

Hermann Weyl (1885 – 1955) war ein deutscher Mathematiker, Physiker und Philosoph und gilt aufgrund seines breiten Interessensgebiets als einer der letzten mathematischen Universalisten.

Hermann Weyl schreibt in seinem Buch „Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaften“ aus dem Jahr 1928 „Niemand kann erklären, was eine Funktion ist. Aber eine Funktion f ist gegeben, wenn auf irgendeine bestimmte gesetzmäßige Weise jeder reellen Zahl a eine Zahl b zugeordnet ist (...).“

In der amerikanischen Ausgabe aus dem Jahr 1948 ergänzt er dazu: „(...) but this is what really matters in mathematics.“



Hermann Weyl

7.1 Der allgemeine Funktionsbegriff

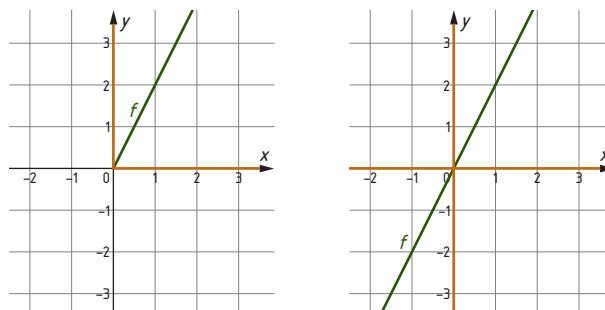
Wir haben bisher eine Funktion f so definiert, dass sie jedem Element x einer Definitionsmenge D genau ein Element y einer Menge zuordnet, die man als Wertemenge W bezeichnet. Im Folgenden erweitern wir diese Definition.

7.1.1 Verallgemeinerung des Funktionsbegriffs

Zum Funktionsbegriff wurden bereits einige Begrifflichkeiten eingeführt, die nun durch neue Begriffe verallgemeinert werden.

- Das Element x ist das Argument oder die Stelle oder das **Urelement** der Funktion f .
- Das Element $f(x)$ ist der Funktionswert (Wert) von f an der Stelle x oder das **Bildelement** von x .
- Die Menge A ist die **Definitionsmenge** der Funktion f , die Menge **aller Urelemente**.
- Die Menge B ist die **Zielfmenge** der Funktion f .
- Die Menge $W = f(D) = \{f(x) \in B \mid x \in A\}$ ist die Wertemenge der Funktion f , die Menge **aller Bildelemente**.

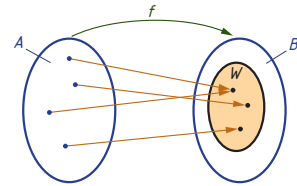
Gegeben sind die Funktionen $f: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ (linke Grafik) und die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (rechte Grafik) mit jeweils $f(x) = 2 \cdot x$



Der **Definitionsbereich** $A = \mathbb{R}_0^+$ des linken Graphen ist die positive x -Achse und beim rechten Graphen ist $A = \mathbb{R}$ die gesamte x -Achse.

Die **Zielfmenge** $B = \mathbb{R}$ bei beiden Funktionen, jedoch die **Wertemenge** W ist beim linken Graphen nur die positive y -Achse und beim rechten Graphen die gesamte y -Achse.

Mit Hilfe der Begriffe und der Definition der Funktion ergibt sich daher, dass jedem Element von $x \in A$ genau ein Bildelement $f(x) \in B$ zugeordnet wird, aber es kann sein, dass ein Element von B kein oder mehrere Urelemente in A besitzt. **Die Wertemenge von f ist immer eine Teilmenge der Zielmenge B .**



- 7.1** Bestimme bei den folgenden Funktionen die Wertemenge und eine mögliche Zielmenge! FA | 1.5 |
- a) $f: x \mapsto x + 1$ mit $x \in \mathbb{N}$ b) $f: x \mapsto |x|$ mit $x \in \mathbb{R}$ c) $f: x \mapsto \frac{x+1}{2}$ mit $x \in \mathbb{Z}$
- d) $f: x \mapsto p(x)$ mit $x \in \mathbb{N}$, wobei p jeder natürlichen Zahl x die nächstgrößere Primzahl $p(x)$ zuordnet wird.

	Wertemenge W der Funktion f	Mögliche Zielmenge B der Funktion f
a)	$W = \mathbb{N} \setminus \{0\}$	$B = \mathbb{N}$
b)	$W = \mathbb{R}_0^+$	$B = \mathbb{R}_0^+$
c)	$W = \{0; \pm \frac{1}{2}; \pm 1; \pm \frac{3}{2}, \dots\}$	$B = \mathbb{Q}$
d)	$W = \{y y \text{ ist Primzahl}\}$	$B = \mathbb{N}$

Als Zielfunktion ist in allen Fällen auch $B = \mathbb{R}$ möglich.

Die Zielmenge einer Funktion lässt sich immer auf die Wertemenge einschränken, wodurch erreichbar ist, dass jedes Element der Zielmenge **mindestens ein Urelement** besitzt.

Eine Einschränkung derart, dass jedes Element der Zielmenge **genau ein Urelement** besitzt, ist nicht immer möglich.

Der Funktionsbegriff für reelle Funktionen lässt sich daher wie folgt verallgemeinern:
Eine Funktion $f: A \rightarrow B$ mit $A \subseteq \mathbb{R}$ und $B \subseteq \mathbb{R}$ ist eine reelle Funktion.

- 7.2** Gegeben ist die Funktion $f: A \rightarrow W$ mit $f(x) = x^2$.
Die Definitionsmenge ist $A = \mathbb{R}$, die Wertemenge ist $W = \mathbb{R}_0^+$ und die Zielmenge ist:

- a) $B = \mathbb{R}$ b) $B = \mathbb{R}_0^+$

Erkläre die Unterschiede zwischen a) und b) in Bezug auf die Urelemente! FA | 1.5 |

Lösung:

- a) Für die Zielmenge $B = \mathbb{R}$ gilt:

Das Element 0 besitzt genau ein Urelement, nämlich 0.

Alle Elemente aus $\mathbb{R}_0^+$ haben je genau zwei Urelemente, nämlich $\pm |x|$.

Kein Element aus $\mathbb{R}^-$ hat ein Urelement, denn das Quadrat einer negativen Zahl ist stets positiv.

- b) Durch die Einschränkung auf die Zielmenge $\mathbb{R}_0^+$ besitzt nun jedes Element aus der Zielmenge mindestens ein Urelement.

TE 7.3

Gegeben ist die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $y = f(x)$.

Schränke die Definitionsmenge A und die Zielmenge B von f derart ein, dass jedes Bildelement genau ein Urelement hat! FA | 1.5 |

a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = |x|$

c) $f(x) = x^3$

TE 7.4

Gegeben ist die Funktion f mit $y = f(x)$.

Beurteile, ob die Wertemenge eine echte Teilmenge von der Zielmenge ist!

Schränke die Zielmenge von f auf ihre Wertemenge ein, so dass jedes Element der eingeschränkten Zielmenge mindestens ein Urbild hat!

Argumentiere, ob dadurch auch erreicht wird, dass jedes Element der eingeschränkten Zielmenge genau ein Urbild hat!

FA | 1.5 |

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = 3 \cdot x + 2$

b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = 2 \cdot e^{3x}$

c) $f: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sqrt[3]{x}$

d) $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{x^2}$

TE 7.5

Gegeben ist die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $y = f(x)$.

Schränke die Definitionsmenge und die Zielmenge von f derart ein, dass jedes Bildelement genau ein Urelement hat!

FA | 1.5 |

a) $f(x) = 2 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 2$

b) $f(x) = \sin(x)$

TE 7.6

Gegeben ist $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $f = \text{sgn}(x)$.

a) Beurteile, ob die Wertemenge eine echte Teilmenge von der Zielmenge ist!

b) Schränke die Zielmenge von f auf die Wertemenge ein!

c) Bestimme, wie viele Urelemente es von 1 beziehungsweise -1 gibt!

FA | 1.5 |

1.1.2 Injektive, surjektive und bijektive Funktionen

Bei einer gegebenen reellen Funktion $f: A \rightarrow B$ hat die Gleichung $f(x) = y$ für ein gegebenes $y \in B$ eine (mehrere) Lösungen $x \in A$, wenn die Horizontale in Höhe y einen (mehrere) Schnittpunkt(e) mit dem Graphen von f hat.

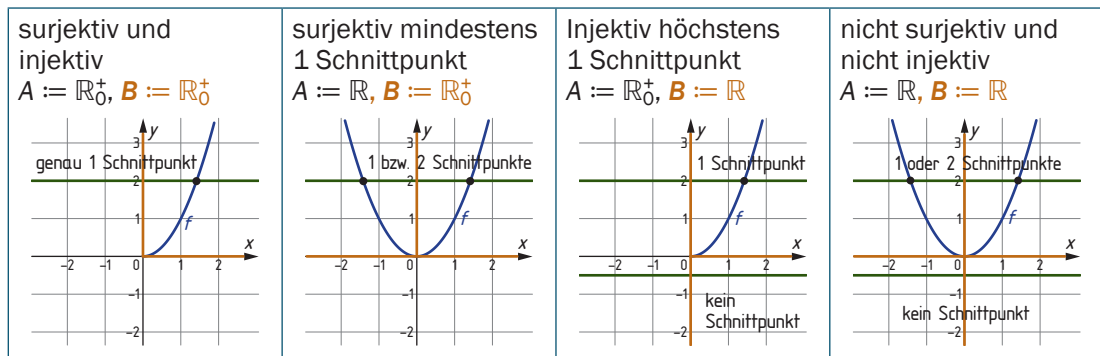
Hat bei einer Funktion jede waagrechte Gerade **mindestens einen Schnittpunkt**, dann ist die Funktion **f surjektiv**. Hat die waagrechte Gerade **höchstens einen Schnittpunkt**, dann ist die Funktion **f injektiv**.

Falls zumindest eine waagrechte Gerade **mehr als einen Schnittpunkt** hat, ist sie nicht mehr injektiv, gibt es aber zumindest eine waagrechte Gerade die **keinen Schnittpunkt** hat, ist die Funktion nicht surjektiv.

7.7 Gegeben ist die Funktion $f: A \rightarrow B$ mit $f(x) = x^2$.

Ordne in Abhängigkeit von der Definition von A und B die Funktion in injektiv und surjektiv ein! Veranschauliche grafisch!

FA | 1.5 |



Die Funktion f ist bijektiv, wenn sie injektiv und surjektiv ist.

Eine Funktion $f: A \rightarrow B$ mit $y = f(x)$ heißt

- **injektiv** genau dann, wenn zu jedem $y \in B$ **höchstens** ein $x \in A$ existiert mit $y = f(x)$.
- **surjektiv**, genau dann, wenn zu jedem $y \in B$ **mindestens** ein $x \in A$ existiert mit $y = f(x)$.
- **bijektiv**, genau dann, wenn zu jedem $y \in B$ **eindeutig** ein $x \in A$ existiert mit $y = f(x)$.

Eine alternative Definition von einer injektiven Funktion $f: A \rightarrow B$ ist, dass verschiedene Elemente in A unterschiedliche Bildelemente in B besitzen.

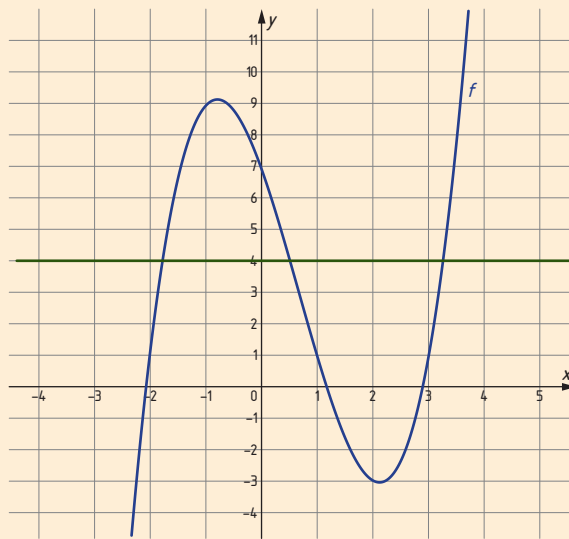
Eine Funktion $f: A \rightarrow B$ ist daher genau dann bijektiv ist, wenn sie injektiv und surjektiv ist.

7.8 Zeige grafisch, ob die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3 - 2 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 7$ injektiv oder surjektiv ist!

FA | 1.5 |

Lösung:

Der Graph der Funktion f hat die folgende Form:



Die Funktion ist **nicht injektiv**, da bei der eingezeichneten waagrechten Geraden drei Schnittpunkte sind, d.h. der gleiche y -Wert ist 3 unterschiedlichen x -Werten zugeordnet. Die Funktion ist jedoch surjektiv, weil jeder y -Wert mindestens einem x -Wert zugeordnet ist.

7.9

Zeige, ob die Funktion f injektiv oder surjektiv ist!

FA | 1.5 |

a) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit $f(n) = n + 3$

b) $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ mit $f(n) = n - 5$

TE 7.10

Zeige, ob die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $y = f(x)$ injektiv, surjektiv oder bijektiv ist!

FA | 1.5 |

a) $f(x) = x^3$

b) $f(x) = 2^x$

c) $f(x) = |x|$

TE 7.11

Schränke die Definitionsmenge und die Zielmenge der Funktion $f: A \rightarrow B$ derart ein, dass die Funktion bijektiv ist!

FA | 1.5 |

a) $f(x) = \ln(x)$

b) $f(x) = \sqrt{x}$

c) $f(x) = x^2 - 4 \cdot x + 5$

7.2 Verkettung von Funktionen

Um den Wert der Funktion h mit $h(x) = \ln(x^2 + 1)$ an der Stelle x zu bestimmen, wird zuerst die Zahl $y = x^2 + 1$ ermittelt und dann $\ln(y)$. Dies kann auch folgendermaßen gedeutet werden: $h(x) = \ln(x^2 + 1) = \ln(f(x)) = g(f(x))$.

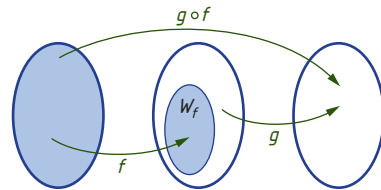
Dabei wird g von f von x $g(f(x))$ dadurch ermittelt, dass zuerst an der inneren Funktion f mit $f(x) = x^2 + 1$ der Funktionswert bestimmt wird; anschließend wird die äußere Funktion g mit $g(y) = \ln(y)$ auf den Funktionswert von f angewendet, um die Zahl $g(f(x))$ zu erhalten.

Statt die Funktionen f und g hintereinander anzuwenden, ist es möglich, die

die Verkettung von g mit f ($g \circ f$) –

spricht: „ g Ring f “ – gleich anzuwenden.

$g \circ f: D_{g \circ f} \rightarrow B_{g \circ f}$ und $(g \circ f)(x) = g(f(x))$



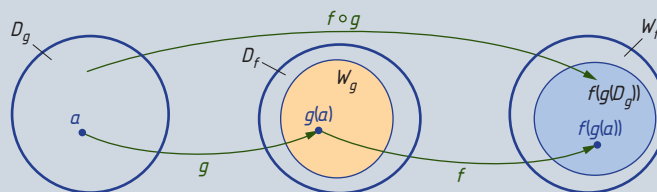
7.12 Gegeben sind die Funktionen $f: D_f \rightarrow W_f$ mit $f(x) = \sqrt{1-x}$ und $g: D_g \rightarrow W_g$ mit $g(x) = x^2 - 3$.

- Bestimme die Definitionsmenge D_f und D_g !
- Bestimme die Wertemenge W_f von f und W_g von g !
- Ermittle $g \circ f$ und $f \circ g$ und die entsprechende Definitions- und Wertemenge!

- Der Radikant darf nicht negativ sein, daher ist $D_f =]-\infty; 1]$; $D_g = \mathbb{R}$.
- Die Wertemenge einer Wurfelfunktion ist $W_f = [0; \infty[$ und da die Normparabel um drei Einheiten nach unten verschoben ist, ergibt sich $W_g = [-3; \infty[$.
- $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{1-x}) = (\sqrt{1-x})^2 - 3 = 1 - x - 3 = -x - 2$.
Es gilt $f(D_f) = W_f = [0; \infty[\subseteq \mathbb{R} = D_g$, daher kann man die Verkettung durchführen.
Die Definitionsmenge ist daher $D_{g \circ f} = D_f =]-\infty; 1]$.
Da $(g \circ f)(x) = -x - 2$ ergibt sich die Wertemenge zu $W_{g \circ f} = [-3; \infty[$.
- $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 - 3) = \sqrt{1 - x^2 + 3} = \sqrt{4 - x^2}$.
 $g(D_g) = W_g = [-3; \infty[$ und $D_f =]-\infty; 1]$, daher muss der Definitionsbereich D_g **eingeschränkt** werden.
Der Definitionsbereich von $D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3 \in]-\infty; 1]\} = [-2; 2]$ und der Wertebereich ist $W_{f \circ g} = [0; 2]$.

Gegeben sind die Funktion $f: D_f \rightarrow W_f$ und $g: D_g \rightarrow W_g$.

- Die Funktion $g \circ f$ mit $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ heißt die Verkettung der Funktion g mit f , falls $f(D_f) = W_f \subseteq D_g$.
- Die Funktion $f \circ g$ mit $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ heißt die Verkettung der Funktion f mit g , falls $g(D_g) = W_g \subseteq D_f$.



Um $g \circ f$ zu berechnen, wird zuerst f auf x und dann g auf das Resultat von f angewendet. Dies bedeutet, dass g nach f ausgeführt wird; bei $f \circ g$ wird f nach g ausgeführt.

Sonderfall: Für die **Verkettung einer Funktion mit ihrer Umkehrfunktion** gilt:

Die reelle Funktion $f: A \rightarrow B$ ordnet jedem $x \in A$ eindeutig ein $y \in B$ zu. Kann umgekehrt jedem $y \in B$ eindeutig ein $x \in A$ zugeordnet werden, so entsteht die Umkehrfunktion (inverse Funktion) $f^{-1}: B \rightarrow A$.

$(f \circ f^{-1})(x) = x$ für alle $x \in B$ und $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ für alle $x \in A$.

7.13 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 1 + x^2$ (die Quadratfunktion, zu der 1 addiert wird) und die Funktion g mit $g(x) = x^3$ (die Kubusfunktion).

Ermittle $f \circ g$ und $g \circ f$!

Erkläre, was zu erkennen ist!

Lösung:

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^3) = 1 + (x^3)^2 = 1 + x^6$ und andererseits

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(1 + x^2) = (1 + x^2)^3$.

Es gilt: $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$, daher ist die Verkettung von Funktionen nicht kommutativ.

7.14 Für die Funktionen f und g sind die folgenden Zuordnungen gegeben:
Zuordnung für f : Quadriere die Zahl; Zuordnung für g : Subtrahiere 2 von der Zahl

- Ermittle die Zuordnung für $f \circ g$!
- Ermittle die Zuordnung für $g \circ f$!
- Bestimme die algebraische Formel für $f \circ g$!
- Bestimme die algebraische Formel für $g \circ f$!

7.15 Gegeben sind die Funktionen $f: \{1,2,3,4\} \rightarrow \{1,2,3,4\}$ und $g: \{1,2,3,4\} \rightarrow \{1,2,3,4\}$ mit den folgenden Wertetabellen:

x	1	2	3	4
$f(x)$	4	2	1	3

x	1	2	3	4
$g(x)$	3	1	2	4

Bestimme:

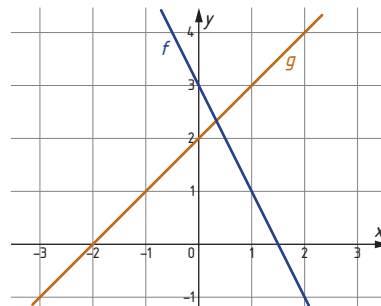
- $(f \circ g)(2)$
- $(f \circ g)(3)$
- $(g \circ f)(1)$
- $(g \circ f)(4)$

7.16 Gegeben sind die Funktionen f mit $f(x) = x^2 - 3$ und g mit $g(x) = 4 \cdot x + 5$.
Bilde die angegebenen Verkettungen.

- $(g \circ f)(x)$
- $(f \circ g)(x)$
- $(f \circ f)(x)$
- $(g \circ g)(x)$

7.17 Gegeben sind die Funktionen f und g .
Ermittle anhand der Graphen $(g \circ f)(2)$!
Kreuze das richtige Ergebnis an!

-2	☐	1	☐
-1	☐	2	☐
0	☐	4	☐



7.18

Thomas hat eine Bäckerei und er erwartet heute eine neue Lieferung von Mehl. Die Anzahl der Brotlaibe N , die Thomas heute backen wird, ist gegeben durch $N(k) = 10 + 3 \cdot k$, wobei k für die Zahl der Kilogramm Mehl steht.

Der Erlös E in Euro, den Thomas durch den Verkauf von x Brotlaiben erhält, ist gegeben durch $E(x) = 4 \cdot x$.

Gib eine Funktionsgleichung an, die den Tageserlös von Thomas widerspiegelt, wenn er k Kilogramm Mehl erhält!

7.19

Ein Kieselstein wird in einen ruhigen Teich fallen gelassen und verursacht dadurch Wellen in konzentrischen Kreisen.

Der Radius r des äußeren Kreises in Metern ist gegeben durch

$r(t) = 0,6 \cdot t$, wobei t die Zeit in Sekunden nach dem Auftreffen des Kieselsteins auf der Wasseroberfläche darstellt.

Die Fläche A des äußeren Kreises ist gegeben durch $A = r^2 \cdot \pi$.

Bestimme die Fläche des äußeren Kreises nach 2 Sekunden!

7.20

Bestimme die Funktionen f und g derart, dass $h = f \circ g$ ist!

a) $h(x) = \frac{1}{x^2} - 1$

b) $h(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$

c) $h(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$

7.21

Die Formel zur Umrechnung der Temperaturen von Grad Fahrenheit in Grad Celsius lautet $f(x) = \frac{5}{9} \cdot (x - 32)$; x ... Grad in Fahrenheit; $f(x)$... Grad in Celsius

a) Bestimme die Umkehrfunktion f^{-1} !

b) Zeige, dass $(f \circ f^{-1})(x) = x$ und $(f^{-1} \circ f)(x) = x$!

7.22

Gegeben sind die beiden Funktionen f mit $f(x) = 4 \cdot x - 3$

und g mit $g(x) = 2 \cdot x - 1$.

a) Bestimme $g \circ f$ und $f \circ g$!

b) Ermittle die Funktionswerte $(f \circ g)(0)$ und $(g \circ f)(0)$!

c) Gibt es eine Lösung für $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$?

7.23

Füge zwischen den beiden Funktionswerten jeweils ein Gleichheits-, ein Kleiner- oder ein Größerzeichen ein!

Gegeben sind die beiden Funktionen $f(x) = x^3 + 5$ und $g(x) = 3 \cdot x + 5$.

$(f \circ g)(3)$		$(f \circ f)(4)$	$(g \circ f)(0)$		$(f \circ g)(0)$
$(f \circ f^{-1})(4)$		$(f^{-1} \circ f)(5)$	$(g \circ g)(-2)$		$(g \circ g)(3)$
$(g \circ g^{-1})(5)$		$(g^{-1} \circ g)(6)$	$(f \circ f)(4)$		$(f \circ f)(6)$

7.24

Ermittle aus den Funktionen f und g die Verkettung $g \circ f$!

Bestimme die Definitions- und Wertemenge der Funktionen f , g und $g \circ f$!

Zeichne $g \circ f$!

a) $f(x) = x^2 - 1$ $g(x) = \sqrt{x - 2}$

b) $f(x) = x - 4$ $g(x) = \frac{1}{x}$

7.25

Gegeben sind die linearen Funktionen f mit $f(x) = a \cdot x + b$, $a \neq 0$

und g mit $g(x) = c \cdot x + d$, $c \neq 0$.

Zeige, dass die Verkettung $g \circ f$ und $f \circ g$ erneut lineare Funktionen sind!

7.26

Die Anzahl N von Bakterien in einem gekühlten Nahrungsmittel ist gegeben durch $N(T) = 20 \cdot T^2 - 80 \cdot T + 500$, $2 \leq T \leq 14$, wenn T die Temperatur des Nahrungsmittels in Grad Celsius ist.

Wenn das Nahrungsmittel aus der Kühlung entfernt wird, ist die Temperatur T des Nahrungsmittels gegeben durch: $T(t) = 4 \cdot t + 2$, $0 \leq t \leq 3$ in Stunden.

- Bestimme die Verkettung $N \circ T$ und interpretiere die Bedeutung im Sachzusammenhang!
- Bestimme den Zeitpunkt, zu dem die Bakterienanzahl 2 000 erreicht wird!

7.27

Gegeben ist f mit $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

- Bestimme die Definitionsmenge von f !
- Zeige, dass für alle x im Definitionsbereich gilt: $(f \circ f \circ f)(x) = x$!

7.28

Sind $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$, $h: C \rightarrow D$ Funktionen, dann sind $(h \circ g) \circ f$ und $h \circ (g \circ f)$ Funktionen von A nach D .

Zeige anhand eines selbstgewählten Beispiels, dass die Verkettung assoziativ ist, also dass gilt: $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$!

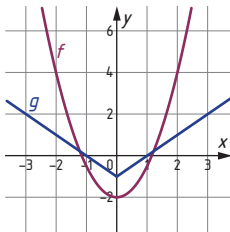
7.29

Gegen Ende seines Lebens stößt ein Stern Gas aus und bildet einen planetarischen Nebel. Das Volumen V in km^3 dieses Nebels kann mit $V(t) = 9,01 \cdot 10^{26} \cdot t^3$ modelliert werden, wobei t das Alter in Jahren des Nebels ist.

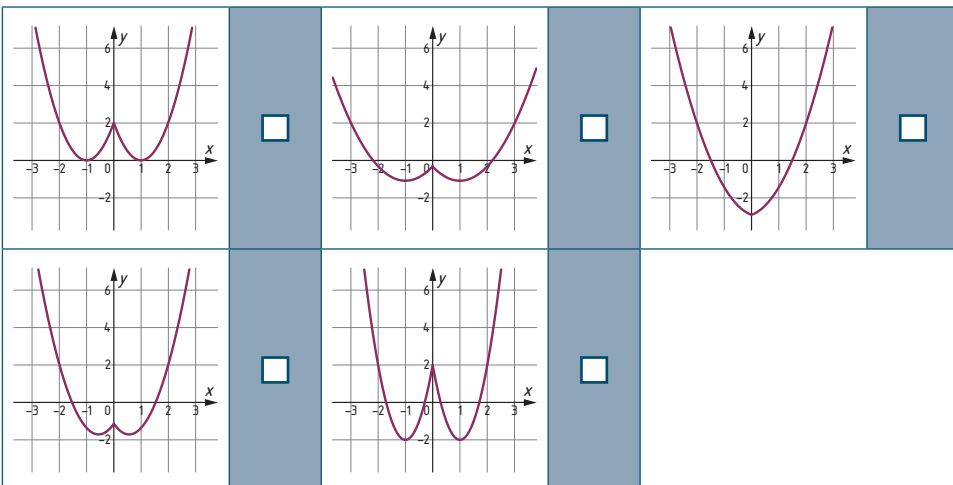
- Bestimme V^{-1} und interpretiere das Ergebnis im Sachzusammenhang!
- Berechne das ungefähre Alter des Nebels, wenn das Volumen etwa $1,5 \cdot 10^{28} \text{ km}^3$ beträgt!
- Zeige, dass $(V \circ V^{-1})(x) = x$ und $(V^{-1} \circ V)(x) = x$ ist!

7.30

Die Graphen der Funktionen f und g sind gegeben.



Bestimme mithilfe eines grafischen Verfahrens jenen Graphen, der $f \circ g$ mit additiver Verknüpfung darstellt! Kreuze die zutreffende Grafik an!



7.3 Funktionen in mehreren Variablen

Die einfachste Verallgemeinerung des Funktionsbegriffs mit mehreren Variablen erhalten wir für Funktionen von zwei (unabhängigen) Variablen. Ist A beispielsweise eine Menge von **reellen Zahlenpaaren** (a_1, a_2) , so kann jedem Zahlenpaar genau eine reelle Zahl y mit

$$f: (a_1, a_2) \rightarrow y = f(a_1, a_2) \text{ zugeordnet werden.}$$

Wir könnten auch Zahlentripel $(a_1 | a_2 | a_3)$ oder n -Tupel $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ verwenden.

Eine Verallgemeinerung sieht als Definitionsmengen Teilmengen von folgenden Mengen vor:

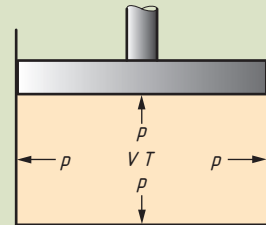
$\mathbb{R}^2 = \{(a_1, a_2) a_1 \in \mathbb{R} \text{ und } a_2 \in \mathbb{R}\}$	Menge der (geordneten) Paare reeller Zahlen
$\mathbb{R}^3 = \{(a_1, a_2, a_3) a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$	Menge aller Tripel reeller Zahlen
$\mathbb{R}^n = \{(a_1, \dots, a_n) a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}$	Menge aller n -Tupel reeller Zahlen
$(\mathbb{R}^+)^2 = \{(a_1, a_2) a_1, a_2 \in \mathbb{R}^+\}$	Menge aller Paare positiver reeller Zahlen
$(\mathbb{R}^+)^3 = \{(a_1, a_2, a_3) a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^+\}$	Menge aller Tripel positiver reeller Zahlen
$(\mathbb{R}^+)^n = \{(a_1, \dots, a_n) a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+\}$	Menge aller n -Tupel positiver reeller Zahlen

Gerade in den Naturwissenschaften, aber auch bei geometrischen Problemen, treffen wir häufig auf Funktionen mit mehreren Variablen: Flächeninhalte von Länge und Breite abhängig, Volumen von Länge, Breite und Höhe abhängig, Gasvolumen als Funktion von Temperatur und Druck usw.

TE

7.31 Ein Gas ist in einem Zylinder mit dem Volumen V (in m^3) eingeschlossen. Der Gasdruck auf die Zylinderwände und den Kolben ist p (in Pascal). Das Gas hat die Temperatur T (in Kelvin). Dann gilt für eine Stoffmenge von einem Mol des Gases die thermische Zustandsgleichung:

$$p \cdot V = R \cdot T \text{ mit der Gaskonstante } R = 8,31 \frac{\text{J}}{(\text{mol} \cdot \text{K})}$$



Stelle den Druck p als Funktion in Abhängigkeit von V und seiner Temperatur T dar!

FA | 1.8 |

Die thermische Zustandsgleichung kann nach p umgeformt werden: $p = R \cdot \frac{T}{V}$.

Diese Formel kann als Funktion aufgefasst werden, die jedem (geordneten) Zahlenpaar $(V_i, T_i) \in (\mathbb{R}^+)^2$ die reelle Zahl $p(V_i, T_i)$ zuordnet.

In der Funktionsschreibweise ergibt sich daher:

$$V: (\mathbb{R}^+)^2 \rightarrow \mathbb{R} : (V | T) \rightarrow p(V, T) \text{ mit } p(V, T) = R \cdot \frac{T}{V}.$$

Es handelt sich daher um eine Funktion in zwei Variablen.

Eine Funktion $f: A \rightarrow B$ mit $A \subseteq \mathbb{R}^n$ und $B \subseteq \mathbb{R}$ ist eine reelle Funktion in n Variablen.

7.32 Der Flächeninhalt eines Kreissektors ist gegeben durch

$$A = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot \alpha}{360} \text{ mit } \alpha \text{ in Grad und } r \text{ in cm}$$

Erkläre, auf welche unterschiedliche Weise die Formel als Funktion beschrieben werden kann!

FA | 1.5 | 1.8 |

Lösung:

Die Formel beschreibt eine Funktion $A: (\mathbb{R}^+)^2 \rightarrow \mathbb{R}: (r, \alpha) \rightarrow A(r, \alpha)$, also eine Funktion mit zwei Variablen. Zusätzlich beschreibt es auch eine Funktion in einer Variablen, wenn jeweils entweder r oder α konstant gehalten wird.

Wird α konstant gehalten, dann ist $A: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ mit $A(r) = \frac{\pi \cdot \alpha}{360} \cdot r^2$ eine quadratische Funktion bzw. eine direkt proportionale Funktion zum Quadrat von r ; bei Konstanthaltung von r ergibt sich eine Proportionalitätsfunktion $A(\alpha)$ mit dem Proportionalitätsfaktor $\frac{\pi}{360} \cdot r^2$.

M 7.33

Kreuze die beiden Zuordnungen an, die als Funktionen in 2 Variablen darstellbar sind!

FA | 1.1 |

Dem Volumen eines Würfels ist die Länge der Höhe zugeordnet.	☐
Dem Umfang eines Parallelogramms sind die Seitenlängen zugeordnet.	☐
Der Fläche eines gleichseitigen Dreiecks ist die Seitenlänge zugeordnet.	☐
Der Fläche eines Quadrats ist die Seitenlänge zugeordnet.	☐
Dem Umfang eines Deltoids sind die Seitenlängen zugeordnet.	☐

7.34

Der Flächeninhalt eines Trapezes ist $A(m, h) = m \cdot h$, wobei m die Mittelparallele darstellt.

a) Welche Funktion von $(\mathbb{R}^+)^2$ nach $\mathbb{R}$ kann in der Formel gesehen werden?

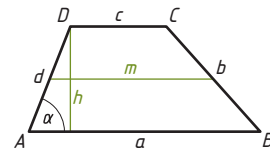
Die Mittelparallele ist das arithmetische Mittel der beiden parallelen Seiten. $m = \frac{a+c}{2}$, daher ist der Flächeninhalt

$$A(a, c, h) = \frac{a+c}{2} \cdot h.$$

b) Welche Funktion von $(\mathbb{R}^+)^3$ nach $\mathbb{R}$ kann in der Formel gesehen werden?

c) Erkläre, welche Funktion von $\mathbb{R}^+$ nach $\mathbb{R}$ vorhanden ist, wenn a , b oder h konstant gehalten wird!

FA | 1.1 | 1.5 | 1.8 |



7.35

Bei schrägem Lichteinfall unter Winkel α wird die Beleuchtungsstärke E in Lux mit der folgenden Formel beschreiben:

$$E(I, h, \alpha) = \frac{I}{h^2} \cdot \cos \alpha,$$

I ... Lichtstärke in Candela; α ... Winkel zwischen der Flächennormale und der Richtung des einfallenden Lichts; h ... Höhe der Lichtquelle über der beleuchteten Fläche in Meter.

a) Erkläre, welche Funktionen von $\mathbb{R}^+$ nach $\mathbb{R}$ gesehen werden können, wenn jeweils zwei Variablen als konstant angenommen werden!

b) Erkläre, ob α jeden beliebigen Wert annehmen kann!

FA | 1.1 | 1.5 | 1.8 |

7.36

Der Body-Adiposity-Index (BAI) berechnet sich aus dem Hüftumfang h in cm und der Körpergröße l in m zu $BAI = \frac{h}{l^{1.5}} - 18$.

FA | 1.1 | 1.8 |

a) Niramot hat eine andere Formel für BAI gefunden, nämlich $BAI = \frac{h}{l \cdot \sqrt{l}} - 18$. Erkläre, ob die Formel von Niramot richtig ist!

b) Welche Funktion $(\mathbb{R}^+)^2$ nach $\mathbb{R}$ kann in der Formel gesehen werden?

c) Bestimme die Funktion von $\mathbb{R}^+$ nach $\mathbb{R}$ falls h bzw. l konstant gehalten wird!

7.4 Funktionale Aspekte von Formeln

Die Betrachtung von Formeln als Funktionen ermöglicht es, unterschiedliche Fragen zu beantworten, wie beispielsweise die Abhängigkeit von Größen untereinander, ob eine Größe direkt oder indirekt proportional zur anderen ist, der Typ des Zusammenhangs oder wie eine Größe verändert werden muss, damit eine andere Größe einen bestimmten Wert annimmt.

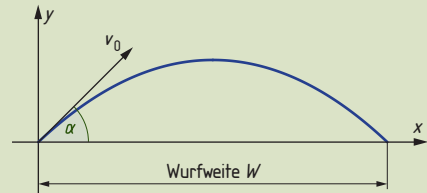
TE

7.37 Die Wurfparabel eines Körpers, der mit der Geschwindigkeit v_0 in m/s unter dem Winkel α gegen die Horizontale abgeworfen wurde, ergibt eine Wurfweite W in m, die mit der folgenden Formel beschrieben werden kann:

$$W(v_0, \alpha) = \frac{v_0^2 \cdot \sin(2\alpha)}{g}$$

g ... konstante Erdbeschleunigung.

- Von welchem Typ ist die Funktion $W: v_0 \rightarrow W(v_0)$ bei Konstanthaltung des Winkels α ?
- Wie muss sich die Geschwindigkeit verändern, damit sich bei gleichem Winkel die Wurfweite verdoppelt?



FA | 1.5 | 1.8 |

- Bei der Funktion $W: v_0 \rightarrow W(v_0)$ handelt es sich um eine quadratische Funktion.
- Die Geschwindigkeit als Funktion der Wurfweite mit $\alpha < 90^\circ$ und konstant ergibt die Formel:

$$v_0(W) = \sqrt{\frac{g \cdot W}{\sin(2\alpha)}} \text{ mit } W \in \mathbb{R}^+; v_0(2W) = \sqrt{\frac{g \cdot 2W}{\sin(2\alpha)}} = \sqrt{2} \cdot v_0(W)$$

Die Geschwindigkeit muss sich – bei Konstanthaltung des Winkels – um den Faktor $\sqrt{2}$ vergrößern, wenn die Wurfweite doppelt so groß sein soll.

M 7.38 Die thermische Zustandsgleichung für eine Stoffmenge von einem Mol des Gases
Typ 2 ist $p \cdot V = R \cdot T$ mit $R = 8,31 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$ die Gaskonstante.

dabei ist p der Druck in Pascal, V das Volumen in m^3 und T die absolute Temperatur in Kelvin.

- Welche Möglichkeiten führen zu einer Halbierung des Drucks p , wenn jeweils eine Größe verändert wird und die andere Größe konstant gehalten wird?
- Bestimme den Funktionstyp von $p: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ mit $p(V)$ bei Konstanthaltung der anderen Größe!
- Bestimme den Funktionstyp von $p: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ mit $p(T)$ bei Konstanthaltung der anderen Größe!

FA | 1.5 | 1.8 |

Lösung:

- $p: (\mathbb{R}^+)^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $p(V, T) = R \cdot \frac{T}{V}$. Der Druck wird halbiert, falls V bei konstant gehaltenem T verdoppelt oder falls T bei konstant gehaltenem V halbiert wird.
- Es handelt sich um eine Reziproktfunktion.
- Es handelt sich um eine lineare Funktion; in diesem Falle ist sie sogar direkt proportional.

M TE 7.39
Typ 2

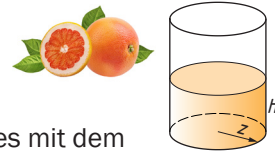
Ein künstlicher Satellit der Masse M in Gramm umkreist die Erde auf einer Ellipsenbahn mit der großen Halbachse a . Die Formel für seine Bewegungsenergie in Joule lautet: $E(M, a) = 3,986 \cdot 10^{14} \cdot \frac{M}{2a}$.

FA |1.5|1.8|

- Zeige, dass $E(2 \cdot M, 2 \cdot a) = E(M, a)$!
- Zu welchen Größen ist M und a direkt proportional, zu welchen indirekt proportional?
- Skizziere den Graphen der Funktion $M \rightarrow E(M)$ bei Konstanthaltung von a !

M TE 7.40
Typ 2

Eine Grapefruit hat die Form einer Kugel mit einem Durchmesser von x cm. Die Frucht besteht aus y Prozent Saft. Der gesamte Saft der Grapefruit wird in ein zylinderförmiges Glas gepresst.



Für den Zusammenhang der Höhe h des ausgepressten Saftes mit dem Radius z des Glases und dem Durchmesser x der Grapefruit, sowie mit dem

angegebenen Prozentsatz y an Saft gilt: $h(x, y, z) = \frac{x^3 \cdot y}{6 \cdot z^2}$

FA |1.3|1.5|1.8|

- Zeige, wie man zu dieser Formel kommt!
Zu welchen Größen x, y, z ist h direkt proportional, zu welchen indirekt proportional? Ist h direkt oder indirekt proportional zu z^2 ?
- Zeige, dass $h(2 \cdot x, 2 \cdot y, 2 \cdot z) = 4 \cdot h(x, y, z)$!
Was besagt diese Gleichung?
- Ermittle t in der Gleichung $h(k \cdot x, k \cdot y, k \cdot z) = t \cdot h(x, y, z)$!
- Skizziere den Graphen der Funktion $z \rightarrow h(z)$ unter Konstanthaltung von x und y .

M TE 7.41
Typ 2

Drei Tennisbälle werden in einem Zylinder verkauft. Die Tennisbälle haben einen Radius von r cm. Der Zylinder ist so konzipiert, dass er gerade groß genug ist, um die drei Bälle aufzunehmen. $V_p(r)$ ist das Volumen des verbleibenden Platzes des Zylinders in Abhängigkeit vom Radius r und $V(r)$ ist das Volumen des Zylinders in Abhängigkeit von r . Bestimme das Volumen $V_p(r)$!



Zeige, dass $V_p(2 \cdot r) = 8 \cdot V_p(r)$!

Zeige, dass $\frac{V_p(r)}{V(r)} = C$, wobei C eine Konstante ist!

FA |1.5|1.8|

M TE 7.42
Typ 2

Eine zylinderförmige Torte mit Radius r und Höhe h ist oben und seitlich gleichmäßig mit einer d dicken Cremeschicht bestrichen. Dabei ist V das Volumen der Cremeschicht mit $V(r, h, d) = (r + d)^2 \cdot \pi \cdot d + (2 \cdot r + d) \cdot \pi \cdot h \cdot d$.

- Zeige, wie man zur Formel für V kommt!
- Beweise, dass $V: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ mit $V(h)$ eine streng monotone lineare Funktion ist!
- Erkläre, ob sich das Volumen der Cremeschicht verdoppelt, wenn die Höhe der Torte verdoppelt wird und die anderen zwei Variablen konstant gehalten werden!
- Erkläre, warum es sich bei $V: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ mit $V(d)$ um eine Polynomfunktion vom Grad 3 handelt, wenn alle anderen Variablen konstant gehalten werden!

FA |1.5|1.8|

Zusammenfassung

Eine Funktion $f: D \rightarrow W$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$ und $W \subseteq \mathbb{R}$ ist eine reelle Funktion.

Eine Funktion $f: A \rightarrow B$ mit $y = f(x)$ heißt

- **injektiv** genau dann, wenn zu jedem $y \in B$ höchstens ein $x \in A$ existiert mit $y = f(x)$.
- **surjektiv** genau dann, wenn zu jedem $y \in B$ mindestens ein $x \in A$ existiert mit $y = f(x)$.
- **bijektiv** genau dann wenn, zu jedem $y \in B$ ein eindeutiges $x \in A$ existiert mit $y = f(x)$.

Gegeben sind die Funktion $f: D_f \rightarrow W_f$ und $g: D_g \rightarrow W_g$.

- Die Funktion $g \circ f$ mit $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ heißt die **Verkettung** der Funktion g mit f , falls $f(D_f) = W_f \subseteq D_g$. Dabei ist $D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\}$
- Die Funktion $f \circ g$ mit $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ heißt die Verkettung der Funktion f mit g , falls $g(D_g) = W_g \subseteq D_f$. Dabei ist $D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\}$

Die reelle Funktion $f: A \rightarrow B$ ordnet jedem $x \in A$ eindeutig ein $y \in B$ zu.

Kann umgekehrt jedem $y \in B$ eindeutig ein $x \in A$ zugeordnet werden, so entsteht die **Umkehrfunktion** (inverse Funktion) $f^{-1}: B \rightarrow A$.

Dann gilt:

- $(f \circ f^{-1})(x) = x$ für alle $x \in B$.
- $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ für alle $x \in A$.

Eine Funktion $f: A \rightarrow B$ mit $A \subseteq \mathbb{R}^n$ und $B \subseteq \mathbb{R}$ ist eine **reelle Funktion in n Variablen**.

Für A kommen hierbei besonders folgende Teilmengen in Betracht:

$$\mathbb{R}^2 = \{(a_1, a_2) \mid a_1 \in \mathbb{R} \text{ und } a_2 \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathbb{R}^3 = \{(a_1, a_2, a_3) \mid a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathbb{R}^n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}$$

$$(\mathbb{R}^+)^2 = \{(a_1, a_2) \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R}^+\}$$

$$(\mathbb{R}^+)^3 = \{(a_1, a_2, a_3) \mid a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^+\}$$

$$(\mathbb{R}^+)^n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+\}$$

Menge der (geordneten) Paare reeller Zahlen

Menge aller Tripel reeller Zahlen

Menge aller n -Tupel reeller Zahlen

Menge aller Paare positiver reeller Zahlen

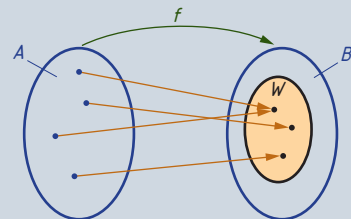
Menge aller Tripel positiver reeller Zahlen

Menge aller n -Tupel positiver reeller Zahlen

Allgemein können A und B beliebige Mengen sein, also nicht unbedingt Zahlenmengen, sondern zum Beispiel auch Mengen geometrischer Figuren oder Körper, Funktionsgraphen, oder sogar Mengen nichtmathematischer Objekte.

Allgemein gilt:

Eine Funktion (oder Abbildung) von A nach B ist eine Zuordnung, die jedem Element einer Menge A genau ein Element der Menge B zuordnet. A heißt die Definitionsmenge und B die Zielmenge, und die Menge $f(A)$ der Bildmenge von A ist die Wertemenge W der Funktion f .



Vermischte Aufgaben zur Vorbereitung auf die Reifeprüfung

M 7.43
Typ 2

Für den elektrischen Widerstand R eines Drahtes der Länge l und dem Querschnitt A gilt

$$R = \rho \cdot \frac{l}{A}$$

ρ ist eine materialabhängige Konstante – der spezifische Widerstand.

FA | 1.3 | 1.5 | 1.8 |

a) Skizziere die Graphen

$$l \rightarrow R(l) \text{ und}$$

$$A \rightarrow R(A)$$

jeweils unter Konstanthaltung der jeweiligen anderen Variablen!

b) Der elektrische Widerstand R soll halbiert werden. Welche Möglichkeiten stehen zur Verfügung? Es soll ein kreisförmiger Querschnitt mit Radius r verwendet werden

c) Zeige, dass $R = \rho \cdot \frac{l}{r^2 \cdot \pi}$ gilt!

Skizziere den Graphen $r \rightarrow R(r)$ unter Konstanthaltung der anderen Variablen!

d) Bestimme t derart, dass $R(k \cdot r, k \cdot l) = t \cdot R(r, l)$!



M TE 7.44
Typ 2

Eine Sanduhr in Gestalt eines Doppelkegels ist gerade umgedreht worden. Der gesamte Sand befindet sich im oberen Teil und hat dort die Gestalt eines Kreiskegels mit Radius r in cm und Höhe h in cm.

a) Stelle eine Funktionsgleichung auf, um das Volumen V in der Sanduhr in Abhängigkeit von r und h zu bestimmen!
Zeige, dass: $V(2r, 2h) = 8 \cdot V(r, h)$!

Der Sand rinnt gleichmäßig nach unten, und nach einiger Zeit hat die Höhe des oben befindlichen Sandkegels um x cm abgenommen.

Das Volumen des bereits hinunter gerieselten Sandes V_s in Abhängigkeit von r , h und x ist gegeben durch

$$V_s(r, h, x) = \frac{1}{3} r^2 \pi h \cdot \left(1 - \left(\frac{h-x}{h}\right)^3\right)$$

b) Bestätige diese Volumsformel mit Hilfe des Strahlensatzes!

c) Erkläre, von welchen Typ die Funktion

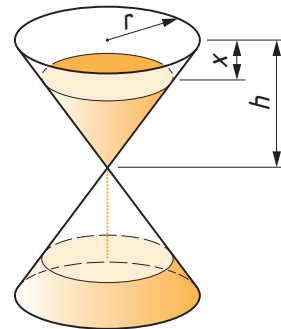
$$V_s: r \rightarrow V_s(r) \text{ ist!}$$

Skizziere den Graphen der Funktion $V_s: r \rightarrow V_s(r)$!

Angenommen, das Volumen des Sandes ist 200 cm^3 und die ganze Sandmenge benötigt eine Stunde, um nach unten zu rinne.

d) Bestimme die Zeitdauer, in dem ein Volumen von 70 cm^3 in den unteren Kegel geronnen ist!

FA | 1.3 | 1.5 | 1.8 |



Wissens-Check

Bearbeite die Aufgaben. **Begründe** jeweils deine Auswahl.

- 1** Gegeben sind die Funktionen f mit $f(x) = 3 \cdot x - 7$ und g mit $g(x) = 2 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 5$. Ordne den Zahlenwerten jeweils den gültigen Funktionswert aus A bis F zu!

5	
26	
35	
56	

A	$(g \circ f)(3)$
B	$(g \circ f)(4)$
C	$(g \circ g)(5)$
D	$(f \circ g)(3)$
E	$(f \circ g)(4)$
F	$(f \circ g)(5)$

- 2** Kreuze jene Funktion f an, die injektiv, aber nicht surjektiv ist!

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$	☐
$f: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$	☐
$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ mit $f(x) = x^2$	☐
$f: \mathbb{R}_0^- \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ mit $f(x) = x^2$	☐
$f: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ mit $f(x) = x^2$	☐
$f: \mathbb{R}^- \rightarrow \mathbb{R}^+$ mit $f(x) = x^2$	☐

- 3** Gegeben sind die beiden Funktionen $f: x \mapsto 3 \cdot x^2$ und $g: x \mapsto 2 \cdot x + 1$. Kreuze den richtigen Funktionsterm von $(f \circ g)(a)$ an!

$12 \cdot a^2 + 3$	☐	$12 \cdot a^2 + 12 \cdot a + 3$	☐	$6 \cdot a^2 + 1$	☐
$6 \cdot a^2 + 4$	☐	$4 \cdot a^2 + 4 \cdot a + 1$	☐	$12 \cdot a^2 + 3 \cdot a$	☐

- 4** Ergänze die Textlücken durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine korrekte Aussage entsteht!

Gegeben ist die Funktion $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ mit $f(x) = k \cdot x + d$. Wenn ^① , dann ist f injektiv, aber nicht ^② .

①	
$k < 0, d \in \mathbb{R}$	☐
$k = 0, d = 0$	☐
$k = 0, d \neq 0$	☐

②	
surjektiv	☐
streng monoton fallend	☐
$f(3) < f(-3)$	☐

Wissens-Check

5

Gegeben ist die Funktion

$$f: (\mathbb{R}^+)^6 \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \frac{x_1 \cdot x_2^3 \cdot x_3^2}{x_4 \cdot x_5^2} \cdot \sin(x_6).$$

Ordne den Typ der Funktion zur Funktionsgleichung zu!

lineare Funktion	☐	A	$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x_1)$ unter Konstanthaltung der anderen Variablen.
quadratische Funktion	☐	B	$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x_2)$ unter Konstanthaltung der anderen Variablen.
Reziproktfunktion	☐	C	$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x_3)$ unter Konstanthaltung der anderen Variablen.
trigonometrische Funktion	☐	D	$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x_4)$ unter Konstanthaltung der anderen Variablen.
		E	$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x_5)$ unter Konstanthaltung der anderen Variablen.
		F	$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x_6)$ unter Konstanthaltung der anderen Variablen.

6

Gegeben ist $f: A \rightarrow B$ mit A und B jeweils endliche Mengen. Ferner hat B mehr Elemente als A .

Kreuze jene Aussage an, die richtig ist!

f ist auf jeden Fall surjektiv.	☐
f ist auf jeden Fall injektiv.	☐
f ist auf jeden Fall bijektiv.	☐
f kann surjektiv sein.	☐
f kann injektiv sein.	☐
f kann bijektiv sein.	☐

7

In den folgenden Formeln sind $x, y \in \mathbb{R}^+$ und C eine Konstante.Kreuze jene Formel an, bei der y größer wird, wenn x erhöht wird!

$\frac{1}{x \cdot y} = C$	☐	$x^3 \cdot y = C$	☐	$\frac{x}{y} = C$	☐
$x^2 \cdot y = C$	☐	$x \cdot y = C$	☐	$x + y = C$	☐

8

Der funktionale Zusammenhang der Wurfweite beim schrägen Wurf mit v_0 und α

$$\text{lautet: } W(v_0, \alpha) = \frac{v_0^2 \cdot \sin(2\alpha)}{g}.$$

Formel nach dem funktionalen Zusammenhang $\alpha(W, v_0)$ um!

$$\alpha(W, v_0) = \underline{\hspace{10cm}}$$

Lösungen: 1) A D B E 2) Z Z 3) Z 1 S 2 4) 1 $\rightarrow$ 1 2 $\rightarrow$ 1 5) A, C, D, F 6) Z 5 7) Z 1 S 3 8) $\frac{1}{2} \cdot \arcsin\left(W \cdot \frac{g}{v_0^2}\right)$