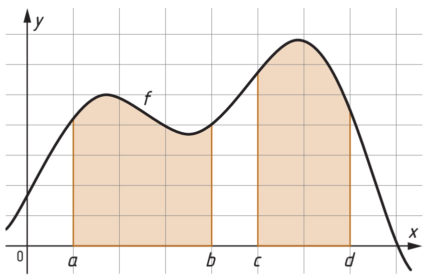
2.10 Berechne den Flächeninhalt, der im angegebenen abgeschlossenen Intervall von der Funktion f festgelegt ist!
AN |4.3|

a) $f(x) = 2^x$, $[0; -3]$
b) $f(x) = \sqrt{x} - 1$, $[0; 2]$
c) $f(x) = e^x - 1$, $[-2; 1]$
d) $f(x) = \cos(x)$, $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3 \cdot \pi}{2}\right]$

TE **2.11** Berechne den Flächeninhalt, der eingeschlossen ist vom Graphen der Funktion f und der x-Achse!
AN |4.3|

a) $f(x) = 4 \cdot x^2 - 4$
b) $f(x) = x^3 \cdot (1 - x)$
c) $f(x) = (x^2 - 1) \cdot (x - 2)$
d) $f(x) = x^2 - 25$
e) $f(x) = x^2 - \frac{23}{2}x + 30$
f) $f(x) = x^3 - 3 \cdot x^2 + 2 \cdot x$

M **2.12** Kreuze jene zwei Terme an, die eine korrekte Beschreibung des Inhalts der markierten Fläche darstellen!
AN |4.3|



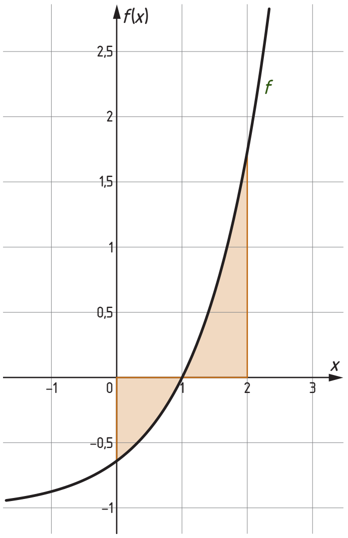
$\int_a^b f(x)\,dx + \int_c^d f(x)\,dx$	☐
$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^d f(x)\,dx$	☐
$\int_a^d f(x)\,dx$	☐
$\int_a^d f(x)\,dx - \int_b^d f(x)\,dx$	☐
$\int_a^d f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx$	☐

M **2.13** Kreuze die beiden Fälle an, bei denen der Wert des Integrals dem Flächeninhalt der vom Graphen und der x-Achse über dem Integrationsbereich eingeschlossenen Fläche entspricht! *AN |4.3|*

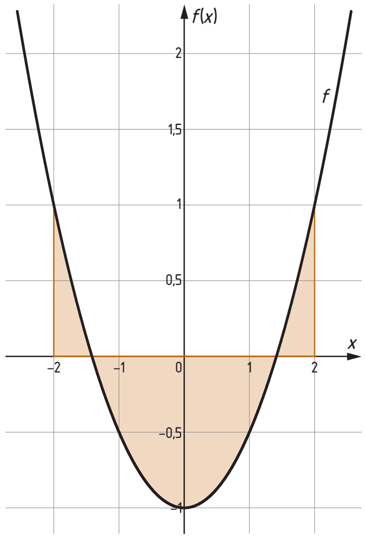
$\int_0^1 2 \cdot x\,dx$	☐	$\int_{-1}^0 2 \cdot x\,dx$	☐	$\int_{-1}^1 x^2\,dx$	☐
$\int_{-1}^1 x^3\,dx$	☐	$\int_0^1 -x^2\,dx$	☐		

2.14 Schätze jeweils den Flächeninhalt der gefärbten Fläche und berechne diese! *AN |4.3|*

a) Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = e^{x-1} - 1$.



b) Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2 - 1$.

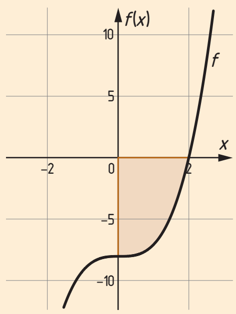


TE **2.15** Berechne den Inhalt der Fläche, die vom Graphen der Funktion f mit $f(x) = x^3 - 8$, der positiven x-Achse und der y-Achse eingeschlossen wird! *AN |4.3|*

Lösung:

1. Zeichnen des Graphen.
2. Einzeichnen des gesuchten Flächeninhalts.
3. Berechnung des Flächeninhalts A mithilfe des bestimmten Integrals.
   Dazu ist zuerst die Nullstelle zu bestimmen, diese ergibt sich aus $x^3 - 8 = 0$ zu $x = 2$. Der Flächeninhalt A ergibt sich zu:

$$A = \left|\int_0^2 (x^3 - 8)\,dx\right| = |-12| = 12 \text{ FE}.$$



TE **2.16** Berechne den Inhalt der Fläche, die vom Graphen der Funktion f, der positiven x-Achse und der y-Achse eingeschlossen wird! *AN |4.3|*

a) $f(x) = x^2 - 4$ b) $f(x) = 3x^2 - 12x - 15$ c) $f(x) = e^x - 2$

d) $f(x) = \sqrt[3]{x} - 2$ e) $f(x) = \sqrt[3]{x} - 2$ f) $f(x) = 2^x - 8$

TE **2.17** Berechne den Teil des Flächeninhalts des Graphen der Funktion f, der oberhalb der x-Achse liegt und von ihr eingeschlossen wird! *AN 4.3*

a) $f(x) = (x^2 - 1) \cdot (x - 2)$ **b)** $f(x) = -4 \cdot x^3 + 8 \cdot x^2$
c) $f(x) = x^3 - 3 \cdot x^2 + 2 \cdot x$ **d)** $f(x) = -(x - 2)^2 + 9$

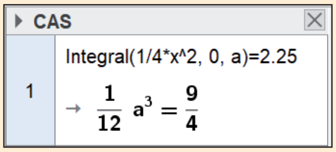
TE **2.18** **a)** Berechne $a \in \mathbb{R}^+$ so, dass der Inhalt der vom Graphen der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{4} \cdot x^2$ im Intervall $[0; a]$ festgelegten Fläche den Wert $A = 2{,}25$ FE ergibt! Kontrolliere das Ergebnis mit Technologie!

b) Berechne $a \in \mathbb{R}^+$ so, dass der Inhalt der vom Graphen der Funktion f mit $f(x) = a - x^2$ und den beiden Koordinatenachsen eingeschlossenen Fläche den Wert $A = 18$ FE ergibt! Kontrolliere das Ergebnis mit Technologie! *AN 4.3*

Lösung:

a) Stammfunktion: $F(x) = \frac{x^3}{12}$

Bestimmungsgleichung für die Fläche aufstellen: $\int_0^a \frac{1}{4} \cdot x^2 \, dx = 2{,}25$.



In die Bestimmungsgleichung einsetzen:

$F(a) - F(0) = \frac{a^3}{12} - \frac{0^3}{12} = 2{,}25$; $a^3 = 27$ und daher $a = 3$.

Die numerische Lösung liefert $a = 3$.

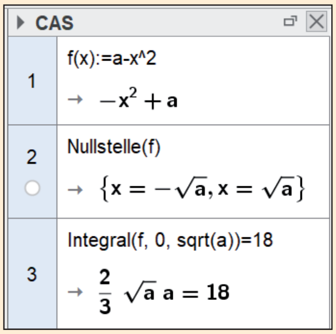
b) Nullstellen bestimmen: $f(x) = 0$; $a - x^2 = 0$; die positive Nullstelle ist $x = \sqrt{a}$.

Stammfunktion ermitteln: $F(x) = a \cdot x - \frac{x^3}{3}$.

Bestimmungsgleichung für die Fläche aufstellen: $\int_0^{\sqrt{a}} (a - x^2) \, dx = 18$.

In die Bestimmungsgleichung einsetzen:

$F(\sqrt{a}) - F(0) = a \cdot \sqrt{a} - \frac{(\sqrt{a})^3}{3} - a \cdot 0 - \frac{0^3}{3} = a \cdot \sqrt{a} - \frac{a \cdot \sqrt{a}}{3} = \frac{2a \cdot \sqrt{a}}{3} = 18$



Aus $\frac{2a \cdot \sqrt{a}}{3} = 18$ folgt $a = 9$.

TE **2.19** Berechne $a \in \mathbb{R}^+$ so, dass der Inhalt der vom Graphen der Funktion f im Intervall $[0; a]$ festgelegten Fläche den Wert A ergibt! *AN 4.3*

a) $f(x) = 2 \cdot x + \frac{1}{2}$; $A = 3$ **b)** $f(x) = \frac{1}{4} \cdot x^3$; $A = 16$
c) $f(x) = 4 \cdot \sqrt[3]{x}$; $A = 48$ **d)** $f(x) = \frac{1}{8} \cdot x^4$; $A = 25{,}6$

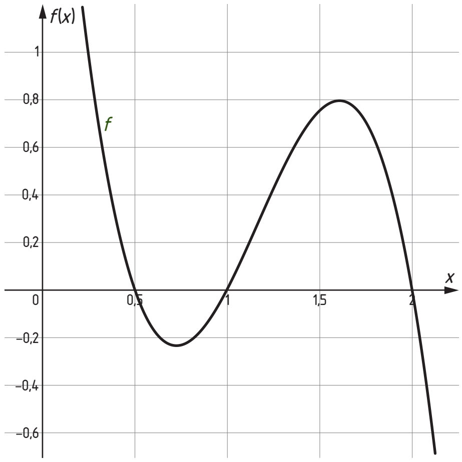
TE 2.20 Berechne $a \in \mathbb{R}^+$ so, dass der Inhalt der vom Graphen der Funktion f und den beiden Koordinatenachsen eingeschlossenen Fläche den Wert A ergibt! *AN |4.3|*

a) $f(x) = -\frac{1}{4} \cdot x^2 + a;\ A = 36$ **b)** $f(x) = -a \cdot x^2 + 3;\ A = 2$

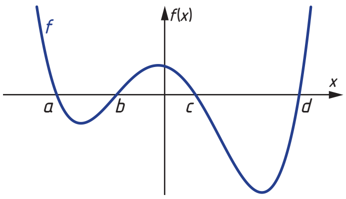
c) $f(x) = 4 - a \cdot x;\ A = 4$ **d)** $f(x) = -\frac{1}{16} \cdot x^2 + a;\ A = \frac{64}{3}$

M 2.21 Gegeben ist der Graph der Funktion f, wobei der Wert A dem Flächeninhalt zwischen dem Graphen und der x-Achse im Intervall $[a; b]$ entspricht.
Kreuze die beiden korrekten Aussagen an! *AN |3.1|4.2|*

$A = \int_1^2 f(x)\,dx$ mit $a = 1$ und $b = 2$	☐
$A = \int_1^{0,5} f(x)\,dx$ mit $a = 0,5$ und $b = 1$	☐
$\int_1^2 f(x)\,dx < \int_{0,5}^2 f(x)\,dx$	☐
$\int_{0,5}^{1,5} f(x)\,dx < 0$	☐
$A = \int_2^{0,5} f(x)\,dx$ mit $a = 0,5$ und $b = 2$	☐

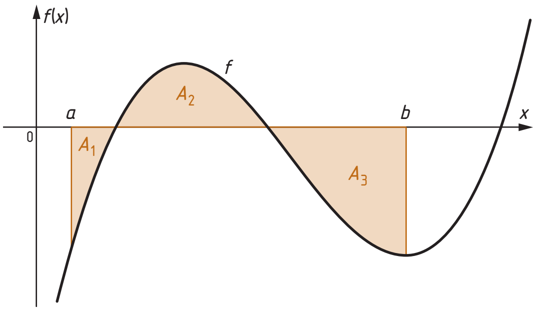


M 2.22 Gegeben ist der Graph einer Funktion f.
Kreuze die beiden korrekten Aussagen an! *AN |4.3|*



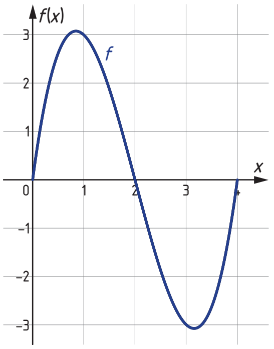
$\int_a^b f(x)\,dx > 0$	☐	$\int_b^c f(x)\,dx < 0$	☐	$\int_a^d f(x)\,dx < 0$	☐
$-\int_b^c f(x)\,dx > 0$	☐	$\int_a^b f(x)\,dx < 0$	☐		

M 2.23 A_1, A_2 und A_3 sind die entsprechend bestimmten Integrale der Teilintervalle.
Kreuze die beiden Terme an, die den Flächeninhalt A von f im abgeschlossenen Intervall $[a; b]$ darstellen! *AN |4.3|*



$A_1 + A_2 + A_3$	☐
$-A_1 + A_2 - A_3$	☐
$A_1 - A_2 + A_3$	☐
$\lvert A_1\rvert + \lvert A_2\rvert + A_3$	☐
$\lvert A_1\rvert + \lvert A_2\rvert + \lvert A_3\rvert$	☐

M **2.24** Gegeben ist der Graph der Funktion f im abgeschlossenen Intervall [0; 4].
Ergänze die Textlücken durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine korrekte Aussage entsteht! *AN |4.3|*



Das bestimmte Integral $\int_0^4 f(x)\,dx$ ist ______ ❶ ______ null,
da die positiv gezählten Flächeninhalte ______ ❷ ______
den negativ gezählten Flächeninhalten sind.

❶	
kleiner	☐
größer	☐
gleich	☐

❷	
kleiner	☐
größer	☐
gleich	☐

M **2.25** Ordne den bestimmten Integralen samt Wert jeweils ihr korrektes abgeschlossenes Intervall aus A bis F zu! *AN |4.3|*

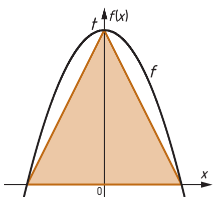
$\int_a^b (3x^2 - 3x)\,dx = 27{,}5$	
$\int_a^b (8x - 4)\,dx = 72$	
$\int_a^b dx = 2$	
$\int_a^b ((x - 5)^2 + 4x^2)\,dx = 165$	

A	[–3; 0]
B	[4; 6]
C	[0; 1]
D	[–2; 3]
E	[0; 6]
F	[0; 2]

M **2.26** Gegeben ist die reelle Funktion f mit $f(x) = -5x^2 + 16$ und Gleichungen, welche den Flächeninhalt A zwischen dem Graphen von f und der x-Achse angeben.
Kreuze jene Gleichung an, welche einen positiven Flächeninhalt angibt! *AN |4.3|*

$A = -\int_{-3}^{3} f(x)\,dx$	☐	$A = 3 \cdot \int_{-2}^{0} f(x)\,dx$	☐	$A = \int_{-3}^{3} f(x)\,dx$	☐
$A = \int_{3}^{-3} f(x)\,dx$	☐	$A = -\frac{1}{2} \cdot \int_{4}^{-4} f(x)\,dx$	☐	$A = -\int_{4}^{-4} f(x)\,dx$	☐

TE **2.27** Zeige, was bereits Archimedes nachweisen konnte:
Der Flächeninhalt, der den Graphen der Funktion f mit $f(x) = t - x^2$ ($t > 0$) mit der x-Achse einschließt, ist das $\frac{4}{3}$-fache des Flächeninhalts des eingeschriebenen Dreiecks. *AN |4.3|*



TE **2.28** Der Graph der Funktion f mit $f(x) = x^2 - \frac{1}{6} \cdot x^3$ und die x-Achse begrenzen im ersten Quadranten des Koordinatensystems ein Flächenstück. Ein zur y-Achse paralleler Streifen der Breite 3 soll so angelegt werden, dass er aus diesem Flächenstück einen möglichst großen Teil ausschneidet.
Berechne, wie dieser Streifen zu legen ist! *AN |4.3|*

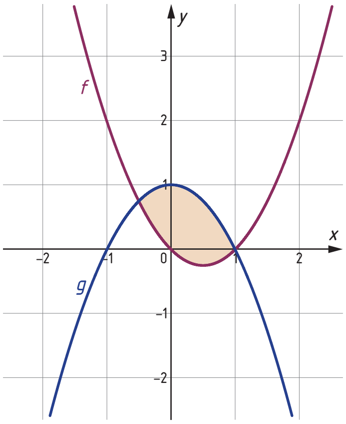
Flächeninhalt zwischen Funktionsgraphen berechnen

Wenn f und g zwei Funktionen sind, die auf dem Intervall $[a; b]$ stetig sind und für alle $x \in [a; b]$ stets $f(x) \geqslant g(x)$ gilt, dann ist der Flächeninhalt A, den beide Funktionen einschließen, gegeben durch $A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$ (Integral von „oberer“ minus „unterer“ Funktion).

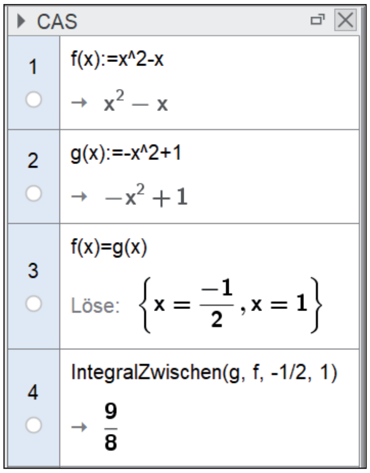
TE

2.29 Berechne den Inhalt A der von den Graphen von der Funktion f mit $f(x) = x^2 - x$ und der Funktion g mit $g(x) = -x^2 + 1$ eingeschlossenen Fläche! Kontrolliere das Ergebnis mit Technologie! *AN |4.3|*

Graph von f und g:



Kontrolle des Ergebnisses.



Schnittstellen bestimmen: $f(x) = g(x)$

$x^2 - x = -x^2 + 1$ und daher $x_1 = -\frac{1}{2}$ und $x_2 = 1$

Bestimmungsgleichung für den Flächeninhalt:

$$A = \int_{-\frac{1}{2}}^{1} [(g(x) - f(x)]\,dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{1} [-x^2 + 1 - (x^2 - x)]\,dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{1} [-2 \cdot x^2 + x + 1]\,dx \text{ und daher}$$

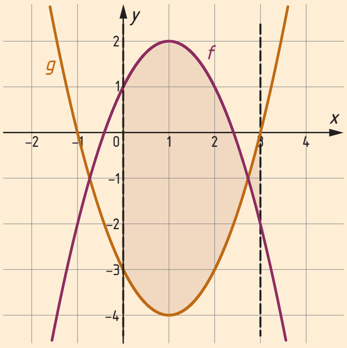
$$A = \left[-2 \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x\right]_{-\frac{1}{2}}^{1} = -2 \cdot \frac{1^3}{3} + \frac{1^2}{2} + 1 - \left(-2 \cdot \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^3}{3} + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^2}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{9}{8}\text{ FE.}$$

Bei der Berechnung des Flächeninhalts A zwischen den Funktionsgraphen von f und den Funktionsgraphen von g über dem Intervall $[a; b]$ ist wie folgt vorzugehen:

1. Schnittstellen $s_1, s_2, \ldots, s_k$ auf $[a; b]$ finden (dazu ist $f(x) = g(x)$ zu setzen).
2. Obere und untere Funktion bestimmen.
   Dazu ist in den einzelnen Intervallen die obere und untere Funktion zu bestimmen (also f und g bei jeder Schnittstelle vertauschen) oder von den einzelnen Integralen die Beträge bestimmen.
3. Berechnung der Integrale über den Teilintervalle, also $A_1 = \int_a^{s_1} [f(x) - g(x)]\,dx$,
   $A_2 = \int_{s_1}^{s_2} [f(x) - g(x)]\,dx, \ldots, A_k = \int_{s_k}^{b} [f(x) - g(x)]\,dx$.
4. Addieren der Inhalte der Teilflächen, dies bedeutet, die Beträge der einzelnen Integrale, also $A = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_k|$.

TE **2.30** Berechne den Flächeninhalt A, der die Funktion f mit $f(x) = -x^2 + 2 \cdot x + 1$ und die Funktion g mit $g(x) = x^2 - 2 \cdot x - 3$ im abgeschlossenen Intervall [0; 3] einschließt! *AN |4.3|*

Lösung:
Graph der Funktionen f und g:



Aus den Graphen ist ersichtlich, dass es einen Schnittpunkt innerhalb des Intervalls der beiden Funktionen gibt:
Schnittstelle bestimmen: $f(x) = g(x)$ und daher $-x^2 + 2 \cdot x + 1 = x^2 - 2 \cdot x - 3$;
liefert $s_1 = -\sqrt{3} + 1$ und $s_2 = \sqrt{3} + 1$.
Obere und untere Funktion bestimmen:
Im Intervall $[0; \sqrt{3} + 1]$ ist $f \geqslant g$ und daher $\int_0^{\sqrt{3}+1} [f(x) - g(x)]\,dx$ ergibt die Fläche im Intervall; im Intervall $[\sqrt{3} + 1; 3]$ ist $g \geqslant f$ und daher $\int_{\sqrt{3}+1}^{3} [g(x) - f(x)]\,dx$ ergibt die Fläche im Intervall.
Flächeninhalt bestimmen:

a) Mit der Unterscheidung obere und untere Funktion:
$$A = \int_0^{\sqrt{3}+1} [f(x) - g(x)]\,dx + \int_{\sqrt{3}+1}^{3} [g(x) - f(x)]\,dx = 12{,}262 + 0{,}262 = 12{,}524 \text{ FE.}$$

b) Ohne der Unterscheidung obere und untere Funktion:
$$A = \left|\int_0^{\sqrt{3}+1} [f(x) - g(x)]\,dx\right| + \left|\int_{\sqrt{3}+1}^{3} [f(x) - g(x)]\,dx\right| = |12{,}262| + |-0{,}262| =$$
$$= 12{,}262 + 0{,}262 = 12{,}524 \text{ FE.}$$

TE **2.31** Berechne den Inhalt der vom Graphen der Funktion f und der Funktion g eingeschlossenen Fläche! *AN |4.3|*

a) $f(x) = \frac{3}{4} \cdot x^2 - 6$; $g(x) = \frac{3}{2} \cdot x$
b) $f(x) = -2 \cdot x^2 + 2$; $g(x) = -x^2 + 1$
c) $f(x) = x^3$; $g(x) = -x^2 + 2 \cdot x$
d) $f(x) = x^3 - 3 \cdot x$; $g(x) = 2 \cdot x^2$

TE **2.32** Berechne den Inhalt der vom Graphen der Funktion f und der Geraden g begrenzten Fläche! *AN |4.3|*

a) $f(x) = -x^2 + 4$; g: $2x - y - 4 = 0$
b) $f(x) = 4 \cdot \sqrt{x}$; g: $4x - 3y + 8 = 0$
c) $f(x) = x^2 + 2 \cdot x + 3$; g: $2x - y + 4 = 0$
d) $f(x) = x^2 - 4$; g: $y = 5$

TE **2.33** Die Strecke $\overline{OP}$ ist die geradlinige Verbindung vom Ursprung O zum Punkt P auf dem Graphen der Funktion f. *AN |4.3|*
Berechne den Inhalt der Fläche zwischen der Strecke $\overline{OP}$ und dem Graphen von f!

a) $f(x) = 2 \cdot x^2$; $P(2 \mid f(2))$
b) $f(x) = 3 \cdot \sqrt{x}$; $P(4 \mid f(4))$

TE 2.34 Auf dem Graphen der Funktion *f* liegen die Punkte *P* und *Q*. Berechne den Inhalt des Segments, das die Strecke $\overline{PQ}$ vom Graphen von *f* abschneidet! *AN |4.3|*

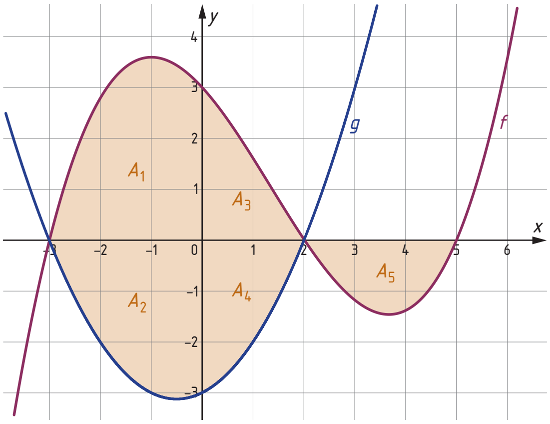
a) $f(x) = 2 \cdot x^2 + 1$; $P(2|f(2))$, $Q(4|f(4))$ **b)** $f(x) = \sqrt{x}$; $P(1|f(1))$, $Q(9|f(9))$

TE 2.35 Berechne den Flächeninhalt, der vom Graphen der Funktion *f* und der Geraden *g* begrenzt wird! *AN |4.3|*

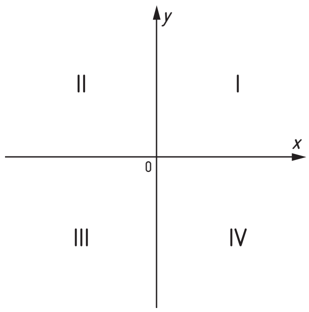
a) $f(x) = x^3 - 6 \cdot x$; *g* ist die Tangente an den Graphen von *f* an der Stelle –1
b) $f(x) = x^4 - 4 \cdot x^2$; *g* ist die Tangente an den Graphen von *f* an der Stelle 0
c) $f(x) = x^2 - 4$; *g* ist die Parallele zur *x*-Achse durch den Punkt (0|21)

2.36 Die Abbildung zeigt die Graphen der Funktionen *f* und *g*.

1) Gib an, aus welchen Teilflächen die beschriebene Fläche besteht!
2) Stelle den Flächeninhalt der beschriebenen Fläche als Integral auf! *AN |4.3|*

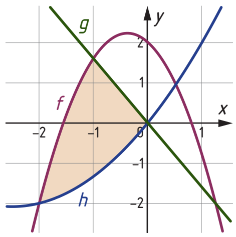


Bezeichnung der Quadranten:



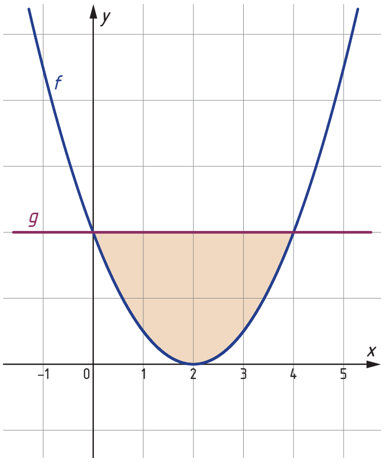
a) Fläche *A*: im ersten Quadranten; begrenzt durch den Graphen von *g* und der *x*-Achse.
b) Fläche *B*: begrenzt durch den Graphen von *f* und der *x*-Achse.
c) Fläche *C*: im zweiten Quadranten; begrenzt durch den Graphen von *g* und den Koordinatenachsen.
d) Fläche D: begrenzt durch den Graphen von *g* und der *x*-Achse.
e) Fläche E: begrenzt durch die Graphen von *f* und *g*.

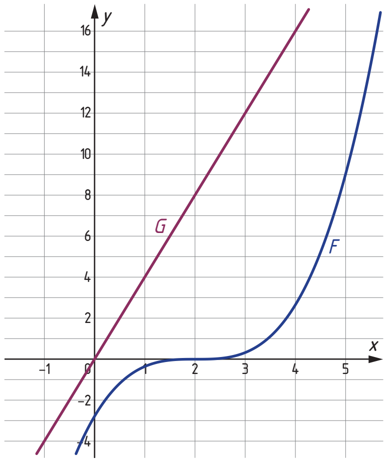
M 2.37 Der markierte Flächeninhalt *A* zwischen den drei Funktionen *f*, *g* und *h* soll berechnet werden. Kreuze die beiden zutreffenden Terme an! *AN |4.3|*



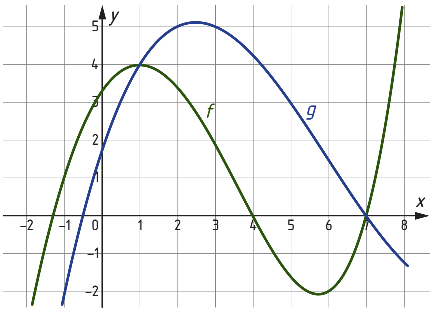
$A = \int_{-2}^{-1} [(f(x) - h(x)]\,dx + \int_{-1}^{0} [g(x) - h(x)]\,dx$	☐
$A = \int_{-2}^{0} [f(x) - h(x)]\,dx$	☐
$A = \int_{-2}^{0} [(f(x) - h(x)]\,dx + \int_{-1}^{0} [f(x) - g(x)]\,dx$	☐
$A = \int_{-2}^{0} [(f(x) - h(x)]\,dx - \int_{-1}^{0} f(x)\,dx$	☐
$A = \int_{-2}^{0} [(f(x) - h(x)]\,dx - \int_{-1}^{0} [f(x) - g(x)]\,dx$	☐

2.38 Gegeben sind der Graph der Funktionen f und g und die jeweilige Stammfunktion F und G.
Berechne den markierten Flächeninhalt anhand der Abbildungen! *AN |4.3|*



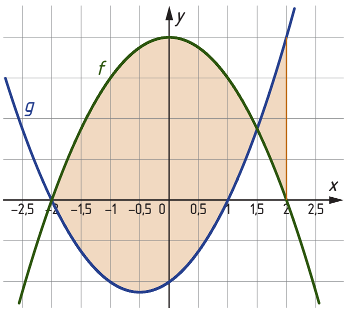


2.39 Gegeben sind die Graphen der Funktionen f und g. *AN |4.3|*



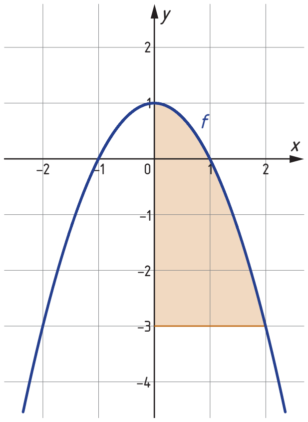
Zeichne die Fläche, deren Inhalt mit $A = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{7} [g(x) - f(x)]\,dx$ berechnet wird!
Schätze die Fläche A ab!

M **2.40** Für die Funktionen f und g sind deren Graphen dargestellt.
Kreuze die beiden Formeln an, mit denen der schattierte Flächeninhalt berechnet werden kann! *AN |4.3|*



$\int_{-2}^{2} (f(x) - g(x))\,dx$	☐
$\int_{-2}^{1,5} (f(x) - g(x))\,dx + \int_{1,5}^{2} (g(x) - f(x))\,dx$	☐
$\int_{-2}^{1,5} (f(x) - g(x))\,dx + \int_{1,5}^{2} (f(x) - g(x))\,dx$	☐
$\int_{-2}^{1,5} (f(x) - g(x))\,dx + \left\lvert \int_{1,5}^{2} (f(x) - g(x))\,dx \right\rvert$	☐
$\left\lvert \int_{-2}^{2} (f(x) - g(x))\,dx \right\rvert$	☐

M **2.41** Für die Funktion f ist der Graph unten dargestellt.
Kreuze die beiden Formeln an, mit denen der schattierte Flächeninhalt berechnet werden kann! *AN |4.3|*



$\int_0^1 f(x)\,dx + \left\lvert\int_1^2 f(x)\,dx\right\rvert$	☐
$2\cdot 3 + \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx$	☐
$2\cdot 4 + \int_0^2 f(x)\,dx$	☐
$\int_0^2 (f(x) + 3)\,dx$	☐
$\int_0^2 (f(x) + 2\cdot 3)\,dx$	☐

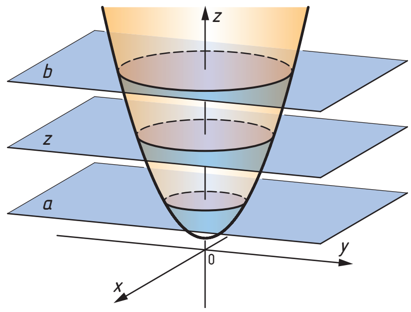
TE **2.42** Berechne den Inhalt der Fläche, die der Graph der Parabel f mit $f(x) = x^2$, die Tangente an den Graphen von f an der Stelle 3 und die y-Achse einschließen! *AN |4.3|*

TE **2.43** Berechne den Inhalt der Fläche, die der Graph der Parabel f mit $f(x) = x^2$, die Tangente an den Graphen von f an der Stelle 2 und die x-Achse einschließen! *AN |4.3|*

2.1.3 Volumina

Volumina von Körpern mit bekannter Querschnittsfläche

Die Abbildung zeigt einen Körper. Es wird eine Ebene parallel zur xy-Ebene durch den Punkt $(0|0|z)$ gelegt. Diese Ebene schneidet den Körper. Diese Schnittfläche wird als **Querschnittsfläche in Höhe z** bezeichnet, der Inhalt lautet $A(z)$, wobei $a \leqslant z \leqslant b$ gilt.
Als **Querschnittsflächenfunktion** in Bezug auf die z-Achse des Körpers wird die Funktion $A\colon [a; b] \to \mathbb{R}\colon z \mapsto A(z)$ bezeichnet, wobei hier immer die Funktion A als stetig vorausgesetzt wird.



2.44 Die Beschreibung einer horizontalen Querschnittsfläche eines Körpers kann in jeder beliebigen Höhe z $(0 \leqslant z \leqslant 20)$ anhand eines regelmäßigen Sechsecks mit Seitenlänge a mit $a(z) = -\frac{3}{400}\cdot z^2 + 3$ dargestellt werden.
Berechne das Volumen des Körpers! *AN |4.3|*

Die Querschnittsfläche in Abhängigkeit von der Höhe z ergibt sich aus dem Flächeninhalt eines regelmäßigen Sechsecks mit $A(z) = \frac{3\cdot a(z)^2\cdot\sqrt{3}}{2}$.

Das Volumen ergibt sich dann zu $V = \int_0^{30} A(z)\,dz = \int_0^{30} \frac{3\cdot\left(-\frac{3}{400}\cdot z^2 + 3\right)^2\cdot\sqrt{3}}{2}\,dz = 3\,321\cdot\frac{\sqrt{3}}{16}$ VE =
= 359,51 VE

Sei $A(z)$ der Inhalt der Querschnittsfläche in der Höhe z mit $a \leqslant z \leqslant b$ eines Körpers. Falls die Querschnittsflächenfunktion A stetig ist, gilt für das Volumen des Körpers: $V = \int_a^b A(z)\,dz$.

2.45 Ein Gefäß mit 30 cm Höhe hat in jeder Höhe z eine rechteckige Querschnittsfläche und eine Breite b von $b(z) = \frac{2}{225} \cdot z^2 + 12$. Der Boden hat eine Länge von 15 cm und nimmt linear zum oberen Rand zu. Die Länge des oberen Rands beträgt 35 cm.
Bereche das Volumen des Innenraums! *AN |4.3|*

Lösung:
Für die Länge l mit $l(z) = k \cdot x + d$ gilt:
$k = \frac{35 - 15}{30 - 0} = \frac{2}{3}$ und $d = 15$; $l(z) = \frac{2}{3} \cdot z + 15$.
$V = \int_0^{30} A(z)\,dz = \int_0^{30} l(z) \cdot b(z)\,dz = \int_0^{30} \left(\frac{2}{3} \cdot z + 15\right) \cdot \left(\frac{2}{225} \cdot z^2 + 12\right) dz = 11\,400\text{ cm}^3 =$
$= 114\text{ dm}^3$.

2.46 Ein Körper hat in jeder Höhe z eine horizontale Querschnittsfläche in Form eines regelmäßigen Sechsecks mit Seitenlänge $a(z)$.
Berechne das Volumen des Körpers! *AN |4.3|*

a) $a(z) = 60 - 4 \cdot z;\ 0 \leqslant z \leqslant 15$
b) $a(z) = 30 - z;\ 0 \leqslant z \leqslant 30$
c) $a(z) = \frac{1}{4} \cdot (z - 1)^2 + 1;\ 0 \leqslant z \leqslant 2$
d) $a(z) = 15 - \frac{1}{240} \cdot z^2$

2.47 Die Querschnittsfläche A eines Zelts ist in jeder Höhe z ein Quadrat mit der Seitenlänge $a(z)$.
Berechne das Volumen des Zelts! *AN |4.3|*

a) $a(z) = 5 - \frac{5}{3} \cdot \sqrt{z}$
b) $a(z) = 6 - \frac{3}{2} \cdot \sqrt{z}$

TE **2.48** Bei einer Flasche ist der Innenraum 4,5 cm hoch. Die Querschnittsflächen der Flasche haben in jeder Höhe z annähernd die Form einer Raute mit den Diagonalen e mit $e(z)$ und f mit $f(z)$. Am Boden sind die Diagonallängen $e(0) = 3{,}5$ cm und $f(0) = 3$ cm, die oberste Raute besitzt die Diagonallängen $e(4{,}5) = 7{,}5$ cm beziehungsweise $f(4{,}5) = 9$ cm.
Berechne das Volumen der Flasche! *AN |4.3|*

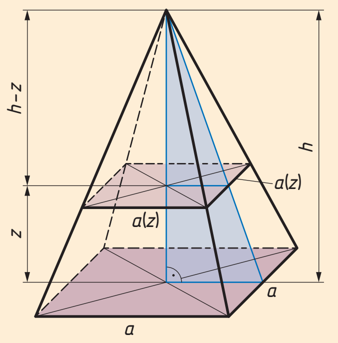
2.49 Eine Vase ist 7 cm hoch und besitzt in jeder Höhe eine rechteckige Querschnittsfläche. Die Länge der Vase nimmt von 7 cm am Boden auf 11 cm bei einer Höhe von 7 cm linear zu. Die Breite nimmt von 5 cm am Boden auf 3 cm bei einer Höhe von 7 cm linear ab.
Berechne das Volumen der Vase in Liter! *AN |4.3|*

2.50 Ein Gefäß mit der Höhe h in cm hat in jeder Höhe z einen Innenraum mit annähernd rechteckiger Querschnittsfläche und einer Breite b mit $b(z)$. Am Boden beträgt die Länge a in cm, die linar zunimmt zum oberen Rand c in cm.
Berechne das Volumen des Innenraums! *AN |4.3|*

a) $b(z) = \frac{1}{90} \cdot z^2 + 10;\ h = 30;\ a = 12;\ c = 25$
b) $b(z) = \frac{1}{125} \cdot z^2 + 20;\ h = 50;\ a = 25;\ c = 50$

2.51 Leite die Volumsformel V einer quadratischen Pyramide (Basiskante, Höhe h) auf zwei Arten her! AN |4.3|

Lösung:



1. Möglichkeit: Im blauen Dreieck kann der Strahlensatz angewandt werden:
$\frac{a}{2} : h = \frac{a(z)}{2} : (h - z)$ und daher $a(z) = a - z \cdot \frac{a}{h}$
und somit
$A(z) = a(z)^2 = \left(a - z \cdot \frac{a}{h}\right)^2 = a^2 - 2 \cdot z \cdot \frac{a^2}{h} + z^2 \cdot \frac{a^2}{h^2}$.

2. Möglichkeit: Die Flächeninhalte ähnlicher Figuren verhalten sich wie die Quadrate entsprechender Streckenlängen in diesen Figuren: $A(z) : (a \cdot a) = (h - z)^2 : h^2$ und somit
$A(z) = a^2 \cdot \frac{h^2 - 2z \cdot h + z^2}{h^2} = a^2 - 2 \cdot z \cdot \frac{a^2}{h} + z^2 \cdot \frac{a^2}{h^2}$.

$$V = \int_0^h A(z)\,dz = \int_0^h \left(a^2 - 2 \cdot z \cdot \frac{a^2}{h} + z^2 \cdot \frac{a^2}{h^2}\right) dz = \frac{a^2 \cdot h}{3}$$

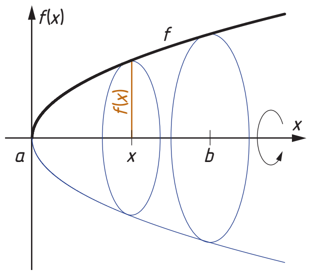
TE **2.52** Volumsformeln von Körpern

a) Zeige, dass die Volumsformel eines Kreiskegels mit dem Radius r und der Höhe h gleich $V = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot h}{3}$ ist!

b) Zeige, dass die Volumsformel eines Zylinders mit dem Radius r und der Höhe h gleich $V = r^2 \cdot \pi \cdot h$ ist! AN |4.3|

Volumina von Rotationskörpern

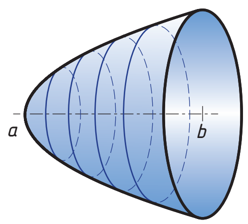
Rotation um die x-Achse



Die Darstellung zeigt den Graphen der Funktion f mit $y = f(x)$. Wenn der Graph in $[a; b]$ um die x-Achse rotiert, kann eine Beschreibung des Inhalts der Querschnittsfläche an jeder Stelle x mit einem Kreis mit Radius Funktionswert an der Stelle x erfolgen.
Daher gilt: $A = r^2 \cdot \pi \Rightarrow A(x) = f(x)^2 \cdot \pi = y^2 \cdot \pi$.

Angenommen, der Rotationskörper zeigt die Form der nebenstehenden Darstellung.
Für das Volumen des Drehkörpers in $[a; b]$ gilt:

$$V = \int_a^b A(x)\,dx = \pi \cdot \int_a^b y^2\,dx.$$



Rotation um die y-Achse

Wenn der Funktionsgraph von f um die y-Achse rotiert, gibt es eine Abhängigkeit der Querschnittsfläche von y.
Daher gilt in der Höhe y für den Radius des Kreises $r = f^{-1}(y) = x$.
Daher gilt: $A = r^2 \cdot \pi \Rightarrow A(y) = f^{-1}(y)^2 \cdot \pi = x^2 \cdot \pi$.

Für das Volumen des Rotationskörpers ($c \leq y \leq d$) gilt: $V = \int_c^d A(y)\,dy = \pi \cdot \int_c^d x^2\,dy$.

TE

2.53 Der Graph der Funktion f mit $f(x) = \frac{x^2}{9} + 1$ rotiert um die **a)** x-Achse **b)** y-Achse.
Berechne das Volumen des entstehenden Drehkörpers mit $1 \leqslant x \leqslant 9$! *AN |4.3|*

a) Für das Volumen des Drehkörpers in $[a; b]$ gilt: $V = \int_a^b A(x)\,dx = \pi \cdot \int_a^b y^2\,dx$ und daher

$$V = \pi \cdot \int_1^9 \left(\frac{x^2}{9} + 1\right)^2 \cdot dx = \pi \cdot \int_1^9 \left(\frac{x^4}{81} + \frac{2}{9} \cdot x^2 + 1\right) dx =$$
$$= \pi \cdot \left[\frac{x^5}{5 \cdot 81} + \frac{2}{3 \cdot 9} \cdot x^3 + x\right]_1^9 =$$
$$= \pi \cdot \left[\frac{9^5}{5 \cdot 81} + \frac{2}{3 \cdot 9} \cdot 9^3 + 9 - \left(\frac{1}{5 \cdot 81} + \frac{2}{3 \cdot 9} + 1\right)\right] =$$
$$= \pi \cdot \frac{84\,128}{405}\text{ VE (Volumeseinheiten)} = 652{,}48\text{ VE.}$$

CAS
1 pi*Integral((x^2/9+1)^2, 1, 9)
$\rightarrow \frac{84128}{405}\pi$

b) Für das Volumen des Rotationskörpers ($c \leqslant y \leqslant d$) gilt: $V = \int_c^d A(y)\,dy = \pi \cdot \int_c^d x^2\,dy$.
Da gilt $y = \frac{x^2}{9} + 1$ folgt $x^2 = 9 \cdot y - 9$. Zusätzlich müssen die Grenzen umgewandelt werden:
$c = f(1) = \frac{10}{9}$ und $d = f(9) = 10$

$$\text{Daher } V = \pi \cdot \int_{\frac{10}{9}}^{10} (9 \cdot y - 9)\,dy = \pi \cdot \left[9 \cdot \frac{y^2}{2} - 9 \cdot y\right]_{\frac{10}{9}}^{10} =$$
$$= \pi \cdot \left[9 \cdot \frac{10^2}{2} - 9 \cdot 10 - \left(9 \cdot \frac{10^2}{2 \cdot 9^2} - 9 \cdot \frac{10}{9}\right)\right] = \pi \cdot \frac{3\,280}{9}\text{ VE} =$$
$$= 1\,144{,}96\text{ VE.}$$

CAS
1 pi*Integral(9y-9, 10/9, 10)
$\rightarrow \frac{3280}{9}\pi$

Gegeben ist eine Funktion f mit $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$ und $c \leqslant y \leqslant d$. Dreht sich der Graph der Funktion f um eine Koordinatenachse, dann gilt für das Volumen des entsprechenden Rotationskörpers

bei der Drehung um die x-Achse: $V = \pi \cdot \int_a^b y^2\,dx$

bei der Drehung um die y-Achse: $V = \pi \cdot \int_c^d x^2\,dy$

2.54 Das Flächenstück, welches vom gegebenen Kegelschnitt $9 \cdot x^2 + 4 \cdot y^2 = 36$ und der x-Achse eingeschlossen wird, rotiert um die **a)** x-Achse **b)** y-Achse.
Berechne das Volumen des entstehenden Drehkörpers! *AN |4.3|*

Lösung:

a) $y^2 = 9 - \frac{9}{4}x^2$; $V = \pi \cdot \int_{-2}^{2} \left(9 - \frac{9}{4} \cdot x^2\right) dx = 24 \cdot \pi\text{ VE} = 75{,}40\text{ VE}$

b) $x^2 = 4 - \frac{4}{9}y^2$; $V = \pi \cdot \int_{-3}^{3} \left(4 - \frac{4}{9} \cdot y^2\right) dy = 16 \cdot \pi\text{ VE} = 50{,}27\text{ VE}$

2.55 Der Graph der Funktion f rotiert um die ***1)*** x-Achse ***2)*** y-Achse.
Berechne das Volumen des entstehenden Drehkörpers! *AN |4.3|*

a) $f(x) = \frac{1}{3} \cdot x + 1$; $3 \leqslant x \leqslant 9$ **b)** $f(x) = \sqrt{x} + 2$; $1 \leqslant x \leqslant 9$

c) $f(x) = 3 \cdot x^2 + 2$; $2 \leqslant x \leqslant 4$ **d)** $f(x) = \frac{x^2}{2} + 3$; $0 \leqslant x \leqslant 4$

e) $f(x) = 4 \cdot \sqrt{x} + 2$; $1 \leqslant x \leqslant 4$ **f)** $f(x) = \frac{3}{x}$; $\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant 3$

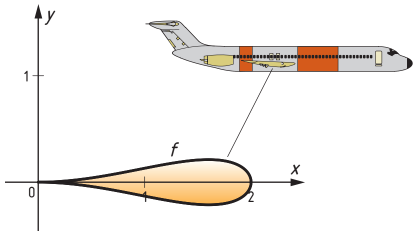
2.56 Der Graph der Funktion f rotiert um die x-Achse.
Berechne das Volumen des entstehenden Drehkörpers! *AN |4.3|*

a) $f(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{8} \cdot x}$; $0 \leqslant x \leqslant 14$ **b)** $f(x) = 4 \cdot e^{-0{,}4 \cdot x} - 6 \cdot e^{-2{,}5 \cdot x}$; $0{,}2 \leqslant x \leqslant 5$

2.57 Das Flächenstück, welches vom gegebenen Kegelschnitt und der x-Achse eingeschlossen wird, rotiert um die ***1)*** x-Achse ***2)*** y-Achse.
Berechne das Volumen des entsprechenden Drehkörpers! *AN |4.3|*

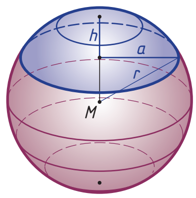
a) $x^2 + y^2 = 16$ **b)** $x^2 + y^2 = 25$ **c)** $4 \cdot x^2 + 16 \cdot y^2 = 64$
d) $25 \cdot x^2 + 4 \cdot y^2 = 100$ **e)** $b^2 \cdot x^2 + a^2 \cdot y^2 = a^2 \cdot b^2$ (Ellipsiod)

TE 2.58 Ein Tank auf der Tragfläche eines Düsenflugzeugs ähnelt einem Rotationskörper, der durch Drehung des Graphen von f mit $f(x) = \frac{1}{8} \cdot x^2 \cdot \sqrt{2 - x}$ um die x-Achse entsteht (x und $f(x)$ in Meter).
Ermittle das Volumen dieses Tanks in Liter! *AN |4.3|*



TE 2.59 Die Abbildung zeigt in blau eine Kugelkappe.

a) Leite die Volumenformel der Kugelkappe her!
b) Verwende die Formel der Kugelkappe, um das Volumen einer Halbkugel und einer Kugel herzuleiten! *AN |4.3|*



TE 2.60 Berechne das Volumen des Körpers, der bei der Rotation des Graphen der Funktion f um die x-Achse zwischen den beiden Nullstellen von f entsteht! *AN |4.3|*

a) $f(x) = 18 - 2 \cdot x^2$ **b)** $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ **c)** $f(x) = x \cdot (x - 2)^2$
d) $f(x) = 9x^4 - 9$ **e)** $f(x) = x^2 - 2x - 8$ **f)** $f(x) = (x - 2)^2 - 4$

M 2.61 Die Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse über dem Intervall $[a; b]$ rotiert um die x-Achse.
Ergänze die Textlücken durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine korrekte Aussage entsteht! *AN |4.3|*

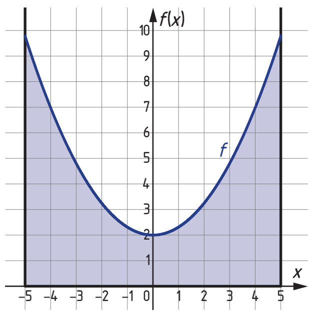
Wenn f durch ______ ❶ ______ ersetzt wird, dann verändert sich das Volumen um das ______ ❷ ______.

❶	
$2 \cdot f$	☐
$3 \cdot f$	☐
$4 \cdot f$	☐

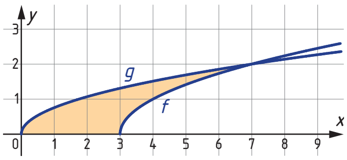
❷	
Doppelte	☐
Vierfache	☐
Sechsfache	☐

2.62 Bei der Rotation eines Becherglases wird Flüssigkeit am Rand hochgedrückt. Ein Paraboloid entsteht. Die Abbildung zeigt das Paraboloid im Querschnitt bei einer bestimmten Drehgeschwindigkeit.

a) Lies im Querschnittsbild die Gleichung der Randparabel ab!
b) Bestimme das Volumen der Flüssigkeit im Becherglas!
c) Berechne die Höhe der Flüssigkeit bei Ruhestand im Becherglas! *AN |4.3|*

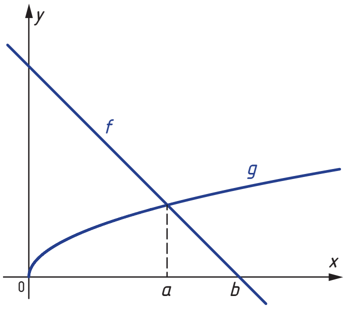


M **2.63** Ein Flächenstück wird von den Graphen der Funktionen f und g sowie der x-Achse begrenzt und rotiert um die x-Achse.
Das von den Graphen der Funktionen f und g und der x-Achse begrenzte Flächenstück rotiert um die x-Achse.
Kreuze die beiden Terme an, die das Volumen V des entstandenen Rotationskörpers darstellen!
AN |4.3|



$\pi \cdot \int_0^7 (g(x) - f(x))^2 \, dx$	☐
$\pi \cdot \int_0^7 (g(x)^2 - f(x)^2) \, dx$	☐
$\pi \cdot \int_0^7 g(x)^2 \, dx - \pi \cdot \int_3^7 f(x)^2 \, dx$	☐
$\pi \cdot \int_0^3 g(x)^2 \, dx + \pi \cdot \int_3^7 (g(x)^2 - f(x)^2) \, dx$	☐
$\pi \cdot \int_3^7 f(x)^2 \, dx - \pi \cdot \int_0^7 (f(x)^2 - g(x)^2) \, dx$	☐

M **2.64** Das von den Graphen der Funktionen f und g und der x-Achse begrenzte Flächenstück rotiert um die x-Achse.
Kreuze die beiden Terme an, die das Volumen V des dabei entstandenen Rotationskörpers wiedergeben!
AN |4.3|



$\pi \cdot \int_0^b (f(x) - g(x))^2 \, dx$	☐
$\pi \cdot \int_0^b (f(x)^2 - g(x)^2) \, dx$	☐
$\pi \cdot \int_0^a g(x)^2 \, dx + \pi \cdot \int_a^b f(x)^2 \, dx$	☐
$\pi \cdot \int_0^b (g(x)^2 - f(x)^2) \, dx - \pi \cdot \int_a^b f(x)^2 \, dx$	☐
$\pi \cdot \int_0^b f(x)^2 \, dx - \pi \cdot \int_a^b (f(x)^2 - g(x)^2) \, dx$	☐

2.65 Bei der Rotation um die y-Achse eines Graphen mit der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{4} \cdot x^2$ bildet sich die innere Begrenzug eines Glases von 20 cm Höhe. Das Glas wird mit einer Flüssigkeit gefüllt.
Berechne die Flüssigkeitshöhe, wenn ein halber Liter in das Glas gefüllt wird!
AN |4.3|

Lösung:

$x^2 = 4 \cdot y; \;\; V(h) = \pi \cdot \int_0^h 4 \cdot y \, dy = \pi \cdot 2 \cdot h^2$

Das Volumen soll nun 0,5 Liter Flüssigkeit sein, daher ergibt eine Umformung:

$0{,}5 \text{ l} = 0{,}5 \text{ dm}^3 = 500 \text{ cm}^3$ und daher $500 = \pi \cdot 2 \cdot h^2 \;\Rightarrow\; h = \sqrt{\frac{250}{\pi}} = 8{,}9 \text{ cm}$

TE 2.66 Bei der Rotation um die y-Achse eines Graphen mit der Funktion f mit $f(x)$ bildet sich die Begrenzug eines Glases von 20 cm Höhe. Das Glas wird mit einer Flüssigkeit gefüllt.
Berechne die Wasserhöhe, wenn k Liter Wasser in das Glas gefüllt wird! *AN |4.3|*

a) $f(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2$; $k = 0{,}4$
b) $f(x) = \frac{1}{4} \cdot x^2 - 3$; $k = 1{,}5$
c) $f(x) = \frac{2}{3} \cdot x^4$; $k = 1$
d) $f(x) = \frac{1}{5} \cdot x^2 + 2$; $k = 0{,}75$

TE 2.67 Gegeben sind die Potenzfunktionen f_1 mit $f_1(x) = x$, f_2 mit $f_2(x) = x^2$ und f_3 mit $f_3(x) = x^3$.

a) Berechne das Volumen des Körpers, der bei der Rotation der Fläche unter dem Graphen der Potenzfunktion um die x-Achse im Intervall $[0; 1]$ entsteht!
b) Erkläre, wie sich die Volumina der Rotationskörper mit dem Exponenten entwickeln!
Vergleiche die Entwicklung mit den Inhalten der entsprechenden Flächen! *AN |4.3|*

TE 2.68 Der Körper einer Glasschale entsteht bei Rotation um die x-Achse des Graphen der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{3} \cdot x + 1$ über dem Intervall $[0; 5]$ sowie des Graphens der Funktion g mit $g(x) = \sqrt{x - 1}$ über dem Intervall $[1; 5]$ (Angaben in cm).

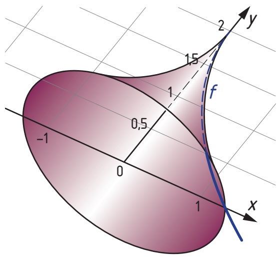
a) Berechne wie viel Liter in die Schale passen!
b) Berechne das Volumen zur Herstellung des benötigen Glases!
c) Begründe, warum für die Berechnung vom Volumen des Glases nicht die Formel $\pi \cdot \int_0^5 (f(x) - g(x))^2 \, dx$ verwendet werden darf! *AN |4.3|*

TE 2.69 Ein Football hat die Länge 28,58 cm und die Höhe 17,94 cm. Ein Modell kann mittels Rotation einer Parabel f mit $f(x) = a \cdot x^2 + b$ um die x-Achse gebildet werden.
Berechne das Volumen des Footballs! *AN |4.3|*

TE 2.70 Ein JoJo (∅ 60 x 35 mm) hat in der Mitte einen ∅ 30 mm und lässt sich durch Rotation um die x-Achse rechts von der Mitte mit einer Parabel f der Form $f(x) = \sqrt{a \cdot x} + b$ modellieren. Links von der Mitte wird die Funktion g mit $g(x) = f(-x)$ verwendet.
Berechne das Volumen des JoJo! *AN |4.3|*

TE 2.71 Der Hohlkörper eines liegenden Gefäßes entsteht mittels Rotation um die x-Achse eines Graphen von f mit $f(x) = \sqrt{x}$. Das Gefäß wird aufgestellt und mit Flüssigkeit befüllt.
Berechne bis zu welcher Höhe das Wasser steht, wenn die Füllmenge 30 VE beträgt! *AN |4.3|*

TE 2.72 Ein 2 m hohes konkav gewölbtes Kegeldach wird durch den Rotationskörper, der durch Drehung des Graphen von f mit $f(x) = -\sqrt{3x} + 2$ um die y-Achse entsteht, modelliert (x und $f(x)$ in Meter).
Berechne von diesem Kegeldach die Größe ihres Rauminhalts! *AN |4.3|*



2.1.4 Wegstrecke – Geschwindigkeit - Beschleunigung

Von einer nicht-negativen Geschwindigkeitsfunktion auf den Weg schließen

2.73 Ein Fahrzeug bewegt sich zu Beginn mit einer Geschwindigkeit von 15 m/s und wird schneller. Nach t Sekunden seit Beginn beträgt die Geschwindigkeit v in m/s näherungsweise $v(t) = 3 \cdot t + 15$ (t in s, $v(t)$ in m/s).
Berechne, wie lang der zurückgelegte Weg im Zeitintervall **a)** [0; 4] und **b)** [3; 5] ist! *AN |4.3|*

Da die Geschwindigkeitsfunktion v stets positiv ist, ergibt sich der zurückgelegte Weg durch Integration der Geschwindigkeitsfunktion unter Beachtung der Zeitintervalle.

a) $s_{0,4} = \int_0^4 (3 \cdot t + 15)\,dt = \left[3 \cdot \frac{t^2}{2} + 15 \cdot t\right]_0^4 = 3 \cdot \frac{4^2}{2} + 15 \cdot 5 - \left(3 \cdot \frac{0^2}{2} + 15 \cdot 0\right) = 84\text{ m}$

b) $s_{3,5} = \int_3^5 (3 \cdot t + 15)\,dt = 54\text{ m}$

Beschreibt eine Geschwindigkeitsfunktion v die Geschwindigkeit $v(t)$ eines Körpers zum Zeitpunkt t in einem Zeitintervall $[t_1; t_2]$ und ist im betrachteten Zeitraum $v(t)$ **größer oder gleich null**, dann gilt für den im Zeitintervall zurückgelegten Weg s_{t_1, t_2}:

$s_{t_1, t_2} = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt = s(t_2) - s(t_1)$, wobei s die Weg-Zeit-Funktion ist.

TE

2.74 Ein fahrendes Auto bremst mit der Geschwindigkeitsfunktion v mit $v(t) = -3 \cdot t + 12$ bei $t = 0$ ab (t in s, $v(t)$ in m/s).

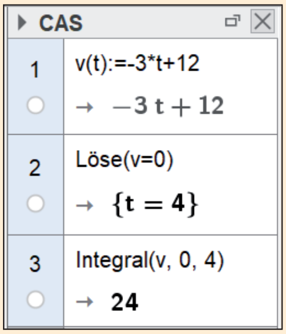
a) Bestimme den Abbremsweg, also jenen Weg, der benötigt wird, damit das Auto zum Stillstand kommt, und kontrolliere das Ergebnis mit Technologieeinsatz!
b) Markiere im Graphen von v den Bremsweg! *AN |4.3|*

Lösung:

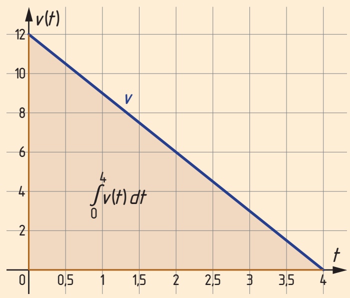
a) Das Auto ist dann im Stillstand, wenn seine Geschwindigkeit gleich null ist. Daher muss gelten:
$v(t) = 0 \Rightarrow -3 \cdot t + 12 = 0 \Rightarrow t = 4$ Sekunden.
Der Bremsweg ergibt sich nun zu

$s_{0,4} = \int_0^4 v(t)\,dt = \int_0^4 (-3 \cdot t + 12)\,dt =$

$= \left[-3 \cdot \frac{t^2}{2} + 12 \cdot t\right]_0^4 = 24\text{ m}$



b) Der zurückgelegte Weg kann geometrisch mit dem Flächeninhalt zwischen dem Graphen der Geschwindigkeitsfunktion v und der Zeitachse im Zeitintervall [0; 4] dargestellt werden.



2.75 Ein Körper bewegt sich mit der Geschwindigkeit v mit $v(t)$ in m/s, wobei $t \geqslant 0$ die Zeit in Sekunden ist.

1) Zeichne den Graphen der Funktion v in $[t_1; t_2]$!
2) Stelle den zurückgelegten Weg s_{t_1, t_2} als Integral dar!
3) Markiere im Graphen von v den zurückgelegten Weg s_{t_1, t_2}!
4) Berechne s_{t_1, t_2} anhand des Graphens von v! *AN |4.3|*

a) $v(t) = \frac{1}{2} \cdot t;\ t_1 = 0, t_2 = 4$
b) $v(t) = 2 \cdot t;\ t_1 = 0, t_2 = 8$
c) $v(t) = \frac{1}{5} \cdot t;\ t_1 = 5, t_2 = 10$
d) $v(t) = \frac{3}{2} \cdot t;\ t_1 = 6, t_2 = 18$

2.76 Ein Körper bremst mit der Geschwindigkeitsfunktion v mit $v(t)$ in m/s mit $t \geqslant 0$ (in Sekunden) bei $t = 0$ ab.

1) Bestimme den Abbremsweg, also jenen Weg, der benötigt wird, damit der Körper zum Stillstand kommt!
2) Markiere im Graphen von v den Bremsweg! *AN |4.3|*

a) $v(t) = -\frac{7}{10} \cdot t + \frac{28}{5}$
b) $v(t) = -\frac{3}{2} \cdot t + \frac{27}{2}$
c) $v(t) = -\frac{3}{10} \cdot t + \frac{21}{10}$

M **2.77** Ergänze die Textlücken durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine korrekte Aussage entsteht! *AN |4.3|*
Ein sich bewegender Körper wird mit der Geschwindigkeitsfunktion v mit $v(t)$ in m/s und $t \geqslant 0$ (in Sekunden) bei $t = 0$ abgebremst.

Falls ______ ❶ ______ ist, dann ist der Bremsweg ______ ❷ ______.

❶	
$v(t) = -\frac{1}{2} \cdot t + 6$	☐
$v(t) = -3 \cdot t + 15$	☐
$v(t) = -\frac{9}{2} \cdot t + 18$	☐

❷	
35,5 m	☐
36,5 m	☐
37,5 m	☐

2.78 Gegeben ist die Geschwindigkeitsfunktion v mit $v(t)$ in m/s mit $t \geqslant 0$ eines Körpers.

1) Berechne den zurückgelegten Weg im gegebenen Zeitintervall!
2) Interpretiere den zurückgelegten Weg geometrisch! *AN |4.3|*

a) $v(t) = \frac{1}{3} \cdot t^2 - \frac{17}{3} \cdot t + 25;\ [0; 7]$
b) $v(t) = \frac{1}{4} \cdot t^2 - \frac{7}{2} \cdot t + 12;\ [0; 6]$
c) $v(t) = \frac{5}{24} \cdot t^3 - \frac{15}{8} \cdot t^2 + \frac{5}{12} \cdot t + 20;\ [0; 6]$

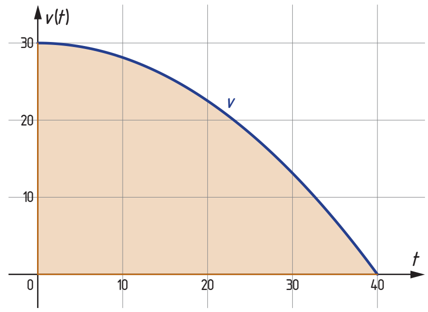
2.79 Mit der Funktion v mit $v(t)$ in m/s mit t Zeit in Sekunden wird das Bremsen einer Straßenbahn im Zeitintervall $[0; t_2]$ dargestellt. Die Straßenbahn bleibt zum Zeitpunkt t_2 an einer Haltestelle stehen.

1) Berechne die Strecke des Bremswegs der Straßenbahn!
2) Deute den Bremsweg geometrisch! *AN |4.3|*

a) $v(t) = \frac{1}{24} \cdot t^3 - \frac{1}{2} \cdot t^2 - \frac{1}{6} \cdot t + 10;\ t_2 = 6$
b) $v(t) = \frac{4}{15} \cdot t^3 - \frac{7}{3} \cdot t^2 + \frac{13}{5} \cdot t + 12;\ t_2 = 5$
c) $v(t) = \frac{5}{192} \cdot t^3 - \frac{13}{32} \cdot t^2 + \frac{5}{24} \cdot t + 11;\ t_2 = 8$
d) $v(t) = \frac{1}{60} \cdot t^3 - \frac{1}{4} \cdot t^2 - \frac{23}{30} \cdot t + 16;\ t_2 = 10$

TE 2.80 Ein Fahrzeug hat eine Geschwindigkeitsfunktion v mit $v(t) = a \cdot t^2 + b$ in m/s mit $0\text{ s} \leqslant t \leqslant 30\text{ s}$.

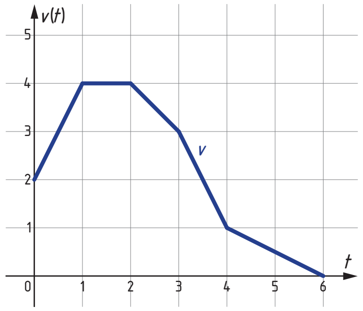
a) Modelliere die Geschwindigkeitsfunktion v!
b) Berechne den Bremsweg für $t = 0$ bis zum Stillstand!
c) Interpretiere die Fläche unter dem Graphen der Geschwindigkeitsfunktion und der Zeitachse!
d) Erkläre die Bedeutung von v' im Sachzusammenhang!



AN |4.3|

M 2.81 Gegeben ist der Graph der Geschwindigkeitsfunktion v mit $v(t)$.
Ordne den Wegstrecken die entsprechenden Terme aus A bis F zu!

AN |4.3|



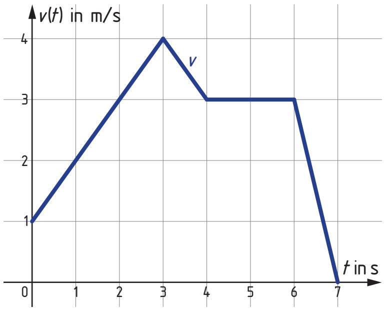
$s_{0,3}$	
$s_{3,6}$	
$s_{1,5}$	
$s_{3,4}$	

A	$\int_0^6 v(t)\,dt$
B	$-\int_6^3 v(t)\,dt$
C	10,5 LE
D	11,25 LE
E	10,25 LE
F	2 LE

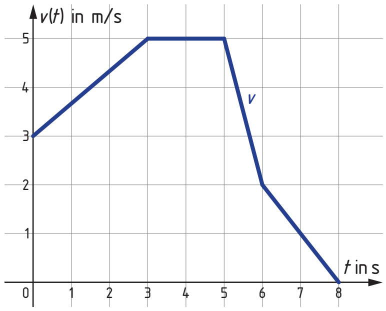
2.82 Gegeben ist der Graph der Geschwindigkeitsfunktion v mit $v(t)$.
Bestimme im dargestellten Zeitintervall $[0; t]$ die Strecke des zurückgelegten Wegs!

AN |4.3|

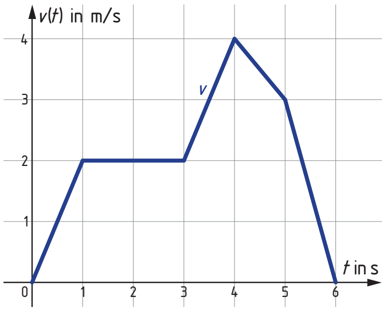
a)



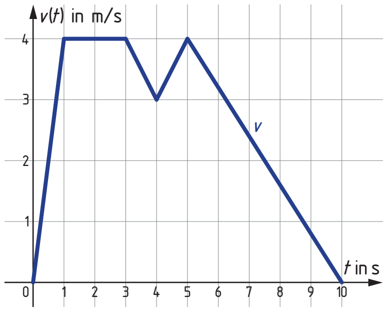
b)



c)

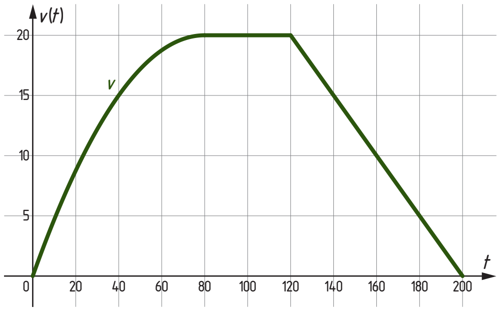


d)



2.83 Der Graph der Geschwindigkeitsfunktion v mit $v(t)$ ist dargestellt (t in s, $v(t)$ in m/s).

AN |4.3|



a) Ermittle die fehlenden Funktionsterme der Funktion v!

$$v(t) = \begin{cases} -\frac{1}{320} \cdot t^2 + \frac{1}{2} \cdot t & \text{wenn} \quad 0 \leqslant t \leqslant 80 \\ \rule{4cm}{0.4pt} & \text{wenn} \quad 80 < t \leqslant 120 \\ \rule{4cm}{0.4pt} & \text{wenn} \quad 120 < t \leqslant 200 \end{cases}$$

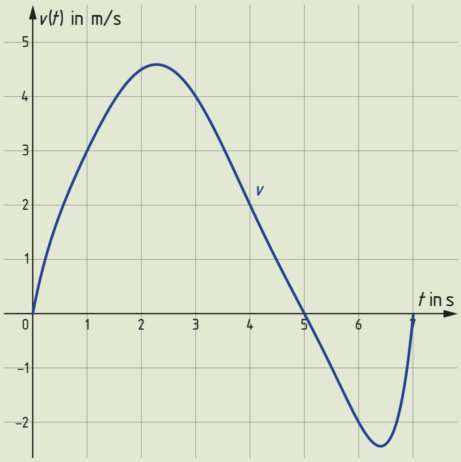
b) Verifiziere anhand des Graphen den Funktionsterm für $0 \leqslant t \leqslant 80$!

c) Berechne den Gesamtweg, der zurückgelegt wurde, in Kilometern!

Von beliebigen Geschwindigkeitsfunktionen auf den Weg schließen

Die Bewegung eines Körpers verläuft in einer geraden Linie. Wenn sich der Körper rückwärts bewegt, nimmt die Geschwindigkeitsfunktion v negative Werte $v(t)$ in einem Zeitintervall an.

2.84 Das Modell der Bewegung eines Autos auf einer geraden Linie wird mit der Geschwindigkeitsfunktion v im Zeitintervall [0; 7] durch $v(t)$ in m/s mit t in Sekunden dargestellt.



Interpretiere die folgenden Integrale!

AN |4.3|

a) $\int_0^5 v(t)\,dt$ b) $\int_5^7 v(t)dt$ c) $\int_0^7 v(t)\,dt$ d) $\int_0^5 v(t)\,dt + \left|\int_5^7 v(t)\,dt\right|$

a) Das Integral $\int_0^5 v(t)\,dt$ beschreibt den zurückgelegten geradlinigen Weg in Meter im Zeitintervall [0; 5], da die Geschwindigkeitsfunktion in diesem Intervall immer größer oder gleich null ist.

b) Das Integral $\int_5^7 v(t)\,\mathrm{d}t$ beschreibt den zurückgelegten Weg des Modellautos in genau entgegengesetzter Richtung. Es befindet sich daher zum Zeitpunkt 8 näher beim Startpunkt zum Zeitpunkt 0, also zum Zeitpunkt 5. Das Integral ist unterhalb der *t*-Achse und daher negativ.

c) Das Integral $\int_0^7 v(t)\,\mathrm{d}t$ beschreibt die Entfernung vom Startpunkt zum Zeitpunkt 8. Das Integral kann über die Nullstelle der Geschwindigkeitsfunktion interpretiert werden.

d) Das Integral $\int_0^5 v(t)\,\mathrm{d}t + \left|\int_5^7 v(t)\,\mathrm{d}t\right|$ beschreibt den insgesamt zurückgelegten Weg des Modellautos in Meter.

Bei der Bewegung eines Körpers auf einer geraden Linie mit der Geschwindigkeitsfunktion *v* im Zeitintervall $[t_1; t_2]$, kann die Entfernung zwischen dem Ort, an dem sich der Körper zum Zeitpunkt t_1 und dem Ort, an dem er sich zum Zeitpunkt t_2 befindet, mit dem bestimmten Integral $\left|\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,\mathrm{d}t\right| = |s(t_2) - s(t_1)|$ angegeben werden.

2.85 Die Geschwindigkeitsfunktion *v* mit $v(t) = \frac{19}{120}\cdot t^3 - \frac{37}{24}\cdot t^2 + \frac{203}{60}\cdot t + 1$ in m/s und $t \in [0; 6]$ die Zeit in Sekunden eines bewegenden Körpers auf einer geradlinigen Bahn ist gegeben.

a) Bestimme die Entfernung vom Anfangsort zum Ort zum Zeitpunkt $t = 6$!

b) Bestimme den gesamten zurückgelegten Weg! *AN |4.3|*

Lösung:

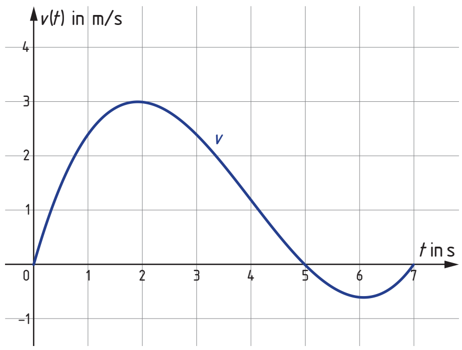
a) $\int_0^6 \left(\frac{19}{120}\cdot t^3 - \frac{37}{24}\cdot t^2 + \frac{203}{60}\cdot t + 1\right)\mathrm{d}t = \frac{36}{5} = 7{,}2$ m.

b) Die Geschwindigkeitsfunktion *v* hat an der Stelle $t = 4$ eine Nullstelle. Daher ergibt sich

$$\int_0^4 \left(\frac{19}{120}\cdot t^3 - \frac{37}{24}\cdot t^2 + \frac{203}{60}\cdot t + 1\right)\mathrm{d}t + \left|\int_4^6 \left(\frac{19}{120}\cdot t^3 - \frac{37}{24}\cdot t^2 + \frac{203}{60}\cdot t + 1\right)\mathrm{d}t\right| =$$

$$= \frac{424}{25} \approx 17 \text{ m.}$$

2.86 Die Geschwindigkeitsfunktion *v* mit *v*(*t*) in m/s und *t* in Sekunden eines bewegenden Körpers auf einer geradlinigen Bahn ist in der Abbildung dargestellt.



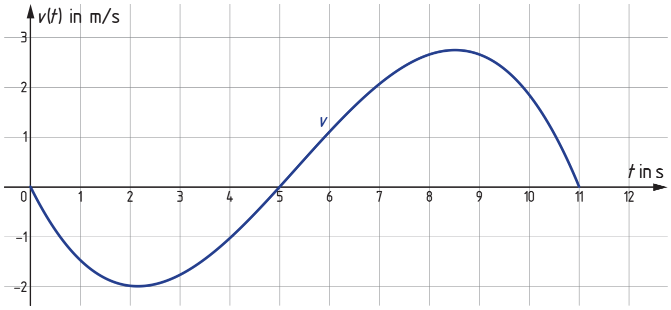
a) Gib den zurückgelegten Weg eines Körpers im Zeitintervall [0; 4] anhand eines Integrals an!

b) Gib den zurückgelegten Weg eines Körpers im Zeitintervall [6; 7] anhand eines Integrals an!

c) Gib den zurückgelegten Weg eines Körpers im Zeitintervall [0; 7] anhand eines Integrals an!

d) Interpretiere die Bedeutung des Integrals $\int_2^6 v(t)\,\mathrm{d}t$! *AN |4.3|*

2.87 Die Geschwindigkeitsfunktion v mit $v(t)$ in m/s und t in Sekunden eines bewegenden Körpers auf einer geradlinigen Bahn ist in der Abbildung dargestellt.



a) Gib den zurückgelegten Weg eines Körpers im Zeitintervall [0; 5] anhand eines Integrals an!

b) Deute das Integral $\int_0^5 v(t)\,dt$ im Sachzusammenhang!

c) Gib den zurückgelegten Weg eines Körpers im Zeitintervall [0; 11] anhand eines Integrals an! *AN | 4.3 |*

TE 2.88 Die Geschwindigkeitsfunktion v mit $v(t)$ in m/s und $t \in [0; 6]$ die Zeit in Sekunden eines bewegenden Körpers auf einer geradlinigen Bahn ist gegeben.

1) Bestimme die Entfernung vom Anfangsort zum Ort zum Zeitpunkt $t = 6$!

2) Bestimme den gesamten zurückgelegten Weg! *AN | 4.3 |*

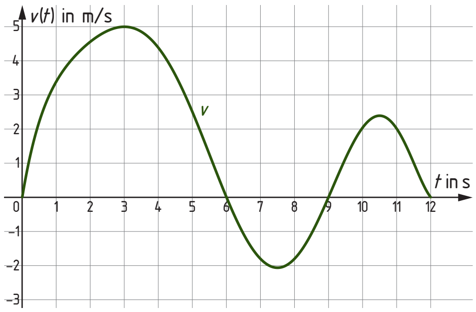
a) $v(t) = \frac{1}{9} \cdot t^2 - \frac{2}{3} \cdot t + 2$

b) $v(t) = \frac{1}{18} \cdot t^2 - \frac{5}{6} \cdot t + 2$

c) $v(t) = \frac{2}{9} \cdot t^3 - \frac{20}{9} \cdot t^2 + \frac{16}{3} \cdot t$

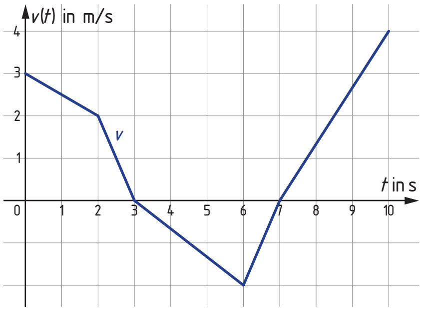
d) $v(t) = -\frac{1}{3} \cdot t^3 + \frac{10}{3} \cdot t^2 - 8 \cdot t$

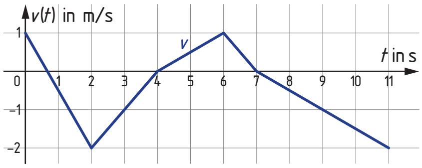
M 2.89 Die Geschwindigkeitsfunktion v eines Modellautos, das sich entlang einer geradlinigen Bahn bewegt, wird im Zeitintervall [0; 10] durch $v(t)$ in m/s mit t in Sekunden modelliert.
Kreuze die beiden Aussagen an, die für v zutreffen! *AN | 4.3 |*

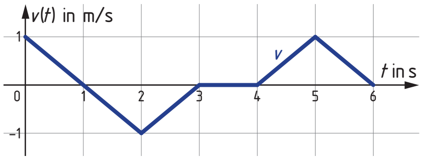


Das Modellauto bewegt sich nur in eine Richtung.	☐
Zum Zeitpunkt $t = 6$ ist das Modellauto gleich weit vom Startpunkt entfernt als zum Zeitpunkt $t = 12$.	☐
$\int_6^9 v(t)\,dt$ beschreibt den zurückgelegten Weg im Intervall [6; 9].	☐
$\int_0^{12} v(t)\,dt$ beschreibt den Weg, den das Modellauto gesamt zurücklegt.	☐
$\int_0^5 v(t)\,dt$ beschreibt den zurückgelegten Weg innerhalb der ersten 5 Sekunden.	☐

2.90 Ein Graph einer Geschwindigkeitsfunktion v mit $v(t)$ eines sich auf einer geradlinigen Bahn bewegenden Körpers ist gegeben.
Die Geschwindigkeit v wird in m/s gemessen, die Zeit t in Sekunden.
Bestimme im dargestellten Zeitintervall $[0; t_1]$ ***1)*** die insgesamt zurückgelegte Wegstrecke und ***2)*** die Entfernung vom Startpunkt zum Zeitpunkt t_1! *AN |4.3|*

a)


b)


c)


Von einer Beschleunigungsfunktion auf die Geschwindigkeitsfunktion und den Weg schließen

Das bestimmte Integral der Beschleunigungsfunktion a mit $a(t) \geqslant 0$ kann als Geschwindigkeitsänderung im Zeitintervall $[t_1; t_2]$ bestimmt werden durch: $v_{t_1, t_2} = \int_{t_1}^{t_2} a(t)\,dt$

2.91 Die Beschleunigung beim Start eines Raketenautos beträgt 5 m/s^2. Während der Fahrt wird die Beschleunigung als konstant angenommen. Die Zeit in Sekunden nach dem Start wird mit der Variablen t angegeben.

a) Bestimme die Funktion v mit $v(t)$, die die Geschwindigkeit des Raketenautos (in m/s) t Sekunden nach dem Start angibt!
b) Ermittle die Geschwindigkeitsänderung des Raketenautos im Zeitintervall [5; 9]!
c) Berechne die Wegstrecke des Raketenautos 250 Sekunden nach dem Start sowie ihre Geschwindigkeit zu diesem Zeitpunkt! *AN |4.3|*

a) Die Geschwindigkeitsfunktion v mit $v(t)$ liefert die Stammfunktion der Beschleunigungsfunktion $a = 5$ m/s^2: $v(t) = \int a(t)\,dt = \int 5\,dt = 5 \cdot t + C$. Die Integrationskonstante C wird durch eine Bestimmungsgleichung für zum Beispiel die Geschwindigkeitsfunktion bestimmt. Die Anfangsgeschwindigkeit zum Zeitpunkt 0 ist 0 m/s. (also $v(0) = 0$) Daher ergibt sich $v(t) = 5 \cdot t$.

b) Die Geschwindigkeitsänderung ergibt sich zu $v_{5,9} = v(9) - v(5) = 5 \cdot 9 - 5 \cdot 5 = 20$ m/s.

c) Für die Wegstrecke des Raketenautos gilt, dass die Funktion s mit $s(t)$ dies beschreibt, wobei gilt: $s(t) = \int v(t)\,dt = \int 5 \cdot t\,dt = 5 \cdot \frac{t^2}{2} + D$.
Die Integrationskonstante D benötigt eine Bestimmungsgleichung.
Es ist bekannt, dass zum Zeitpunkt 0 der zurückgelegte Weg 0 m/s ist (also $s(0) = 0$).
Daher ist $s(t) = 5 \cdot \frac{t^2}{2}$ und daher $s(250) = 5 \cdot \frac{250^2}{2} = 156\,250$ m und
$v(250) = 5 \cdot 250 = 1\,000$ m/s.
Die Integrationskonstanten C und D werden in der Physik manchmal auch v_0 bzw. s_0 bezeichnet.

Beschreibt eine Beschleunigungsfunktion *a* mit $a(t)$ die Beschleunigung eines Körpers zum Zeitpunkt *t* in einem abgeschlossenen Zeitintervall $[t_1; t_2]$ und ist $a(t)$ **größer oder gleich null** in diesem Zeitintervall, gilt für die Geschwindigkeitsänderung v_{t_1, t_2} in diesem Zeitintervall: $v_{t_1, t_2} = \int_{t_1}^{t_2} a(t) = v(t_2) - v(t_1)$.

Falls in einem Zeitintervall der Wert $a(t)$ der Beschleunigungsfunktion *a* eines Körpers **negativ** ist, so **bremst** bzw. **verzögert** dieser Körper seine Bewegung.

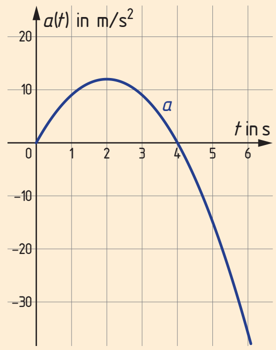
2.92 Ein Körper mit der Anfangsgeschwindigkeit $v(0) = 0$ m/s wird mittels der Beschleunigungsfunktion a in m/s² mit $a(t) = -3 \cdot t^2 + 12 \cdot t$ und *t* in s im Intervall [0; 6] beschleunigt.

a) Zeichne den Graphen von *a* und interpretiere den Verlauf!

b) Berechne $\int_0^4 a(t)\,dt$, $\int_4^5 a(t)\,dt$ und $\int_0^6 a(t)\,dt$ und interpretiere jeweils den Wert im Sachzusammenhang!

c) Bestimme die Wegstrecke im Zeitintervall [2; 4]! *AN |4.3|*

Lösung:



a) Im Intervall]0; 4[verläuft der Graph oberhalb der Zeitachse, daher beschleunigt der Körper. Für]4; 6] verläuft der Graph unterhalb der Zeitachse, daher wird der Körper abgebremst.

b) $\int_0^4 a(t)\,dt = \int_0^4 (-3 \cdot t^2 + 12 \cdot t)\,dt = 32$ m/s.
Nach 4 Sekunden hat der Körper eine Geschwindigkeit von 32 m/s.
Da die Anfangsgeschwindigkeit 0 m/s ist, ist 32 m/s die Maximalgeschwindigkeit des Körpers.
$\int_4^5 a(t)\,dt = \int_4^5 (-3 \cdot t^2 + 12 \cdot t)\,dt = -7$ m/s. Innerhalb der 4 und 5 Sekunden nimmt die Geschwindigkeit um 7 m/s ab. Der Körper bremst ab von der Geschwindigkeit von 32 m/s auf 25 ms/s. Die 25 m/s würde auch erreicht werden, wenn das folgende Integral berechnet wird: $\int_0^5 a(t)\,dt$
$\int_0^6 a(t)\,dt = \int_0^6 (-3 \cdot t^2 + 12 \cdot t)\,dt = 0$ m/s. Nach 6 Sekunden ist der Beschleunigungsvorgang abgeschlossen und der Körper hat wieder seine Anfangsgeschwindigkeit 0 m/s erreicht.

c) *v* ist die Stammfunktion von *a* und daher $v(t) = \int (-3 \cdot t^2 + 12 \cdot t)\,dt =$
$= -t^3 + 6 \cdot t^2 + C$; die Integrationskonstante ist 0, da $v(0) = 0$ m/s ist.
Das bestimmte Integral $\int_2^4 v(t)\,dt = \int_2^4 (-t^3 + 6 \cdot t^2)\,dt = 52$ m. Dies ist der zurückgelegte Weg im abgeschlossenen Intervall [2;4].

2.93 Ein Raketenauto hat eine konstante Startbeschleunigung von *a* m/s².

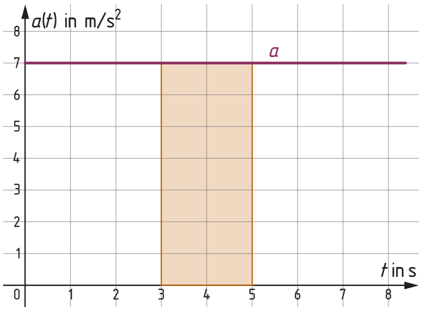
1) Berechne die Geschwindigkeitsänderungen im gegebenen Intervall!
2) Berechne den zurückgelegten Weg *t* Sekunden nach dem Start! *AN |4.3|*

a) $a = 12{,}5$ m/s²; [3; 9]; $t = 150$ **b)** $a = 30$ m/s²; [2; 3]; $t = 120$
c) $a = 15$ m/s²; [5; 7]; $t = 70$ **d)** $a = 35$ m/s²; [1; 9]; $t = 20$

2.94 Ein Flugzeug fliegt mit einer konstanten Geschwindigkeit von v in m/s.
Es beschleunigt t Sekunden lang mit einer Beschleunigung von a in m/s^2.
Berechne die Geschwindigkeit nach der Beschleunigungsphase! *AN |4.3|*

a) $v = 150$; $t = 20$; $a = 7$ **b)** $v = 180$; $t = 15$; $a = 5{,}5$

M **2.95** Gegeben ist der Graph einer konstanten Beschleunigungsfunktion a mit $a(t)$ in m/s^2 eines Körpers mit einer Anfangsgeschwindigkeit von 0 m/s und einen Anfangsweg von 0 m.
Kreuze die beiden korrekten Aussagen an! *AN |4.3|*



Die dazugehörige Geschwindigkeitsfunktion ist konstant.	☐
Die dargestellte Fläche gibt die zurückgelegte Wegstrecke von 14 m an.	☐
Die dargestellte Fläche gibt eine positive Geschwindigkeitsänderung von 14 m/s an.	☐
Für die dazugehörige Wegfunktion s ist $s(t) = 7 \cdot t^2$	☐
Für die dazugehörige Geschwindigkeitsfunktion v ist $v(t) = 7 \cdot t$	☐

M **2.96** Ergänze die Textlücken durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine korrekte Aussage entsteht! *AN |4.3|*
Ein Auto beschleunigt aus dem Stand t Sekunden lang. Die Funktion a mit $a(t) = 4$ m/s^2 modelliert die Beschleunigung nach dem Start.
Das Auto hat 9 Sekunden nachdem es gestartet ist, eine Geschwindigkeit von etwa

______ ❶ ______ und eine Wegstrecke von etwa ______ ❷ ______ gefahren.

❶	
90 km/h	☐
110 km/h	☐
130 km/h	☐

❷	
140 m	☐
160 m	☐
180 m	☐

TE **2.97** Die Beschleunigung eines Fahrzeugs beträgt aus dem Stand $s(0) = 0$ m und $v(0) = 0$ m/s und wird stets weniger. Wenn das Fahrzeug die Höchstgeschwindigkeit erreicht hat, beträgt die Beschleunigung null. Die Zeit der Beschleunigung kann t Sekunden nach dem Start annähernd mit der Funktion a mit
$a(t) = \frac{1}{200} \cdot t^2 - \frac{1}{4} \cdot t + 3$ in m/s^2 modelliert werden. Bis die Höchstgeschwindigkeit erreicht wird, gilt die Funktion a.

a) Berechne das Zeitintervall $[0; t_1[$ in dem das Fahrzeug beschleunigt!
b) Zeichne den Graphen der Funktion a in $[0; t_1]$!
Zeichne die Höchstgeschwindigkeit in den Graphen ein!
c) Berechne die Höchstgeschwindigkeit in km/h und die Wegstrecke, die das Fahrzeug bis zum Erreichen der Höchstgeschwindigkeit zurückgelegt hat!
d) Interpretiere das bestimmte Integral $\int_{10}^{18} a(t)\,dt$ im Sachzusammenhang! *AN |4.3|*

Die „Schrecksekunde" ist die Zeit, wie lange es beim Autofahren vom Erkennen einer Gefahr bis zum Einleiten des Bremsvorgangs dauert (ca. 1 Sekunde). Der **Reaktionsweg** ist dabei der Weg, der in dieser Sekunde vom Fahrzeug zurückgelegt wurde. Der **Bremsweg** bezeichnet die Strecke, die das Auto während des gesamten Bremsvorganges zurücklegt, bis es still steht. Die Gesamtstrecke aus Reaktions- und Bremsweg wird **Anhalteweg** genannt.

2.98 Angenommen, ein Fahrzeug verliert durch eine Vollbremsung nach der Schrecksekunde etwa 7 m/s Geschwindigkeit pro Sekunde.
Das Fahrzeug hat die Geschwindigkeit von 80 km/h bis zum Beginn des Bremsens.

a) Berechne den Reaktionsweg!
b) Berechne den Bremsweg und den Anhalteweg! *AN |4.3|*

2.1.5 Anwendungen in der Wirtschaft

2.99 Gegeben ist die Grenzkostenfunktion K' in GE/ME mit $K'(x) = \frac{3}{1\,000} \cdot x^2 - \frac{3}{5} \cdot x + 35$ und x in ME.

a) Berechne $K'(30)$ und interpretiere das Ergebnis im Sachzusammenhang!
b) Ermittle die Kostenkehre!
c) Berechne den Wert des Integrals $\int_{70}^{100} K'(x)\,dx$ und interpretiere das Ergebnis im Sachzusammenhang!
d) Interpretiere das $\int_{30}^{50} K'(x)\,dx$ geometrisch und im Sachzusammenhang!
d) Es ist bekannt, dass die Gesamtkosten bei 200 ME 7 000 GE sind. Bestimme die Kostenfunktion K! *AN |1.3|4.3|*

Wir erinnern uns:

Mit der **Kostenfunktion** K werden die Kosten in einer Geldeinheit (GE) für die Produktion von x Mengeneinheiten (ME) beschrieben.

Die **Grenzkostenfunktion** ergibt sich aus der ersten Ableitung K' der Kostenfunktion und drückt (näherungsweise) den Zuwachs an Kosten für jede weitere produzierte Mengeneinheit aus.

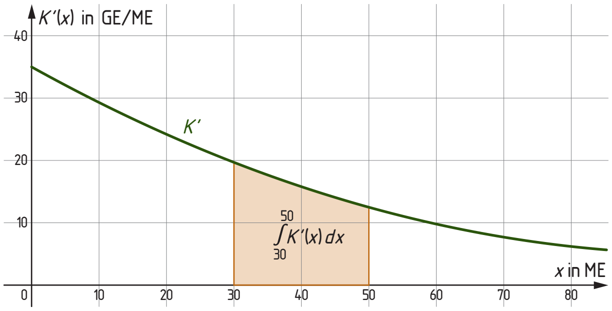
Eine **Kostenkehre** ist die Wendestelle der Kostenfunktion. Sie liegt vor, wenn die Produktionsmenge bei der degressiven Kostenentwicklung (Kostenfunktion ist konkav bzw. negativ gekrümmt) in eine progressive (Kostenfunktion ist konvex bzw. positiv gekrümmt) übergeht.

a) $K'(30) = \frac{3}{1\,000} \cdot 30^2 - \frac{3}{5} \cdot 30 + 35 = 19{,}7$ GE/ME. Dies bedeutet, wenn sich die Produktion von 30 auf 31 ME erhöht, dann steigen die Gesamtkosten um näherungsweise 19,7 GE.

b) Bei der Kostenkehre x gilt: $K''(x) = 0$ und daher muss die Grenzkostenfunktion noch einmal abgeleitet werden und ergibt: $K''(x) = \frac{6}{1\,000} \cdot x - \frac{3}{5}$ und daher $x = 100$ ME. Bei 100 Mengeneinheiten geht die degressive in eine progressive Kostenfunktion über.

c) $\int_{70}^{100} \left(\frac{3}{1\,000} \cdot x^2 - \frac{3}{5} \cdot x + 35\right) dx = 2\,550$ GE. 2 550 GE ist die Änderung der Gesamtkosten, wenn sich die Produktion von 70 auf 100 ME erhöht.

d) Geometrisch ist $\int_{30}^{50} K'(x)\,dx$ der Flächeninhalt zwischen dem Graphen der Funktion K' und der x-Achse im abgeschlossenen Intervall [30; 50]. Der Flächeninhalt entspricht der Änderung der Gesamtkosten, wenn sich die Produktion von 30 auf 50 ME erhöht.



e) K ist die Stammfunktion von K': $K(x) = \frac{1}{1\,000} \cdot x^3 - \frac{3}{10} \cdot x^2 + 35 \cdot x + C$ (mit einer noch nicht bekannten Zahl C). Für die Ermittlung der Integrationskonstanten C ist bekannt, dass $K(200) = 7\,000$ ist, also $\frac{1}{1\,000} \cdot 200^3 - \frac{3}{10} \cdot 200^2 + 35 \cdot 200 + C = 7\,000 \Rightarrow$
$\Rightarrow C = 4\,000$ GE. Für die Kostenfunktion K gilt $K(x) = \frac{1}{1\,000} \cdot x^3 - \frac{3}{10} \cdot x^2 + 35 \cdot x + 4\,000$.

2.100 Gegeben ist die Grenzkostenfunktion K' in GE/ME mit $K'(x) = 3 \cdot x^2 - 12 \cdot x + 16$ mit x in ME. Die Gesamtkosten an der Kostenkehre betragen 32 GE.
Ermittle die Kostenfunktion K! *AN |1.3|4.3|*

Lösung:
Aus $K''(x) = 6 \cdot x - 12$ ergibt sich die Kostenkehre aus $K''(x) = 0 \Rightarrow x = 2$ ME.
Die Stammfunktion $K(x) = x^3 - 6 \cdot x^2 + 16 \cdot x + C$; die Integrationskonstante C ergibt sich aus: $K(2) = 32 \Rightarrow C = 16$ GE. Die Kostenfunktion K ist $K(x) = x^3 - 6 \cdot x^2 + 16 \cdot x + 16$.

2.101 Die Grenzkostenfunktion K' mit $K'(x)$ ist gegeben.
Ermittle die Kostenfunktion K! *AN |1.3|4.3|*

a) $K'(x) = x + \frac{3}{2}$; $K(2) = 8$
b) $K'(x) = 3$; $K(4) = 12$
c) $K'(x) = \frac{1}{14} \cdot x^2 - \frac{2}{5} \cdot x + \frac{169}{210}$; $K(7) = 5$
d) $K'(x) = \frac{2}{25} \cdot x^2 - \frac{12}{25} \cdot x + \frac{73}{75}$; an der Kostenkehre sind die Gesamtkosten $\frac{57}{25}$ GE

2.102 Gegeben ist die Grenzkostenfunktion K' in GE/ME.
1) Berechne den Wert des Integrals!
2) Interpretiere das Integral geometrisch im Sachzusammenhang!
3) Bestimme die Kostenkehre (falls möglich)! *AN |1.3|4.3|*

a) $K'(x) = x + 2$; $\int_{7}^{10} K'(x)\,dx$
b) $K'(x) = \frac{1}{9} \cdot x + 4$; $\int_{3}^{9} K'(x)\,dx$
c) $K'(x) = 3 \cdot x^2 + 60 \cdot x + \frac{1\,000}{3}$; $\int_{10}^{20} K'(x)\,dx$

M **2.103** Gegeben ist die Kostenfunktion K und die dazugehörige Grenzkostenfunktion K'. Kreuze die beiden Terme an, die die absolute Kostenänderung beschreiben, wenn die Produktion von 3 auf 4 ME erhöht wird! *AN |1.3|4.3|*

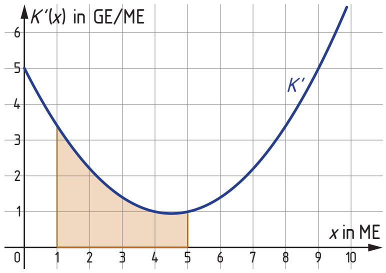
$K(4) - K(3)$	☐	$K'(4)$	☐	$K(4)$	☐
$\int_{0}^{4} K'(x)\,dx$	☐	$\int_{3}^{4} K'(x)\,dx$	☐		

2.104 Gegeben ist der Graph der Grenzkostenfunktion K'.

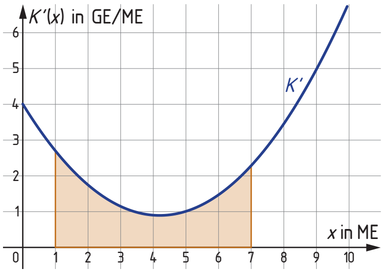
1) Stelle den dargelegten Flächeninhalt als Integral dar!
2) Interpretiere den Flächeninhalt im abgeschlossenen Intervall im Sachkontext!

AN |1.3|4.3|

a)

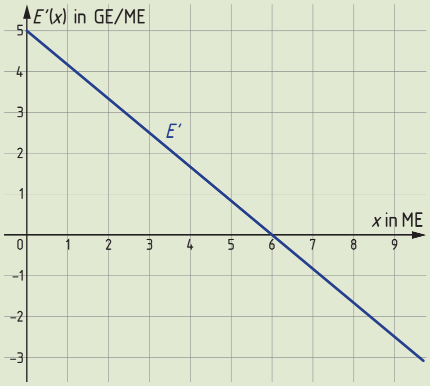


b)



TE

2.105 Gegeben ist der Graph der Grenzerlösfunktion E'.



a) Ermittle aus dem Graphen die lineare Grenzerlösfunktion E'!
b) Interpretiere die Nullstelle von E' in Bezug auf den Erlös E!
c) Berechne die Erlösfunktion E!
d) Ermittle die Nachfragefunktion p!
e) Berechne den maximalen Erlös ohne Integralrechnung!
f) Berechne den maximalen Erlös direkt aus der Erlösfunktion!

AN |1.3|4.3|

Zur Erinnerung:

Die **Nachfragefunktion** oder Preis-Absatz-Funktion p gibt den Preis eines Produkts in Abhängigkeit von der nachgefragten Menge x an.

Die **Erlösfunktion** E gibt den Erlös in Abhängigkeit von der abgesetzten Menge x an:

$$E(x) = x \cdot p(x)$$

Die **Grenzerlösfunktion** ergibt sich aus der ersten Ableitung von E' der Erlösfunktion E und drückt (näherungsweise) den Zuwachs an Erlös für jede weitere verkaufte Mengeneinheit aus.

a) $E'(x) = k \cdot x + d$ mit $d = 5$ und $k = \frac{5-0}{0-6} = -\frac{5}{6}$ und daher $E'(x) = -\frac{5}{6} \cdot x + 5$.
b) Die Nullstelle der Grenzerlösfunktion ist die erlösmaximierende Stelle.
c) Die Erlösfunktion E ist die Stammfunktion von E'. Bei jeder Erlösfunktion gilt: $E(0) = 0$ und daher ist die Integrationskonstante immer null. $E(x) = -\frac{5}{12} \cdot x^2 + 5 \cdot x$.
d) Es gilt: $E(x) = x \cdot p(x) \;\Rightarrow\; p(x) = \frac{E(x)}{x} = -\frac{5}{12} \cdot x + 5$.

e) Der maximale Erlös ist die Fläche unter der Erlösfunktion bis zur erlösmaximierenden Stelle und ergibt sich daher zu $5 \cdot \frac{6}{2} = 15$ GE.

f) Der maximale Erlös ist $E(6) = -\frac{5}{12} \cdot 6^2 + 5 \cdot 6 = 15$ GE.

2.106 Ermittle die Erlösfunktion E, wenn die Grenzerlösfunktion E' mit $E'(x) = -\frac{4}{5} \cdot x + 80$ bekannt ist! *AN |4.3|*

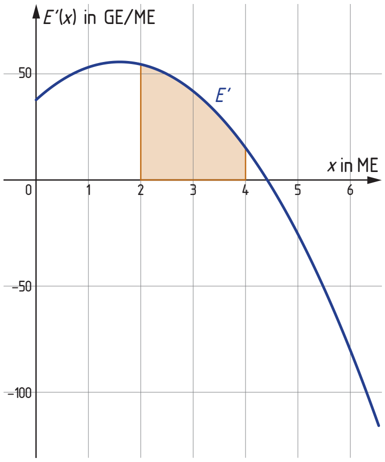
Lösung:
Die Erlösfunktion E ist die Stammfunktion der Grenzerlösfunktion, wobei die Integrationskonstante null ist: $E(x) = -\frac{4}{10} \cdot x^2 + 80 \cdot x$.

2.107 Ermittle die Erlösfunktion E, wenn die Grenzerlösfunktion E' mit $E'(x)$! *AN |4.3|*

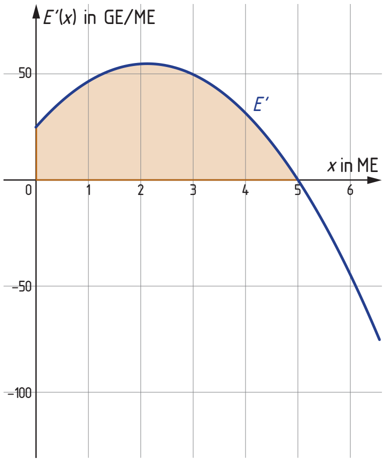
a) $E'(x) = -\frac{15}{8} \cdot x + 15$ **b)** $E'(x) = 7$ **c)** $E'(x) = -20 \cdot x^2 + 40 \cdot x + \frac{560}{3}$

2.108 Gegeben ist der Graph der Grenzkostenfunktion E'.
1) Stelle die dargelegte Flächeninhalt als Integral dar!
2) Interpretiere den Flächeninhalt im abgeschlossenen Intervall im Sachkontext!
AN |4.3|

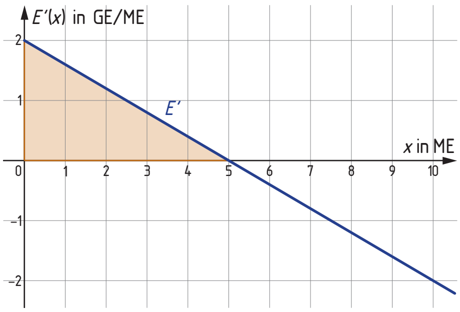
a)



b)



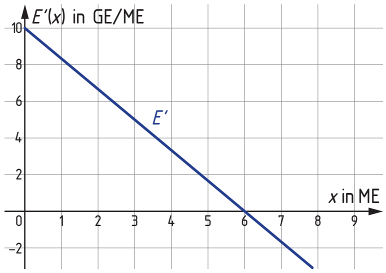
M **2.109** Von der Erlösfunktion E ist die Gerade der Grenzerlösfunktion E'.
Kreuze die beiden Aussagen an, die richtig sind! *AN |1.3|4.3|*

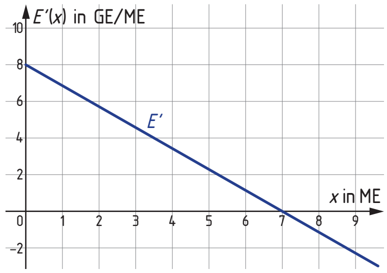


Der maximale Erlös ist 5 GE.	☐
Die dargestellte Fläche ist der maximale Erlös.	☐
$E(10) = 0$.	☐
Der Erlös bei 7 ME ist negativ.	☐
Die erlösmaximierende Stelle ist bei 5 ME.	☐

2.110 Gegeben ist der Graph der Grenzerlösfunktion E'.

1) Ermittle aus dem Graphen die lineare Grenzerlösfunktion E'!
2) Interpretiere die Nullstelle von E' in Bezug auf den Erlös E!
3) Berechne die Erlösfunktion E!
4) Ermittle die Nachfragefunktion p!
5) Berechne den maximalen Erlös ohne Integralrechnung!
6) Berechne den maximalen Erlös direkt aus der Erlösfunktion! *AN |1.3|4.3|*

a) 

b) 

2.111 Gegeben ist die Grenzerlösfunktion E' mit $E'(x)$. *AN |4.3|*
Bestimme die zugehörige Erlösfunktion E und die Nachfragefunktion p!

a) $E'(x) = -\frac{5}{8} \cdot x + 5$

b) $E'(x) = -3 \cdot x + 12$

c) $E'(x) = -\frac{3}{16} \cdot x^2 + \frac{1}{4} \cdot x + \frac{3}{2}$

d) $E'(x) = -\frac{2}{125} \cdot x^2 + \frac{4}{25} \cdot x + \frac{8}{15}$

2.112 Gegeben ist die Grenzgewinnfunktion G' in GE/ME mit $G'(x) = -\frac{8}{33} \cdot x + \frac{280}{33}$ mit x in ME.

a) Berechne $G'(30)$ und interpretiere das Ergebnis im Sachzusammenhang!
b) Ermittle die gewinnmaximierende Stelle!
c) Berechne den Wert des Integrals $\int_{10}^{25} G'(x)\,dx$ und interpretiere das Ergebnis im Sachzusammenhang!
d) Interpretiere das $\int_{30}^{50} G'(x)\,dx$ geometrisch und im Sachzusammenhang!

Es ist bekannt, dass der Break-Even-Point bei 15 ME liegt.

e) Bestimme die Gewinnfunktion G! *AN |1.3|4.3|*

Zur Erinnerung:

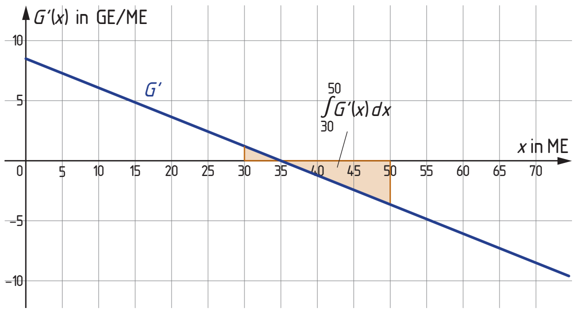
Ein Unternehmen hat eine **Gewinnfunktion** G mit $G(x) = E(x) - K(x)$.
Die **Gewinnschwelle (Break-Even-Point)** zeigt jene Produktionsmenge an, ab der das Unternehmen Gewinn macht.
Die **Grenzgewinnfunktion** ergibt sich aus der ersten Ableitung G' der Gewinnfunktion G und drückt (näherungsweise) den Zuwachs an Gewinn für jede weitere verkaufte Mengeneinheit aus!

a) $G'(30) = -\frac{8}{33} \cdot 30 + \frac{280}{33} = \frac{40}{33} = 1{,}21$ GE/ME. Dies bedeutet, wenn sich die Produktion von 30 auf 31 ME erhöht, dann steigt der Gewinn um näherungsweise 1,21 GE.

b) Bei der gewinnmaximierenden Stelle x muss gelten: $G'(x) = 0 \Rightarrow x = 35$ ME.

c) $\int_{10}^{25} \left(-\frac{8}{33} \cdot x + \frac{280}{33}\right) dx = 63{,}64$ GE. 63,64 GE ist die Änderung des Gewinns, wenn sich die Produktion von 10 auf 25 ME erhöht. Es handelt sich um eine positive Gewinnänderung.

d) Geometrisch ist $\int_{30}^{50} G'(x)\,dx$ der Flächeninhalt zwischen dem Graphen der Funktion G' und der x-Achse im abgeschlossenen Intervall [30; 50]. Der Flächeninhalt entspricht der Änderung des Gewinns, wenn sich die Produktion von 30 auf 50 ME erhöht. In diesem Fall –24,24 GE, dies bedeutet, dass es sich um eine negative Gewinnänderung handelt.



e) G ist die Stammfunktion von G': $G(x) = -\frac{4}{33}\cdot x^2 + \frac{280}{33}\cdot x + C$ (mit einer noch nicht bekannten Zahl C). Für die Ermittlung der Integrationskonstanten C ist bekannt, dass $G(15) = 0$ ist, also $-\frac{4}{33}\cdot 15^2 + \frac{280}{33}\cdot 15 + C = 0 \Rightarrow C = -100$ GE.
Für die Gewinnfunktion G gilt $G(x) = -\frac{4}{33}x^2 + \frac{280}{33}\cdot x - 100$.

2.113 Gegeben ist die Grenzgewinnfunktion G' mit $G'(x) = -\frac{3}{10}\cdot x^2 + \frac{7}{10}\cdot x + \frac{21}{2}$.
Ermittle die Gewinnfunktion, wenn bekannt ist, dass die Fixkosten 20 GE sind!
AN |4.3|

Lösung:
G ist die Stammfunktion von G': $G(x) = -\frac{1}{10}\cdot x^3 + \frac{7}{20}\cdot x^2 + \frac{21}{2}\cdot x + C$. Für die Ermittlung von C ist bekannt, dass $G(0) = -20$ (Der Gewinn bei keiner Produktion sind die negativen Fixkosten.) und daher $G(x) = -\frac{1}{10}\cdot x^3 + \frac{7}{20}\cdot x^2 + \frac{21}{2}\cdot x - 20$.

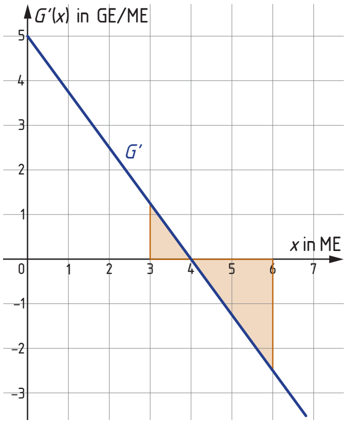
TE **2.114** Gegeben ist die Grenzgewinnfunktion G' mit $G'(x)$. Der Break-Even-Point liegt bei b ME.

1) Interpretiere das $\int_{2}^{5} G'(x)\,dx$ geometrisch und im Sachzusammenhang!

2) Ermittle die Gewinnfunktion!
AN |4.3|

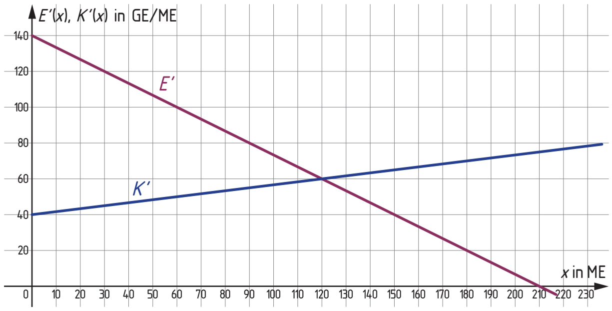
a) $G'(x) = -\frac{3}{10}\cdot x^2 + \frac{149}{60}\cdot x - \frac{31}{10}$; $b = 6$ **b)** $G'(x) = -3\cdot x^2 + \frac{191}{15}\cdot x + \frac{923}{60}$; $b = 2{,}5$

M **2.115** Von der Gewinnfunktion G ist die Gerade der Grenzgewinnfunktion G' dargestellt. Die Fixkosten sind positiv.
Kreuze die beiden Aussagen an, die richtig sind!
AN |1.3|4.3|



Der maximale Gewinn ist 20 GE.	☐
Die dargestellte Fläche stellt eine negative Gewinnänderung dar.	☐
Wenn sich die Produktion von 4 auf 5 ME ändert, gibt es eine positive Gewinnänderung.	☐
Wenn sich die Produktion von 1 auf 3 ME ändert, gibt es eine negative Gewinnänderung.	☐
Die gewinnmaximierende Stelle ist bei 4 ME.	☐

TE **2.116** Die Darstellung zeigt die Graphen der linearen Grenzerlösfunktion E' und der linearen Grenzkostenfunktion K'.



a) Ermittle aus der Graphik die Grenzerlösfunktion E' und die Grenzkostenfunktion K'!
b) Interpretiere den Schnittpunkt der Graphen von E' und K' in Bezug auf den Gewinn!
c) Berechne die Gewinnfunktion, wenn die Fixkosten 5 000 GE betragen!
d) Berechne den maximalen Gewinn! *AN |1.3|4.3|*

2.1.6 Weitere naturwissenschaftliche Deutungen

Zusammenhang zwischen Kraft und Arbeit

Die Ursache der Bewegungsänderung eines Körpers von a nach b ist die Kraft F in Newton (N). F ist der nicht-konstante Betrag der Kraft, wobei die Kraftrichtung mit der Wegrichtung übereinstimmt. Dann ist $F(s)$ die Kraft des zurückgelegten Wegs s in Meter (m) und die verrichtete Arbeit W in Joule (J; 1 J = 1 Nm) im abgeschlossenen Intervall $[a; b]$:

$$W_{a,\,b} = \int_a^b F(s)\,ds$$

Die Arbeit ist das Integral der Kraft nach dem Weg.

2.117 Wenn eine Stahlfeder auseinandergezogen wird, gibt es den Bereich, wo die Kraft F direkt proportional zur Ausdehnung aus der Ruhelage der Stahlfeder ist. Die Federkraft F in Newton kann durch die Federgleichung $F(s) = 4 \cdot s$, wobei s die Ausdehnung in m ist, im abgeschlossenen Intervall [0; 0,4] dargestellt werden.

a) Ermittle die benötigte Arbeit zur Audehnung der Stahlfeder von 10 cm auf 30 cm!
b) Die an der Stahlfeder verrichtete Arbeit wird als Energie E in der Stahlfeder gespeichert. Die Stahlfeder wurde um 40 cm aus der Ruhelage ausgedehnt. Bestimme die in ihr gespeicherte Energie!
c) Deute die Arbeit, die benötigt wird, um eine Stahlfeder von einer Ausdehnung von 10 cm auf 40 cm zu bringen, geometrisch! *AN |4.3|*

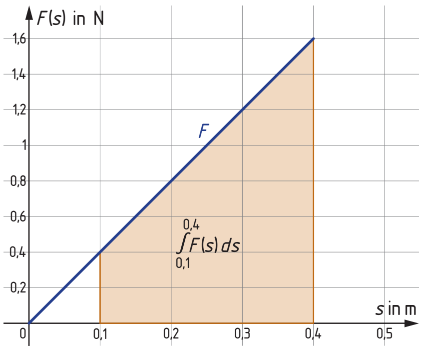
a) $W_{0{,}1,\,0{,}3} = \int_{0{,}1}^{0{,}3} 4s\,ds = \frac{4}{25} = 0{,}16$ J.

Die Arbeit beträgt 0,16 J.

b) $E = W_{0,\,0{,}4} = \int_0^{0{,}4} 4s\,ds = \frac{8}{25} = 0{,}32$ J.

Die Energie beträgt 0,32 J.

c)



2.118 Mit der Federgleichung wird die benötigte Kraft in Newton zur Dehnung einer Stahlfeder von Ruhelage um s Meter beschrieben. *AN |4.3|*

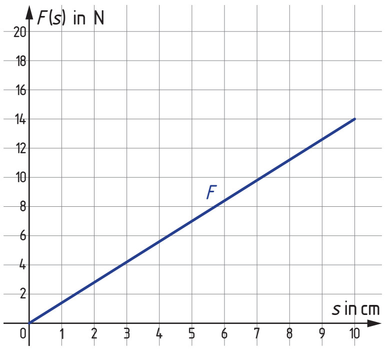
1) Bestimme die benötigte Arbeit W in Joule (J), um die Stahlfeder von der Ausdehnung a auf die Ausdehnung b zu bringen!
2) Interpretiere den Wert von W geometrisch!

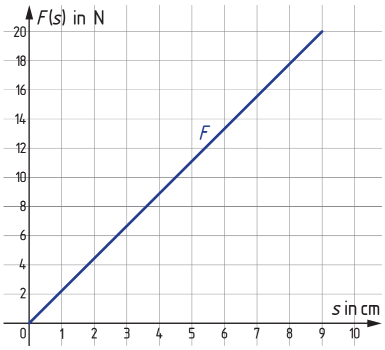
a) $F(s) = 5 \cdot s$; $a = 0{,}2$; $b = 0{,}5$ b) $F(s) = 0{,}2 \cdot s$; $a = 0{,}125$; $b = 0{,}3$

2.119 Mit der Funktion F in Newton wird die Kraft $F(s)$ beschrieben, die an der Stelle s in m einwirkt. Durch diese Kraft wird ein Körper von der Stelle a zur Stelle b bewegt. Bestimme die dafür notwendige Arbeit W und deute dies geometrisch!

a) $F(s) = 2 \cdot s^2$; $a = 3$; $b = 5$ b) $F(s) = \frac{1}{s^2}$; $a = 1$; $b = 4$

2.120 Am Ende einer elastischen Feder wird eine Masse befestigt. Das Kraft-Weg-Diagramm zeigt die Längenänderung der Feder durch die Gewichtskraft F mit $F(s)$ der Masse. Berechne die bei der Dehnung entstandene Arbeit in Joule! *AN |4.3|*

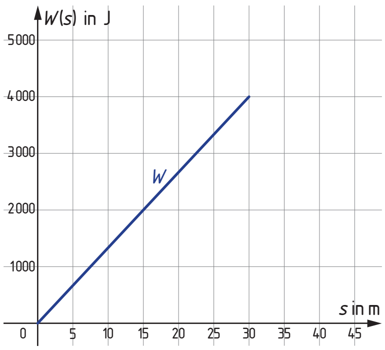
a)


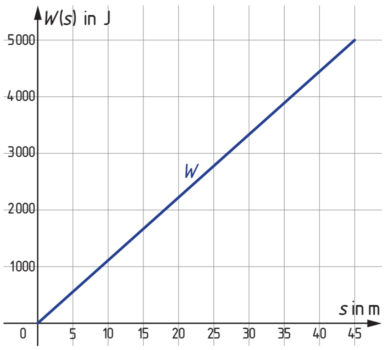
b)


2.121 In einem automatischen Sicherheitssystem wird die Position einer Überwachungskamera von einem Roboterarm gesteuert. Dieser wird über einen Servomotor betätigt, der eine Kraft auf eine Stößelstange ausübt. Die Kraft F ist gegeben durch $F(s) = 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{6} \cdot \frac{s^2}{0{,}007}\right)$ und s die Position des Endes der Stößelstange. *AN |4.3|*

a) Berechne die Arbeit die verrichtet wird, wenn der Servomotor die Stößelstange im Intervall [0,01; 0,05] bewegt!
b) Interpretiere das Ergebnis geometrisch!

2.122 Eine Zugmaschine verrichtet beim Ziehen eines Baumstamms die Arbeit W in Joule. Die Abbildung zeigt den Graphen von W in Abhängigkeit von der Zugstrecke s in Meter. Argumentiere, dass die von der Maschine beim Ziehen aufgewendete Kraft konstant ist und bestimme ihren Wert! *AN |4.3|*

a)


b)


M **2.123** Ergänze die Textlücken durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine korrekte Aussage entsteht! *AN 4.3*

Wenn eine Schraubfeder aus ihrer Ruhelage 0 bis zur Länge s gestaucht wird, ergibt sich der Betrag der rücktreibenden Kraft *F* durch $F(s) = -k \cdot s$.

Wenn die Feder ______ ❶ ______ so weit gestaucht wird, dann ______ ❷ ______ sich die Arbeit.

❶	
halb	☐
doppelt	☐
dreifach	☐

❷	
halbiert	☐
verdoppelt	☐
vervierfacht	☐

Zusammenhang zwischen Leistung und Arbeit

Wird eine zeitveränderliche Leistung *P* mit $P(t) > 0$ im Intervall $[t_1; t_2]$ verbracht, so ist die verrichtete Arbeit W_{t_1, t_2}: $W_{t_1, t_2} = \int_{t_1}^{t_2} P(t)\,dt$.

Die Arbeit ist das Integral der Leistung nach der Zeit.

TE **2.124** Die Leistung *P* mit $P(t)$ in Watt (W) steigt innerhalb von einer Stunde von 0,3 W auf 2,3 W an (t = Zeit in Sekunden).
Bestimme die Arbeit in kJ, die von der Maschine in dieser Zeit verrichtet wird, und kontrolliere das Ergebnis mit Technologieeinsatz! *AN 4.3*

$P(t) = k \cdot t + d$

mit $d = P(0) = 0{,}3$

und $k = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{2{,}3 - 0{,}3}{3\,600 - 0} = \frac{1}{1\,800}$

und daher $P(t) = \frac{1}{1\,800} \cdot t + 0{,}3$

$\Rightarrow W_{3\,600,\,0} = \int_0^{3\,600} \left(\frac{1}{1\,800} \cdot t + 0{,}3\right) dt =$

$= 4\,680 \text{ J} = 4{,}68 \text{ kJ}$

CAS	
1	P(t):=k*t+d → $P(t) := k\,t + d$
2	I: P(0)=0.3 → $I: d = \frac{3}{10}$
3	II: P(3600)=2.3 → $II: d + 3600\,k = \frac{23}{10}$
4	{I, II} Löse: $\left\{\left\{d = \frac{3}{10}, k = \frac{1}{1800}\right\}\right\}$
5	W_{3600,0}:=Integral(1/1800*t+3/10, 0, 3600) → $W_{3600,0} := 4680$

2.125 Die Leistung *P* mit $P(t)$ in Watt (*W*) steigt innerhalb der Zeit *t* ***1)*** linear ***2)*** exponentiell von *a* W auf *b* W ab (t = Zeit in Sekunden).
Bestimme die Arbeit in kJ, die von der Maschine in dieser Zeit verrichtet wird! *AN 4.3*

a) $a = 5;\ b = 200;\ t = 20$ min **b)** $a = 50;\ b = 150;\ t = 2$ h

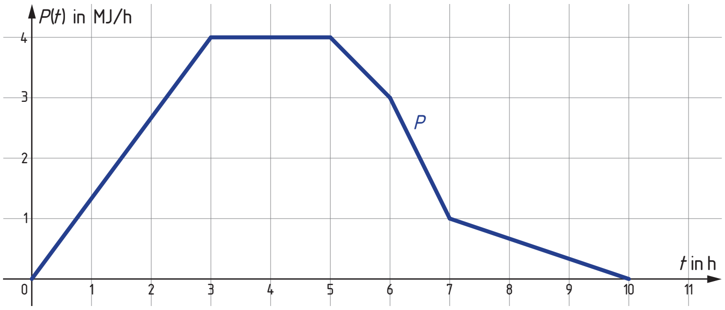
TE **2.126** Die elektrische Leistung P in W, die an einem bestimmten Werktag von den Elektrogeräten entnommen wird, ist durch

$P(t) = -\frac{3\,275}{648\,648} \cdot t^5 + \frac{36\,625}{108\,108} \cdot t^4 - \frac{4\,994\,875}{648\,648} \cdot t^3 + \frac{3\,591\,125}{54\,054} \cdot t^2 - \frac{929\,125}{6\,006} \cdot t + 400$

($0 \leq t < 24$) gegeben (Zeit t in Stunden).
Stelle die an diesem Werktag gesamt verrichtete elektrische Arbeit grafisch dar und berechne ihren Wert! *AN |4.3|*

TE **2.127** Der Leistungsverlauf P in kW eines kleinen Holzfeuers kann modelliert werden mit $P(t) = 13 \cdot x \cdot (80 - x) \cdot e^{-\frac{1}{200} \cdot (x - 40)^2} - \frac{67}{10}$, wobei t die Zeit in Minuten darstellt.
Berechne die in 80 Minuten vom kleinen Holzfeuer abgegebene Wärmeenergie! *AN |4.3|*

2.128 Die von einem Heizstrahler in einen bestimmten Zeitintervall abgegebene Wärmemenge ist gleich der von dem Heizstrahler in diesem Zeitintervall geleisteten Arbeit. Ein bestimmter Heizstrahler lässt sich durch eine Zeituhr einstellen, sodass sein Leistungsverlauf dem dargestellten Graphen entspricht.
Ermittle anhand des Graphen die im Zeitintervall [0; 10] abgegebene Wärmeenergie! *AN |4.3|*



Zusammenhang zwischen Ladungsmenge und Stromstärke

Die im Zeitverlauf von t_1 bis t_2 transportierte Ladungsmenge Q in Coulomb (C) bei einer zeitlich veränderlichen Stromstärke $I(t)$ ergibt sich zu: $Q_{t_1,\,t_2} = \int_{t_1}^{t_2} I(t)\,dt$.

Die Messung der **Ladungsmenge Q** erfolgt in der Einheit **Coulomb (C).** 1 C beträgt jene Ladungsmenge, die bei einem Strom der Stärke 1 A in 1 s verschoben wird, daher gilt auch: **1 C = 1 As**

TE **2.129** Berechne die Ladungsmenge Q, die der Strom I mit $I(t)$ im abgeschlossenen Intervall $[t_1; t_2]$ transportiert! *AN |4.3|*

a) $I(t) = 5 \cdot \sin(\pi \cdot t)$; $t_1 = 0$; $t_2 = 1$ **b)** $I(t) = 7 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} \cdot t\right)$; $t_1 = 1$; $t_2 = 3$

TE **2.130** Für die Stromstärke I gilt $I(t) = 2 \cdot e^{-\frac{t}{4}}$ (t ist die Zeit in Sekunden).

a) Stelle die Gleichung der Ladungsmenge Q auf!
b) Berechne die Ladung nach 4 Sekunden!
c) Berechne die maximale Ladung! *AN |4.3|*

2.2 Exaktifizierungen der Integralrechnung

Der Zusammenhang zwischen Integral- und Stammfunktionen wird in Hauptsätzen beschrieben. Die Aussage des ersten Hauptsatzes ist, dass jede Integralfunktion einer stetigen Funktion eine Stammfunktion ist.

2.2.1 Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung

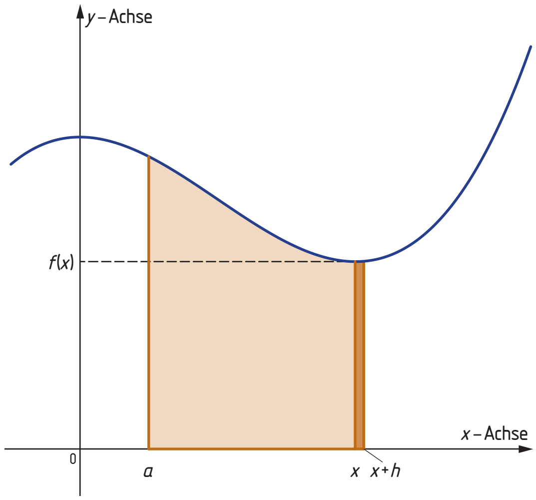
Ist f über jedem abgeschlossenen Teilintervall von I integrierbar und ist $a \in I$, so heißt die Funktion $F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ für alle $x \in I$ **Integralfunktion** von f zur unteren Grenze a.

2.131 Erster Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung

Die Funktion f ist im Intervall I stetig und $a \in I$. Dann ist die Integralfunktion F_a auf I differenzierbar und sie ist eine Stammfunktion von f, dh. $F_a{}' = f$.

a) Zeige die Richtigkeit des Hauptsatzes anschaulich!
b) Erkläre, welche allgemeine Aussage dieser Hauptsatz liefert! *AN |3.1|3.2|*

a) Zur Begründung dieses Hauptsatzes ist für $x \in I$ die Ableitung $F_a{}'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{F_a(x+h) - F_a(x)}{h}$ zu bestimmen.
Ohne Einschränkung ist der Graph von f oberhalb der x-Achse und es sei $h > 0$ mit $x + h \in I$.
Die Differenz $F_a(x+h) - F_a(x)$ entspricht dem Flächeninhalt des dunkel markierten Flächenstreifens. Er hat die Breite h und näherungsweise die Höhe $f(x)$, daher ist $F_a(x+h) - F_a(x) \approx f(x) \cdot h$.
Wenn $h \to 0$ geht (konvergiert), geht $\frac{F_a(x+h) - F_a(x)}{h}$ gegen $f(x)$.



b) Mit diesem Satz wird sichergestellt, dass eine stetige Funktion immer eine Stammfunktion besitzt.

Der zweite Hauptsatz macht eine Aussage, wie bestimmte Integrale mithilfe einer Stammfunktion berechnet werden können:

2.132 Zweiter Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung

Ist eine reelle Funktion f im Intervall I stetig und F eine beliebige Stammfunktion von f, dann gilt für alle $a, b \in I$: $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

a) Zeige die Richtigkeit des Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung unter Anwendung des ersten Hauptsatzes!
b) Erkläre, welche allgemeine Aussage dieser Hauptsatz liefert! *AN |3.1|3.2|*

a) Nach dem ersten Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung ist die Integralfunktion F_a auch eine Stammfunktion von f. Sie unterscheidet sich von F lediglich durch eine additive Konstante C, daher ist $F(x) = F_a(x) + C$ für alle $x \in I$. Einsetzen von a und b ergibt $F(a) = F_a(a) + C = C$ und $F(b) = F_a(b) + C = F_a(b) + F(a) \Rightarrow F_a(b) = F(b) - F(a)$.

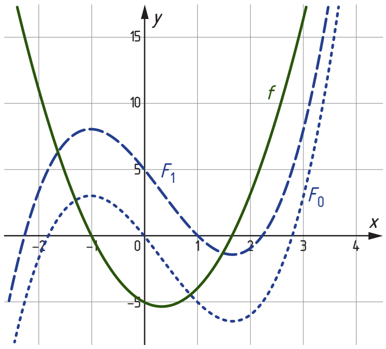
Daher ergibt sich: $\int_a^b f(x)\,dx = F_a(b) = F(b) - F(a)$.

b) Mit diesem Satz kann ein bestimmtes Integral einer stetigen Funktion f berechnet werden, wenn die Stammfunktion von f bekannt ist.

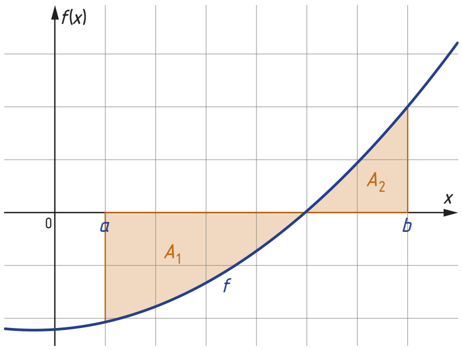
2.133 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 3 \cdot x^2 - 2 \cdot x - 5$. Zu dieser werden die Integralfunktion F_0 mit $F_0(x)$ und F_1 mit $F_1(x)$ dargestellt.

a) Erkläre, wie sich die beiden Integralfunktionen voneinander unterscheiden!

b) Begründe, dass für alle $a < b$ stets $F_a(x) = F_b(x) + C$ gilt, wobei C eine konstante reelle Zahl ist! *AN |3.1|3.2|*



M **2.134** Kreuze die beiden Aussagen an, die für die Integralfunktion F_a der Funktion f richtig sind, wobei A_1 und A_2 die Flächeninhalte darstellen! *AN |3.1|3.2|*



$F_a(a) = 0$	☐
$F_a(x)$ ist stets positiv.	☐
F_a ist stets ungleich null.	☐
$F_a(b) = A_2 + A_1$	☐
$F_a(b) = A_2 - A_1$	☐

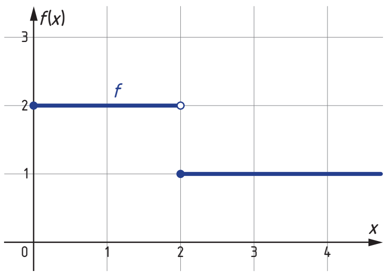
2.135 Zeige die Rechenregeln für bestimmte Integrale mithilfe des zweiten Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung! *AN |3.1|3.2|*

a) $\int_a^a f(x)\,dx$ **b)** $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$ **c)** $\int_a^b c \cdot F'(x)\,dx = c \cdot (F(b) - F(a))$

2.136 Der erste Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung verlangt, dass die Funktion f im Intervall I stetig ist.
Die Funktion f mit $f(x)$ hat an der Stelle $x_0 = 2$ eine Sprungstelle.

a) Zeichne die Integralfunktion F_0!

b) Begründe, warum die Integralfunktion F_0 an der Stelle $x_0 = 2$ nicht differenzierbar ist! *AN |3.1|3.2|*



2.137 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

Für das bestimmte Integral gilt: $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{1} = -1 - (1) = -2$.

Kontrolliere das Ergebnis mit Technologieeinsatz und erkläre die unterschiedlichen Ergebnisse! *AN |3.1|3.2|*

2.2.2 Das unbestimmte Integral

Ist F eine beliebige Stammfunktion von f, so wird gesetzt: $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ mit C als reelle Konstante.
Da keine Grenzen angegeben sind, ist $\int f(x)\,dx$ das unbestimmte Integral von f.
Das Symbol für das unbestimmte Integral ist nicht eindeutig, weil die Konstante C eine beliebige reelle Zahl ist. Daher wird keine eindeutig bestimmte Funktion festgelegt, sondern eine Menge von Funktionen (Funktionenschar).

2.138 Berechne das unbestimmte Integral! *AN |3.1|*

a) $\int \sqrt{x}\,dx$ **b)** $\int \left(x^2 + \frac{1}{x^3}\right) dx$ **c)** $\int \sin(4 \cdot x)\,dx$

2.139 Berechne das unbestimmte Integral, wobei $a, b \in \mathbb{R}$! *AN |3.1|*

a) $\int (a \cdot x^2 + b)\,dx$ **b)** $\int a \cdot \sin(b \cdot x)\,dx$ **c)** $\int a \cdot e^{b \cdot x}\,dx$

2.2.3 Zusammenhang zwischen Differenzieren und Integrieren

Nach dem ersten Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung ist jede Integralfunktion einer stetigen Funktion eine Stammfunktion: $\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' = f(x)$

2.140 Können die auftretenden Ableitungen und Integrale gebildet werden, dann gilt: *AN |3.1|3.2|*

a) $(\int f(x)\,dx)' = (F(x) + C)' = F'(x) + 0 = f(x)$.

b) $\int f'(x)\,dx = f(x) + C$ (da f eine Stammfunktion von f' ist).

Interpretiere die Aussage **a)** und die Aussage **b)**!

a) Die ursprüngliche Funktion ergibt sich, wenn zuerst integriert und dann das Ergebnis differenziert wird. Das heißt: Differenzieren ist die Umkehrung des Integrierens.

b) Wenn zuerst differenziert und dann das Ergebnis integriert wird, ergibt sich die ursprüngliche Funktion (bis auf eine additive Konstante C). Das heißt: Integrieren ist die Umkehrung des Differenzierens (bis auf eine additive Konstante).

Differentiation und Integration sind entgegengesetzte Operatoren. Die Integration kann auch als Revision der Ableitung sinnvoll interpretiert werden.

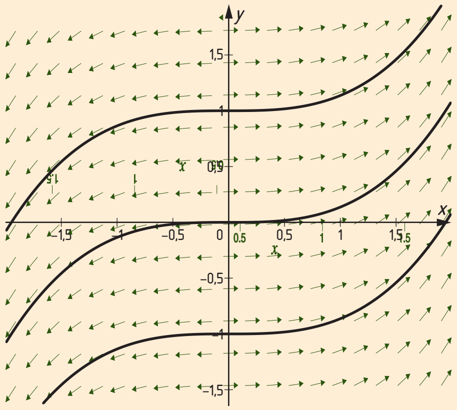
TE **2.141** Nutze das Richtungsfeld, um den Zusammenhang zwischen Integrieren und Differenzieren darzustellen.

a) Ermittle die Stammfunktion F der Funktion f mit $f(x) = \frac{2}{3} \cdot x^2$ anschaulich, indem ein Richtungsfeld gezeichnet wird, welches in bestimmten Abständen die Funktionswerte von f als Steigungen darstellt!

b) Erkläre, welcher Zusammenhang sich in Bezug auf das unbestimmte Integral ergibt! *AN |3.1|3.2|*

Lösung:

a)



Durch die einzelnen Steigungen kann der Graph einer gesuchten Stammfunktion näherungsweise ermittelt werden.

b) Die Stammfunktion F einer Funktion f ist nur bis auf eine additive Konstante festgelegt. Durch diese Sichtweise ergibt sich der Zugang zum unbestimmten Integral.

2.142 Bilde das unbestimmte Integral von f! Differenziere das Ergebnis und zeige, dass sich die ursprüngliche Funktion f ergibt! *AN |3.1|3.2|*

a) $f(x) = x^2 + 3 \cdot x$ **b)** $f(x) = \frac{5}{x}$ **c)** $f(x) = 3 \cdot x + 4^x$

d) $f(x) = 7$ **e)** $f(x) = -3 \cdot \sqrt[3]{x}$ **f)** $f(x) = e^x$

Zusammen*fassung*

Bei der Berechnung des Flächeninhalts A zwischen dem Graphen einer Funktion f und der x-Achse über dem Intervall $[a; b]$ ist wie folgt vorzugehen:

1. Bestimmung der Nullstellen $n_1, n_2, \ldots, n_k$ von f auf $[a; b]$.
2. Berechnung der Integrale über die Teilintervalle, also $A_1 = \int_a^{n_1} f(x)\,dx$, $A_2 = \int_{n_1}^{n_2} f(x)\,dx$, …, $A_k = \int_{n_k}^{b} f(x)\,dx$.
3. Addieren der Inhalte der Teilflächen, dies bedeutet die Beträge der einzelnen Integrale, also $A = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_k|$.

Wenn f im Intervall $[a; b]$ sowohl positive als auch negative Funktionswerte aufweist, dann ist das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ die Summe der positiv gezählten Flächeninhalte oberhalb der x-Achse und der negativen gezählten Flächeninhalte unterhalb der x-Achse.

Wenn f und g zwei Funktionen sind, die auf dem Intervall $[a; b]$ stetig sind und für alle $x \in [a; b]$ stets $f(x) \geqslant g(x)$ gilt, dann ist der Flächeninhalt A, den beide Funktionen einschließen, gegeben durch $A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$ (Integral von „oberer“ minus „unterer“ Funktion).

Bei der Berechnung des Flächeninhalts A zwischen den Funktionsgraphen von f und den Funktionsgraphen von g über dem Intervall $[a; b]$ ist wie folgt vorzugehen:

1. Schnittstellen $s_1, s_2, \ldots, s_k$ auf $[a; b]$ finden (dazu ist $f(x) = g(x)$ zu setzen).

2. Obere und untere Funktion bestimmen.
Dazu ist in den einzelnen Intervallen die obere und untere Funktion zu bestimmen (also f und g bei jeder Schnittstelle vertauschen) oder von den einzelnen Integralen die Beträge bestimmen.

3. Berechnung der Integrale über den Teilintervallen, also
$A_1 = \int_a^{s_1} [f(x) - g(x)]\, dx$, $A_2 = \int_{s_1}^{s_2} [f(x) - g(x)]\, dx$, …, $A_k = \int_{s_k}^{b} [f(x) - g(x)]\, dx$.

4. Addieren der Inhalte der Teilflächen, dies bedeutet, die Beträge der einzelnen Integrale, also
$A = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_k|$.

Sei $A(z)$ der Inhalt der Querschnittsfläche in der Höhe z mit $a \leqslant z \leqslant b$ eines Körpers. Falls die Querschnittsflächenfunktion A stetig ist, gilt für das Volumen des Körpers:
$V = \int_a^b A(z)\, dz$.

Gegeben ist eine Funktion f mit $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$ und $c \leqslant y \leqslant d$. Dreht sich der Graph der Funktion f um eine Koordinatenachse, dann gilt für das Volumen des entsprechenden Rotationskörpers

bei der Drehung um die x-Achse:
$$V = \pi \cdot \int_a^b y^2\, dx$$

bei der Drehung um die y-Achse:
$$V = \pi \cdot \int_c^d x^2\, dy$$

Bei der Bewegung eines Körpers auf einer geraden Linie mit der Geschwindigkeitsfunktion v im Zeitintervall $[t_1; t_2]$, kann die Entfernung zwischen dem Ort, an dem sich der Körper zum Zeitpunkt t_1 und dem Ort, an dem er sich zum Zeitpunkt t_2 befindet, mit dem bestimmten Integral $\left|\int_{t_1}^{t_2} v(t)\, dt\right| = |s(t_2) - s(t_1)|$ angegeben werden.

Die „Schrecksekunde“ ist die Zeit, wie lange es beim Autofahren vom Erkennen einer Gefahr bis zum Einleiten des Bremsvorgangs dauert (ca. 1 Sekunde). Der **Reaktionsweg** ist dabei der Weg, der in dieser Sekunde vom Fahrzeug zurückgelegt wurde. Der **Bremsweg** bezeichnet die Strecke, die das Auto während des gesamten Bremsvorgangs zurücklegt, bis es still steht. Die Gesamtstrecke aus Reaktions- und Bremsweg wird **Anhalteweg** genannt.

Durch eine Kraft in Newton (N) erfolgt die Bewegung eines Körpers von a nach b.
F ist der nicht-konstante Betrag der Kraft, wobei die Kraftrichtung mit der Wegrichtung übereinstimmt. Dann ist $F(s)$ die Kraft des zurückgelegten Wegs s in Meter (m) und die verrichtete Arbeit W in Joule (J; 1 J = 1 Nm) im abgeschlossenen Intervall $[a; b]$:
$W_{a,\,b} = \int_a^b F(s)\, ds$.

Wird eine zeitveränderliche Leistung P mit $P(t) > 0$ im Intervall $[t_1; t_2]$ verbracht, so ist die verrichtete Arbeit $W_{t_1,\,t_2}$: $W_{t_1,\,t_2} = \int_{t_1}^{t_2} P(t)\, dt$.

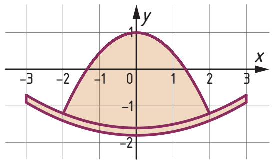
Die im Zeitverlauf von t_1 bis t_2 transportierte Ladungsmenge Q in Coulomb (C) bei einer zeitlich veränderlichen Stromstärke $I(t)$ ergibt sich zu: $Q_{t_1,\,t_2} = \int_{t_1}^{t_2} I(t)\, dt$.

Differentiation und Integration sind entgegengesetzte Operatoren. Die Integration kann auch als Revision der Ableitung sinnvoll interpretiert werden.

Vermischte *Aufgaben* zur Vorbereitung auf die Reifeprüfung

M TE 2.143 Typ 2

Es soll die Querschnittsfläche eines Huts (Krone mit Krempe) berechnet werden. Dazu modelliert Samoth die Krone mit der Funktion f mit $f(x) = -\frac{11}{20} \cdot x^2 + 1$ und die Krempe mit den beiden Funktionen g mit $g(x) = \frac{1}{10} \cdot x^2 - \frac{8}{5}$ und h mit $h(x) = \frac{1}{10} \cdot x^2 - \frac{9}{5}$ (x ist die horizontale Entfernung in LE und $f(x)$, $g(x)$ und $h(x)$ die vertikale Entfernung in LE nach x.



a) Berechne die Querschnittsfläche des Hutes (Krone mit Krempe)!

b) Die Krone ist in der Nähe der Krempe annähernd kreisförmig.
Berechne die minimale Länge des Bands, wenn ein Überschlag von 1 LE vorgesehen ist!

AN |4.3|

TE 2.144 Typ 2

Ein Transportauto ist auf einer Landstraße mit 108 km/h unterwegs, als ein Reh 100 m vor dem Fahrzeug die Straße quert. Nach 1 Sekunde Reaktionszeit bremst der Fahrer das Auto voll ab und verringert ab diesem Moment die Geschwindigkeit v in m/s mit $v(t) = 30 - 10 \cdot t$ mit t in Sekunden.

a) Berechne den Anhalteweg (Reaktions- und Bremsweg)!

b) Argumentiere, ob es zu einem Unfall kommen kann!

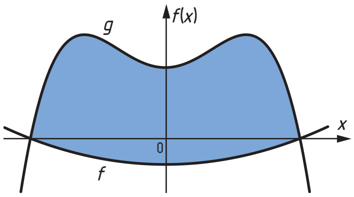
c) Berechne jene Geschwindigkeit, die das Transportauto vor der Vollbremsung fahren müsste, damit es zu einem Unfall kommen kann.

d) *„Wenn das Transportauto mit 54 km/h unterwegs gewesen wäre, liefert dies eine Halbierung des Anhaltewegs im Vergleich zu 108 km/h."*
Begründe oder widerlege diese Aussage!

AN |4.3|

TE 2.145 Typ 2

Nirak plant die Konstruktion eines Pools, der ähnlich wie jener im Bild rechts sein sollte. Dazu fertigt sie eine Skizze an und modelliert die untere Randkurve des Pools mit der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{25} \cdot x^2 - 1$, wobei x die horizontale Entfernung in m und $f(x)$ die vertikale Entfernung in m darstellt.
Für die obere Randkurve überlegt Nirak eine Modellierung mithilfe der Funktion g mit $g(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^2 + c$, wobei x die horizontale Entfernung in m und $g(x)$ die vertikale Entfernung in m darstellt.
An der Stelle 3 m soll das Maximum von 4 m vorliegen und an der Stelle 5 m sollen die Funktionen f und g einander schneiden.



a) Stelle die Funktionsgleichung von g auf!

b) Der Pool hat gerade Wände und soll im gesamten Bereich eine Tiefe von 1,50 m aufweisen. Berechne das maximale Füllungsvolumen des Pools in Liter!

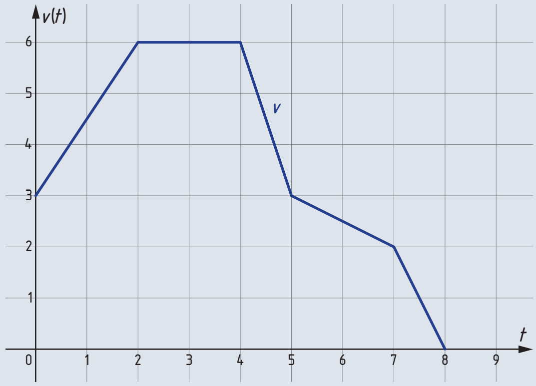
c) Der Pool soll eine Abdeckplane aus Folie bekommen.
Begründe, ob eine Folie mit der Länge 10,65 m und der Breite 4,65 m ausreicht, um aus ihr die Abdeckplane herauszuschneiden!

AN |4.3|

Wissens-*Check*

Bearbeite die Aufgaben! **Begründe** jeweils deine Auswahl!

1 Gegeben ist die Geschwindigkeitsfunktion v mit $v(t)$.



Ordne den Wegstrecken jeweils den entsprechenden Term aus A bis F zu! *AN |4.3|*

$s_{0,3}$	
$s_{3,6}$	
$s_{1,7}$	
$s_{5,8}$	

A	6
B	8
C	15
D	$\int_3^6 v(t)\,dt$
E	$-\int_1^7 v(t)\,dt$
F	$-\int_7^1 v(t)\,dt$

2 Unter welcher Bedingung gilt für die Parameter a und b mit $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\int_a^b 4 \cdot dx = 1$$

Kreuze die zutreffende Aussage an! *AN |4.3|*

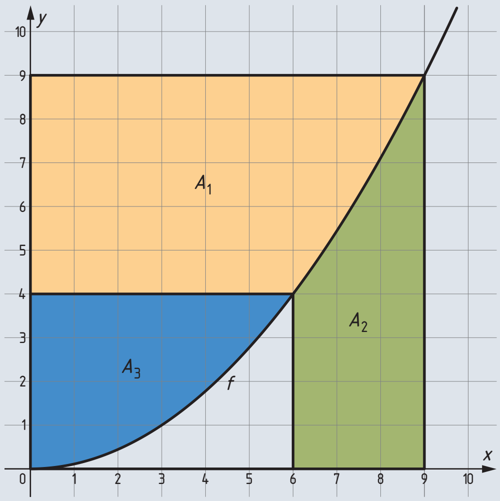
$a + b = 1$	☐
$4 \cdot a + 4 \cdot b = 1$	☐
$b - a = 1$	☐
$b = a + \frac{1}{4}$	☐
$a = b + \frac{1}{4}$	☐
$4 \cdot b - 4 \cdot a = 4$	☐

3 Gegeben ist die Gewinnfunktion G und die dazugehörige Grenzgewinnfunktion G'. Kreuze die beiden Terme an, die die absolute Gewinnänderung beschreiben, wenn die Produktion von 2 auf 3 ME erhöht wird! *AN |4.3|*

$G(3) - G(2)$	☐	$G'(3)$	☐	$G(3)$	☐
$\int_0^3 G'(x)\,dx$	☐	$\int_2^3 G'(x)\,dx$	☐		

Wissens-*Check*

4 Gegeben ist der Graph der Funktion *f*.



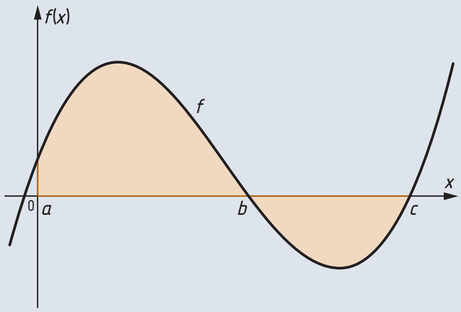
Ergänze die Textlücken durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine korrekte Aussage entsteht! *AN |4.3|*

Der Flächeninhalt von ___ ❶ ___ ergibt sich in Integraldarstellung zu ___ ❷ ___.

❶	
A_1	☐
A_2	☐
A_3	☐

❷	
$\int_0^6 f(x)\,dx$	☐
$\int_0^6 9\,dx + \int_6^9 f(x)\,dx$	☐
$\int_0^6 5\,dx + \int_6^9 [9 - f(x)]\,dx$	☐

5 Kreuze die beiden Terme an, die den markierten Flächeninhalt der Funktion *f* mit *f*(*x*) darstellen! *AN |4.3|*



$\int_a^c f(x)\,dx$	☐
$\left\lvert\int_a^b f(x)\,dx\right\rvert + \left\lvert\int_b^c f(x)\,dx\right\rvert$	☐
$\left\lvert\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx\right\rvert$	☐
$\int_a^b f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$	☐
$\int_a^c f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$	☐

Lösung:
1) C, D, F, A 2) 4. Zeile 3) 1. Zeile/1. Spalte; 2. Zeile/2. Spalte
4) ❶ → 1. Zeile; ❷ → 3. Zeile 5) 2. und 4. Zeile