2 Lineare Gleichungen

Man war bei den Ägyptern mit dem Lösen von linearen Gleichungen in einer Unbekannten durchaus vertraut. Rechnungen dieser Art werden als Hau-Rechnungen bezeichnet. Das ägyptische Wort Hau bedeutet soviel wie Menge, Haufen. Im Papyrus Rind lautet etwa die Aufgabe 26 dieser Aufgabensammlung des Schreibers Ahmes: „Eine Menge und ihr Viertel sind zusammen 15."
Die Lösung wird rezeptartig angegegeben und beginnt so:
Rechne mit 4, davon musst du ein Viertel nehmen, nämlich 1; zusammen 5. Nun wird 15 durch 5 dividiert, das Ergebnis mit 4 multipliziert. Somit ist die gesuchte Menge 12. Ihr Viertel ist 3 und somit 15 = 12 + 3.
Manche Mathematikhistoriker interpretieren die Lösung dieser Aufgabe als Beispiel für die Methode des einfachen falschen Ansatzes (auch Methode der Versuchszahl genannt).

Robert Recorde

Das Gleichheitszeichen = wurde im Jahr 1557 vom walisischen Mathematiker **Robert Recorde** (1510 – 1558) eingeführt, indem er die zwei parallelen Striche durch „because no two things can be more equal" begründete.

2.1 Grundbegriffe zu den Gleichungen

Eine Gleichung ist ein mathematischer Ausdruck, bei dem zwei Terme (T_1 und T_2) durch ein Gleichheitszeichen (=) verbunden sind: $T_1 = T_2$. Der Term T_1 ist die linke Seite und der Term T_2 die rechte Seite der Gleichung. Gleichungen sind entweder wahr oder falsch und falls mindestens ein Term von einer Variablen abhängt, liegt eine Aussageform vor, deren Wahrheitsgehalt von den konkreten eingesetzten Werten abhängt.

Beim Lösen von Gleichungen werden drei verschiedene Mengen unterschieden:

– Die **Grundmenge *G*** einer Gleichung ist die Menge aller Zahlen, die als mögliche Lösungen der Gleichung vorgesehen sind.
– Die **Lösungsmenge *L*** einer Gleichung ist die Menge aller Zahlen der Grundmenge, für die die Gleichung in eine wahre Aussage übergeführt wird.
– Die **Definitionsmenge *D*** einer Gleichung ist die Menge jener Elemente aus der Grundmenge, für die die Terme der Gleichung einen sinnvollen Zahlenwert ergeben.

2.1 Überprüfe, ob die angegebenen Zahlen Lösungen der Gleichung sind! *AG |2.2|*

a) Gleichung: $7x - 2 = 54$
$x = 8$, $x = \frac{50}{7}$

b) Gleichung: $x^2 = 16$
$x = 4$, $x = -4$

a) $x = 8$ ist eine Lösung, da $7 \cdot 8 - 2 = 56 - 2 = 54$ richtig ist.
$x = \frac{50}{7}$ ist keine Lösung, da $7 \cdot \frac{50}{7} - 2 = 50 - 2 = 54$ falsch ist.

b) $x = 4$ ist eine Lösung, da $4^2 = 16$ richtig ist.
$x = -4$ ist eine Lösung, da $(-4)^2 = 16$ richtig ist.

Eine Gleichung lösen bedeutet, jene Zahl oder jene Zahlen aus der Grundmenge zu bestimmen, die anstelle der Variablen eingesetzt eine wahre Aussage ergeben.
Man drückt es so aus: „Die Zahlen für x erfüllen die Gleichung“.

2.2 Setze den Wert für z ein und überprüfe, ob die Lösung stimmt! *AG |2.2|*

a) $4 \cdot (3 + z) = 48$ und $z = 9$ **b)** $-z^2 = 2z + 1$ und $z = -1$; $z = 1$

Lösung:
a) $z = 9$ ist eine Lösung, da $4 \cdot (3 + 9) = 4 \cdot 12 = 48$
b) $z = 1$ ist keine Lösung, da $-1^2 = -1 \neq 2 \cdot 1 + 1$
$z = -1$ ist eine Lösung, da $-(-1)^2 = -1 = 2 \cdot (-1) + 1$

2.3 Entscheide, ob die folgenden Gleichungen wahr oder falsch sind! *AG |2.2|*

a) $8 + 7 = 15$ **b)** $19 \cdot 2 = 38$ **c)** $108 - 2 \cdot 7 = 100 + 2$
d) $9 = 18 : 3$ **e)** $9 + 3 = 4 + 8$ **f)** $10 \cdot (18 + 3) = 240 - 58 : 2$

2.4 Überprüfe, ob die folgenden Gleichungen wahr oder falsch sind! *AG |2.2|*

a) $(5 - 7) \cdot \left(9 - \frac{18}{2}\right) = 0$ **b)** $(4^2 - 6) : (3^2 + 1) = 1$
c) $9 \cdot (8 - 3) = 5 \cdot (10 - 1)$ **d)** $(12^2 - 2 \cdot 22) : 10 = 10$

2.5 Setze den angegebenen Wert für x ein und überprüfe, ob x eine Lösung ist! *AG |2.2|*

a) $3x + 7 = 40$ und $x = 11$ **b)** $x - 13 = 138$ und $x = 144$
c) $\frac{30x}{5} = 60$ und $x = 10$ **d)** $8x + 7 = 39$ und $x = 3$

2.6 Überprüfe, ob die angegebenen Werte für die Variablen die Gleichung erfüllen! *AG |2.2|*

a) $\frac{1}{2} + s - \frac{1}{4} = 12{,}25$ und $s = 12$ **b)** $a + 10 = -4$ und $a = -14$
c) $3 \cdot (t - 1) = 5t - 3$ und $t = 0$ **d)** $0{,}5 \cdot y = 2$ und $y = 1$

2.7 Argumentiere, ob die angegebenen Werte Lösungen der Gleichung sind! *AG |2.2|*

a) $x^3 = 2 \cdot x \cdot (-8 + 4x)$ $x = 0, x = 4, x = -4$
b) $4 \cdot 10^{-9} \cdot y = 12$ $y = 3 \cdot 10^9, y = 3 \cdot 10^{-9}$
c) $z^3 + z^2 - 2z = 0$ $z = 0, z = 1, z = -2$
d) $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$ $x = 1, x = -1, x = 2$

M **2.8** Ordne den Gleichungen jeweils die korrekte Lösung aus A bis F zu! *AG |2.2|*

$\frac{5 \cdot x + 3}{2} - 5 = 6x$	
$\frac{3 + x}{5} - \frac{x - 3}{3} = 10$	
$\frac{5 + x}{3} - \frac{x - 5}{5} = 10$	
$\frac{3 \cdot x + 5}{2} - 5 = -x$	

A	1
B	−2
C	−1
D	−63
E	7
F	55

2.2 Das Lösen von linearen Gleichungen

2.9 Löse die Gleichung $-2 \cdot x + 70 = 72 - 3 \cdot x$ in der Grundmenge $\mathbb{Z}$! *AG |2.2|*

Wir suchen die Lösungsmenge L, deren Elemente ganze Zahlen sind.

$$\begin{aligned}
-2 \cdot x + 70 &= 72 - 3 \cdot x && \mid +3x \text{ (Äquivalenzumformung 1)}\\
-2 \cdot x + 3 \cdot x + 70 &= 72 - 3 \cdot x + 3 \cdot x\\
x + 70 &= 72 && \mid -70 \text{ (Äquivalenzumformung 2)}\\
x + 70 - 70 &= 72 - 70\\
x &= 2\\
L &= \{2\}
\end{aligned}$$

Gleichungen darf man **äquivalent umformen.**

Gleichungen heißen **äquivalent (gleichwertig)**, wenn sie die gleichen Lösungen haben.

Äquivalenzumformung 1: auf beiden Seiten denselben Term addieren
Äquivalenzumformung 2: auf beiden Seiten denselben Term subtrahieren

2.10 Löse die Gleichung $\frac{7x}{3} - 4 = 5$ in der Grundmenge $\mathbb{Q}$! *AG |2.2|*

Wir suchen die Lösungsmenge L, deren Elemente rationale Zahlen sind.

$$\begin{aligned}
\tfrac{7x}{3} - 4 &= 5 && \mid +4 \text{ (Äquivalenzumformung 1)}\\
\tfrac{7x}{3} &= 9 && \mid \cdot 3 \text{ (Äquivalenzumformung 3)}\\
7x &= 27 && \mid :7 \text{ (Äquivalenzumformung 4)}\\
x &= \tfrac{27}{7}\\
L &= \left\{\tfrac{27}{7}\right\}
\end{aligned}$$

Beim Umformen von Gleichungen darf man:
Äquivalenzumformung 3: auf beiden Seiten mit demselben Term (ungleich null) multiplizieren
Äquivalenzumformung 4: auf beiden Seiten durch denselben Term (ungleich null) dividieren

Unter einer **linearen Gleichung** in der Variablen x wird jede Gleichung verstanden, die durch Äquivalenzumformungen in die Form $\boldsymbol{a \cdot x + b = 0}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$ übergeführt werden kann. Dabei heißt $a \cdot x$ das lineare Glied und b das konstante Glied.

2.11 Zeige, dass $\frac{7 - 3 \cdot x}{5} = 3$ eine lineare Gleichung ist!
Löse die Gleichung in der Grundmenge $\mathbb{N}$! *AG |2.2|*

Lösung:

$$\begin{aligned}
\tfrac{7 - 3 \cdot x}{5} &= 3 && \mid \cdot 5\\
7 - 3 \cdot x &= 15 && \mid -15\\
-8 - 3 \cdot x &= 0 && \mid \text{Summanden vertauschen}\\
-3 \cdot x - 8 &= 0
\end{aligned}$$

Die Gleichung $-3 \cdot x - 8 = 0$ ist eine lineare Gleichung mit $a = -3$ und $b = -8$; das lineare Glied ist $-3 \cdot x$ und das konstante Glied ist -8.

$-3x = 8$, daher $x = -\frac{8}{3}$; Lösungsmenge: $L = \{\,\}$

Beachte: Gleichungen müssen nicht immer eine eindeutige Lösung haben.
$\frac{7-3\cdot x}{5} = 3 - \frac{3x}{5}$ ... Die Variable x verschwindet beim äquivalenten Umformen, es bleibt $7 = 15$.
Das ist eine **falsche** Aussage, daher hat die Gleichung keine Lösung: $L = \{\,\}$
$\frac{7-3\cdot x}{5} = 1{,}4 - \frac{3x}{5}$ ... Die Variable x verschwindet beim äquivalenten Umformen, es bleibt $0 = 0$.
Das ist eine **wahre** Aussage, daher sind alle Zahlen der Definitionsmenge Lösungen der Gleichung: $L = D$

2.12 Löse die folgenden Gleichungen in der Grundmenge $\mathbb{R}$! AG |2.2|

a) $3x + 5 = 23$ **b)** $11 - 5z = 26$ **c)** $16 = 7z + 30$
d) $8y - 4 = 4$ **e)** $-9u - 9 = -90$ **f)** $5 + 7x = 19$

2.13 Löse die folgenden Gleichungen in der Grundmenge $\mathbb{Z}$! AG |2.2|

a) $9x + 4 = 31 + 6x$ **b)** $2x + 8 = x + 14$ **c)** $4x + 3x = 21$
d) $5\cdot(x - 2) = 20$ **e)** $9 + 4\cdot(x - 5) = 17$ **f)** $5\cdot(x - 2) = 42$

2.14 Forme die lineare Gleichung in die Form $a\cdot x + b = 0$ um und gib die Zahlen a und b an! AG |2.2|

a) $x - 4 = -x$ **b)** $7x + 4\cdot 10^7 = 9\cdot 10^7$
c) $2\cdot(x + 1) + 3\cdot(x - 1) = 39$ **d)** $100 - 7x = 13x$
e) $0{,}9\cdot x + 5 = 1{,}2\cdot x - 3{,}4$ **f)** $8\cdot(3 + 2x) - 3x = 5x - 8$

2.15 Berechne den Wert der Variablen in der Grundmenge $\mathbb{Q}$! AG |2.2|

a) $(17 - 3x)\cdot 11 = (2x + 1)\cdot 2$ **b)** $18z + 12\cdot(3z - 1) = 25z + 17$
c) $7\cdot(4f - 3) - 3\cdot(6f - 2) = 9\cdot(2f + 1) - 4\cdot(4f + 3)$

2.16 Löse die folgenden Gleichungen in der Grundmenge $\mathbb{Z}$! AG |2.2|

a) $4\cdot(5z - 3) + 6 = 10$ **b)** $4\cdot(9y - 11) - 12\cdot(3y - 4) = 4$
c) $18 - 5\cdot(w + 2) = 3$ **d)** $11 - 7\cdot(x - 2) = 4$
e) $4\cdot(x - 3) + 2\cdot(x + 1) = 20$ **f)** $15 - (x + 2) = 4$

2.17 Beurteile, ob es sich um eine lineare Gleichung handelt! AG |2.2|

a) $(4x + 5)^2 + (3x - 7)^2 = 3\cdot(5x - 3)^2$ **b)** $(2y - 4)^2 - (3y - 7)^2 = 13y + 7$
c) $2z\cdot(z + 8) - (z - 5)^2 = (z + 6)^2 + 4$ **d)** $(u - 5)\cdot(u + 5) = u\cdot(u + 3)^2$
e) $(3 + 4z)\cdot(4 - 10z) = -2z\cdot(3 + 0z)$ **f)** $(x + 5)\cdot(x - 3) = (x - 4)\cdot(x + 6)$

M **2.18** Ordne den Gleichungen jeweils die korrekte Aussage aus A bis F zu! AG |2.2|

Die Gleichung hat ...

$4\cdot(5x - 3) + 6 = 10$	
$(5z - 4)^2 = (5z + 4)^2 - 80z$	
$3\cdot(6v + 4) = 9\cdot(2v - 3)$	
$\sqrt{8}\cdot(y + 10) - 30 = 5y$	

A	in $\mathbb{N}$ genau eine Lösung.
B	in $\mathbb{Z}$ genau eine Lösung.
C	in $\mathbb{Q}$ genau eine Lösung.
D	nur in $\mathbb{R}$ genau eine Lösung.
E	jede reelle Zahl als Lösung.
F	in $\mathbb{R}$ keine Lösung.

2.19 Ermittle die rationale Zahl, die folgende Eigenschaft erfüllt: *AG |2.2|*

a) Das Multiplizieren dieser Zahl mit 10 ergibt die gleiche Zahl wie das Addieren von 10 zu dieser Zahl.
b) Das Multiplizieren dieser Zahl mit 10 ergibt die gleiche Zahl wie das Subtrahieren von 10 von dieser Zahl.

M **2.20** Kreuze diejenige Umformung einer Gleichung an, die **keine** Äquivalenzumformung ist!
Begründe deine Auswahl! *AG |2.2|*

Beide Seiten der Gleichung werden mit der gleichen Zahl ungleich null multipliziert.	☐
Auf beiden Seiten der Gleichung wird die gleiche Quadratzahl subtrahiert.	☐
Beide Seiten der Gleichung werden quadriert.	☐
Auf beiden Seiten der Gleichung wird die irrationale Zahl π addiert.	☐
Beide Seiten der Gleichung werden halbiert.	☐
Beide Seiten der Gleichung werden durch die gleiche Zehnerpotenz dividiert.	☐

2.21 Löse die folgenden Gleichungen in der Grundmenge der rationalen Zahlen!
Überprüfe, ob die lineare Gleichung auch in der Grundmenge $\mathbb{N}$ genau eine Lösung hat! *AG |2.2|*

a) $17 - [7x - (5 - x)] = (2x - 3) - [-x - (5 + 3x)]$
b) $(2h - 1) \cdot (3h - 2) = (h - 5) \cdot (6h + 2) + 11h$
c) $7u - (u + 11) = (3 - 2u) - (14 - 8u)$
d) $0{,}5 - 1{,}7z = 0{,}74 + 2{,}3z$
e) $(5y - 4)^2 = (5y + 4)^2 - 80y$
f) $2x - (2 - 7x)^2 = (1 - 7x) \cdot (1 + 7x)$

2.22 Gibt es ganze Zahlen z, die die folgenden Gleichungen erfüllen?
Wenn ja, gib diese an!
Wenn nicht, begründe, warum es keine solche Zahl gibt! *AG |2.2|*

a) $(2z + 3)^2 = (5 - 2z)^2$
b) $0{,}7z + 2{,}8 = 0{,}55z - 1{,}7$
c) $(3z - 1)^2 = (3z + 4) \cdot (3z - 5)$
d) $4z + 10 = 8 \cdot (0{,}5z + 1{,}25)$
e) $9z - 10 = 3 \cdot (4 - 2z) + 15$
f) $(4z - 2)^2 = (4z - 1)^2 - 8 \cdot (z + 2)$

2.23 Jede lineare Gleichung der Form $a \cdot x + b = 0$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$ hat in der Grundmenge $\mathbb{R}$ genau eine Lösung. *AG |2.2|*

a) Beweise diese Aussage durch einen allgemeinen Term für diese Lösung!
b) Erkläre, warum die Bedingung $a \neq 0$ unbedingt notwendig ist!
c) Gib eine lineare Gleichung an, die nur in $\mathbb{N}$ keine Lösung hat!
d) Gib eine lineare Gleichung an, die in $\mathbb{Z}$ keine, aber in $\mathbb{Q}$ eine Lösung hat!
e) Gib eine lineare Gleichung an, die in $\mathbb{Q}$ keine Lösung hat!
f) Argumentiere, ob eine lineare Gleichung immer eine Lösung in $\mathbb{R}$ hat!

2.3 Das Erstellen von linearen Gleichungen

2.24 Herr Abel möchte x Stück Europaletten in seinem Transporter mitnehmen. Er wiegt 90 Kilogramm und eine Palette wiegt im Durchschnitt 20,25 Kilogramm. Die Nutzlast des Wagen ist 955 Kilogramm.
Erstelle eine Gleichung, die den Sachverhalt beschreibt!
Berechne, wie viele Paletten Herr Abel mitnehmen kann! *AG |2.2|*

2.25 Stelle eine lineare Gleichung in x auf, mit der die Anzahl der Vögel auf einem Baum beziehungsweise auf einer Stromleitung bestimmt werden kann! *AG |2.2|*

a) Auf einem Baum sitzt ein Vogelschwarm. 8 Vögel fliegen weg, $\frac{3}{4}$ der Vögel bleiben übrig.

b) Auf einer Stromleitung sitzt ein Vogelschwarm. 9 Vögel fliegen weg, $\frac{2}{5}$ der Vögel bleiben übrig.

2.26 Stelle eine lineare Gleichung in x auf, mit der die einzelnen Sachverhalte gelöst werden könnten! *AG |2.2|*

a) Eine Erbschaft von 50.000 Euro wird unter drei Erben derart aufgeteilt, dass B um 7.000 Euro mehr als A und C um 9.000 Euro weniger als A bekommt. Stelle eine lineare Gleichung auf, um die einzelnen Erbschaftsbeträge zu ermitteln!

b) Der Verlust von 3.600 Euro wird auf drei Firmenbesitzer derart aufgeteilt, dass A halb so viel wie B und C ein Viertel von B bezahlt. Stelle eine lineare Gleichung für die Beträge auf, die die drei Firmenbesitzer zahlen müssen!

2.27 Aus der Arithmetik des Inders **Bhaskara** (1114 – 1185): *AG |2.2|*
Jemand hat 300 Rupien und 6 Pferde. Ein anderer hat 10 Pferde, aber eine Schuld von 100 Rupien. Beider Vermögen ist gleich groß.
Erstelle eine passende Gleichung! Berechne den Preis eines Pferds!

2.28 Aufgaben des deutschen Rechenmeisters **Adam Ries** (1492 – 1559): *AG |2.2|*

a) Drei Gesellen wollen ein Haus für 204 Gulden kaufen. Der erste gibt dreimal so viel wie der zweite, dieser viermal so viel wie der dritte.
Erstelle eine Gleichung, die den Sachverhalt beschreibt!
Berechne, wie viel jeder von ihnen bezahlt!

b) Jemand spricht: „Gott grüß euch, ihr 30 Gesellen". Man antwortet ihm: „Wenn wir noch einmal so viel wären und noch halb so viel, dann wären wir 30."
Erstelle eine Gleichung zu diesem Sachverhalt!
Berechne, wie viel sie gewesen sind!

2.29 Das Vierfache einer Zahl, vermindert um 3, ergibt genauso viel, wie wenn das Dreifache dieser Zahl um 8 vermehrt würde.
Erstelle eine passende Gleichung zu diesem Sachverhalt!
Ermittle diese Zahl! *AG |2.2|*

2.4 Lineare Gleichungen mit Bruchzahlen

2.30 Ermittle die Lösungsmenge der Gleichung $\frac{x-1}{3} + \frac{x-2}{5} = 2x - 4$ in der Grundmenge $\mathbb{R}$! *AG |2.2|*

Der linke und der rechte Term der Gleichung werden mit dem Hauptnenner 15 multipliziert. Jeder Bruch in der Gleichung wird sofort gekürzt.

$$\begin{aligned}
5 \cdot (x-1) + 3 \cdot (x-2) &= 15 \cdot (2x-4) && |\ \text{Ausmultiplizieren}\\
5x - 5 + 3x - 6 &= 30x - 60 && |\ \text{Summanden zusammenfassen}\\
8x - 11 &= 30x - 60 && |\ -30x\\
-22x - 11 &= -60 && |\ +11\\
-22x &= -49 && |\ :(-22)\\
x &= \frac{49}{22}\\
L &= \left\{\frac{49}{22}\right\}
\end{aligned}$$

Gleichungen, in denen Brüche nur als Koeffizienten auftreten, sind keine Bruchgleichungen, sondern Gleichungen mit Brüchen (Bruchzahlen).

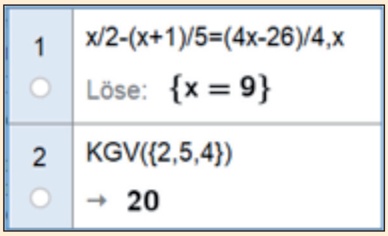
TE

2.31 Löse die Gleichung $\frac{x}{2} - \frac{x+1}{5} = \frac{4x-26}{4}$ in der Grundmenge $\mathbb{R}$!
Überprüfe mit Technologieeinsatz! *AG |2.2|*

Lösung:
Der Hauptnenner ist 20, daher wird die Gleichung mit 20 multipliziert.

$$\begin{aligned}
10x - 4 \cdot (x+1) &= 5 \cdot (4x-26) && |\ \text{Ausmultiplizieren}\\
10x - 4x - 4 &= 20x - 130 && |\ \text{Summanden zusammenfassen}\\
6x - 4 &= 20x - 130 && |\ -20x\\
-14x - 4 &= -130 && |\ +4\\
-14x &= -126 && |\ :(-14)\\
x &= 9\\
L &= \{9\}
\end{aligned}$$

Überprüfung zB mit **Geogebra**:
Eingabe der Gleichung in die CAS-Eingabezeile, mit dem Button $\boxed{x =}$ exakt lösen oder mit dem Button $\boxed{x \approx}$ numerisch lösen.
Den Hauptnenner findet man für Bruchgleichungen mit der Eingabe **KGV (Liste von Zahlen)**



2.32 Löse die linearen Gleichungen in $G = \mathbb{R}$! *AG |2.2|*

a) $\frac{5x-1}{3} = \frac{3x-2}{4}$ b) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 12$

c) $\frac{x}{5} + 2 = \frac{x}{3} - 3$ d) $\frac{7x-3}{5} = \frac{5x-9}{7}$

e) $\frac{3x+2}{4} = x - \frac{1}{2}$ f) $-\frac{12}{5} + x = \frac{11}{5}$

2.33 Aus einem chinesischen Rechenbuch (Chiu Chang Suan Shu) für den praktischen Gebrauch aus der frühen Hanzeit (202 v. Chr. bis 9 n. Chr.):
Ein Mann hat Reis bei sich. Er geht aus 3 Zollschranken heraus. An der äußeren Zollschranke wird $\frac{1}{3}$ weggenommen, von der verbliebenen Menge wird an der mittleren Schranke $\frac{1}{5}$ weggenommen, an der inneren Schranke wird von dem verbliebenen Rest $\frac{1}{7}$ weggenommen. Der Rest an Reis sind 5 Tou.
Berechne, wie viel Reis er am Anfang hatte! *AG |2.2|*

2.34 Löse die folgenden Gleichungen in der Grundmenge $\mathbb{Z}$! *AG |2.2|*

a) $\frac{x}{2} - \frac{x-1}{5} = \frac{3x-4}{4}$ b) $\frac{3}{4}x - \frac{4x}{3} = \frac{1}{6}$

c) $\frac{1}{3} \cdot (9x + 6) + \frac{x}{4} = \frac{1}{8}$ d) $2x + \frac{3x-2}{4} = 4 + \frac{2x+3}{7}$

e) $\frac{2 \cdot (x+2)}{4} - \frac{x}{2} - \frac{4}{5}x = 12$ f) $\frac{x-3}{7} - \left(3 - \frac{4-3x}{5}\right) = 5$

2.35 Löse die folgenden linearen Gleichungen mit Bruchzahlen in der Grundmenge $\mathbb{Q}$! *AG |2.2|*

a) $\frac{3 \cdot (x-2)}{5} - \frac{2 \cdot (x-1)}{3} + 2 = \frac{1}{2} \cdot (x+4) + \frac{3 \cdot (x-5)}{4}$

b) $\frac{x-13}{3} - \frac{x+2}{4} + \frac{3x-7}{2} = 13 + \frac{1}{2} \cdot (x+5)$

2.36 Zum Drittel einer Zahl wird ein Viertel der selben Zahl addiert und man erhält 70.
Erstelle eine Gleichung, die diesen Sachverhalt beschreibt!
Berechne diese Zahl! *AG |2.2|*

2.37 Das Vierfache einer Zahl ist um 30 größer als ein Viertel der Zahl.
Erstelle eine Gleichung, die diesen Sachverhalt beschreibt!
Ermittle die Zahl! *AG |2.2|*

2.38 Aus dem Papyrus Rhind aus Ägypten (um 1700 v. Chr.):
Gib zu einer Zahl zwei Drittel ihrer selbst hinzu und nimm dann vom bisherigen Ergebnis ein Drittel weg, so bleibt 10.
Berechne die Zahl! *AG |2.2|*

M **2.39** 1.850 Euro sollen auf drei Personen so aufgeteilt werden, dass jeder um ein Viertel weniger erhält als der Vorige.
Kreuze die richtige Bestimmungsgleichung an, um diese Aufgabe zu modellieren! *AG |2.2|*

$x \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = 1\,850$	☐
$\left(x + \frac{1}{4} \cdot x\right) \cdot \frac{1}{4} = 1\,850$	☐
$x + \frac{3}{4} \cdot x + \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot x = 1\,850$	☐
$6 \cdot \frac{x}{4} = 1\,850$	☐
$x + x \cdot x \cdot \frac{1}{4} + x \cdot x \cdot x \cdot \frac{1}{4} = 1\,850$	☐
$x \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1\,850}{3}$	☐

M **2.40** Eine Rechnung über 200.000 Euro wird auf 4 Personen aufgeteilt. Die 1. Person muss um 10.000 Euro mehr bezahlen als die 2. Person und die dritte Person die Hälfte von der Summe, die die beiden anderen bezahlen müssen, die 4. Person zahlt die Differenz der 1. und der 3. Person.
Ordne den Personen jeweils den zu zahlenden Betrag aus A bis F zu! *AG |2.2|*

1. Person	
2. Person	
3. Person	
4. Person	

A	5.000 Euro
B	10.000 Euro
C	60.000 Euro
D	65.000 Euro
E	70.000 Euro
F	75.000 Euro

2.41 Aus einem vollen Behälter mit Mehl wird zuerst die Hälfte des Inhalts entnommen.
Vom Rest wird wieder die Hälfte entnommen.
Man gibt anschließend 0,75 kg dazu.
Der Behälter ist dann zu 3 Viertel voll.
Erstelle eine Gleichung, mit der man berechnen kann, wie viel Kilogramm Mehl sich ursprünglich im Behälter befunden haben!
Löse die Gleichung! *AG |2.2|*

2.42 Karin hat sich Geld von Thomas geliehen.
Im 1. Monat zahlt sie ein Fünftel davon ab, im 2. Monat ein Drittel des noch ausstehenden Betrags und im 3. Monat 360 Euro. Nach diesen Rückzahlungen ist noch ein Achtel der ursprünglichen Schuld offen.
Berechne, wie viel sich Karin von Thomas ursprünglich ausgeliehen hat! *AG |2.2|*

2.43 Ein Kapital von 56.000 Euro bringt einen um 400 Euro höheren Jahreszins als ein Kapital von 58.000 Euro, das mit einem um $\frac{3}{4}$ % niedrigeren Prozentsatz als das erste Kapital verzinst wird.
Stelle die Gleichung zur Berechnung des ersten Prozentsatzes auf!
Berechne beide Prozentsätze! *AG |2.2|*

2.44 Aufgaben des deutschen Rechenmeisters **Adam Ries** (1492 – 1559): *AG |2.2|*

a) Jemand verspielt ein Drittel seines Gelds.
Er verbraucht 4 Gulden und verliert schließlich ein Viertel des Rests. Danach bleiben ihm noch 20 Gulden.
Berechne, wie viel er am Anfang gehabt hat!

b) Ein Kaufmann gewinnt ein Drittel seines Kapitals und 4 Gulden. Er legt alles an und gewinnt wieder ein Viertel davon. Insgesamt hat er jetzt 40 Gulden.
Berechne, wie viel er am Anfang hatte!

2.5 Bruchgleichungen

TE

2.45 Ermittle die Lösungsmenge der Gleichung $\frac{2x}{x-3} - \frac{2x-3}{x-2} = \frac{5x-9}{(x-2)\cdot(x-3)}$ in der Grundmenge $\mathbb{N}$!
Überprüfe mit Technologieeinsatz! AG |2.2|

Zunächst wird die Definitionsmenge bestimmt, wobei jene Elemente aus der Grundmenge ausgeschlossen werden, für die einer der Nenner null wird.

Der Nenner $x - 3$ darf nicht null sein, also $x - 3 \neq 0$.

$x - 3 \neq 0 \quad | + 3$
$x \neq 3$

Der Nenner $x - 2$ darf nicht null sein, also $x - 2 \neq 0$.

$x - 2 \neq 0 \quad | + 2$
$x \neq 2$

Der Nenner $(x - 2)\cdot(x - 3)$ darf nicht null sein, also $(x - 2)\cdot(x - 3) \neq 0$.

Dies ist gleichbedeutend mit $x - 2 \neq 0$ und $x - 3 \neq 0$, denn ein Produkt von Termen ist genau dann ungleich null, wenn jeder Term ungleich null ist.

Somit sind die Zahlen 2 und 3 auszuschließen:

$$D = \mathbb{N}\backslash\{2, 3\}$$

Nun wird ein schrittweises Vorgehen empfohlen:

Zunächst werden alle Nenner zerlegt (Faktorenzerlegung der Nenner).

Nenner:	Erweiterungsfaktor:	Erweiterter Zähler:
$x - 3$	$x - 2$	$2x\cdot(x - 2)$
$x - 2$	$x - 3$	$(2x - 3)\cdot(x - 3)$
$(x - 2)\cdot(x - 3)$	1	$5x - 9$
Hauptnenner: $(x - 2)\cdot(x - 3)$		

Dann wird die Gleichung mit dem Hauptnenner multipliziert.

$$\begin{aligned}
\frac{2x}{x-3} - \frac{2x-3}{x-2} &= \frac{5x-9}{(x-2)\cdot(x-3)} && |\cdot(x-2)\cdot(x-3)\\
2x\cdot(x-2) - (2x-3)\cdot(x-3) &= 5x - 9 && |\text{ Ausmultiplizieren}\\
2x^2 - 4x - 2x^2 + 6x + 3x - 9 &= 5x - 9 && |\text{ Summanden zusammenfassen}\\
5x - 9 &= 5x - 9 && | + 9\\
5x &= 5x && | - 5x\\
0 &= 0 && \text{wahre Aussage}
\end{aligned}$$

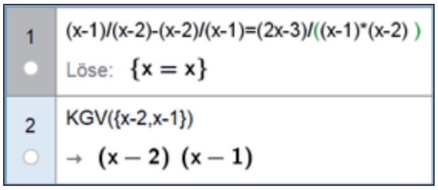
Die Gleichung $0 = 0$ stimmt für alle Elemente der Definitionsmenge, daher ist die Lösungsmenge gleich der Definitionsmenge; $L = D = \mathbb{N}\backslash\{2, 3\}$

Wenn in einer Gleichung die Variable (auch) in einem Nenner vorkommt, wird von einer Bruchgleichung gesprochen.

Beachte bei Bruchgleichungen stets die Definitionsmenge!

TE Überprüfung mit **Geogebra**:
Eingabe der Gleichung in CAS und Lösung mit dem Button $\boxed{x =}$ oder $\boxed{x \approx}$
Die Lösung $x = x$ bedeutet, dass alle in D liegenden x-Werte Lösungen sind.

Den Hauptnenner findet man mit der Eingabe **KGV (Liste von Polynomen)**; die Liste wird mit geschwungenen Klammern eingegeben.



2.46 Ermittle die Lösungsmenge der Gleichung $\frac{x}{4x+8} + \frac{5x}{6x+12} - \frac{1}{2} = 0$ in der Grundmenge $\mathbb{Q}$! *AG |2.2|*

Lösung:
Der Nenner $4x + 8$ darf nicht null sein, also $x \neq -2$.
Der Nenner $6x + 12$ darf nicht null sein, also $x \neq -2$.
Daher ist $D = \mathbb{Q}\setminus\{-2\}$.

Faktorenzerlegung der Nenner:

Nenner:	Erweiterungsfaktor:	Erweiterter Zähler:
$2^2\cdot(x+2)$	3	$3\cdot x$
$2\cdot3\cdot(x+2)$	2	$2\cdot5x$
2	$2\cdot3\cdot(x+2)$	$2\cdot3\cdot(x+2)$
Hauptnenner: $2^2\cdot3\cdot(x+2)$		

Die Gleichung wird mit dem Hauptnenner multipliziert.

$$\frac{x}{4x+8} + \frac{5x}{6x+12} - \frac{1}{2} = 0 \qquad |\cdot 2^2\cdot3\cdot(x+2)$$
$$3\cdot x + 2\cdot5x - 2\cdot3\cdot(x+2) = 0 \qquad |\text{ Ausmultiplizieren}$$
$$3x + 10x - 6x - 12 = 0 \qquad |\text{ Summanden zusammenfassen}$$
$$7x - 12 = 0 \qquad |+12$$
$$7x = 12 \qquad |:7$$
$$x = \frac{12}{7}$$
$$L = \left\{\frac{12}{7}\right\}$$

M **2.47** Kreuze jene beiden Gleichungen an, die Bruchgleichungen sind! *AG |2.2|*

$\frac{7+3x}{5} = 3$	☐
$\frac{8}{9} + \frac{x}{2} = -3$	☐
$\frac{2+5x}{x+8} = \frac{1}{2}$	☐
$\frac{1}{x} + 7 = \frac{1}{2x}$	☐
$\frac{x}{2} - \frac{x-2}{7} = \frac{1}{9}$	☐

M **2.48** Ordne jeder Gleichung jeweils eine Zahl aus A bis F zu, die für die Variable ausgeschlossen werden muss! *AG |2.2|*

$\frac{3x-1}{x+1} = \frac{4-3x}{1-x}$	
$\frac{1}{y} + \frac{1}{2y} - \frac{1}{5y} = \frac{1}{3}$	
$\frac{3x+2}{4} = x - \frac{1}{2}$	
$\frac{x+3}{x-1} = \frac{x-1}{4}$	

A	nur die Zahl -1
B	nur die Zahl 1
C	nur die beiden Zahlen -1 und 1
D	nur die Zahl 0
E	keine Zahl
F	nur die Zahlen 0, 2 und 5

2.49 Ermittle die Faktorenzerlegung der einzelnen Nenner, bilde danach den Hauptnenner und ermittle die jeweiligen Erweiterungsfaktoren! *AG |2.2|*

	Nenner 1	Nenner 2	Nenner 3
a)	$35a + 7$	$3a - 9$	$15a - 3$
b)	$a^2 - 4b^2$	$a - 2b$	$a + 2b$
c)	$a^2 - ax$	$ax - a^2$	$a - x$
d)	$x^2 - y^2$	$x + y$	$x^2 + 2xy + y^2$
e)	$x - 7$	x	$7x$
f)	$3x + 4$	$9x^2 - 16$	$9x$

2.50 Ermittle die Definitions- und Lösungsmenge der Bruchgleichungen in der Grundmenge $\mathbb{Q}$! *AG |2.2|*

a) $\frac{1}{x-1} = 5$
b) $\frac{2x-3}{4x-1} = \frac{1}{2}$
c) $\frac{4\cdot(3x-4)}{5\cdot(x-2)} = \frac{8}{5}$
d) $\frac{4x-1}{x-3} = \frac{1}{8}$
e) $\frac{9x-7}{12x-3} = \frac{2}{9}$
f) $\frac{1}{x} + \frac{1}{6x} + \frac{1}{4x} = 1$

2.51 Ermittle die Definitions- und Lösungsmenge der Bruchgleichungen in der Grundmenge der rationalen Zahlen! *AG |2.2|*

a) $\frac{12}{3x+4} - \frac{12}{6x+8} = \frac{30}{12x-5}$
b) $\frac{x-3}{x-4} = 4 - \frac{x-5}{x-4}$
c) $\frac{11}{x+2} - 3 = \frac{2}{x+2}$
d) $\frac{4x+5}{x+1} = 2 - \frac{x}{x+1}$
e) $\frac{1}{x^2-1} + \frac{2}{x^2-x} = \frac{3}{4x^2+4x}$
f) $\frac{14-2x}{1-2x} - \frac{9+x}{2x-1} = 3$

2.52 Ermittle die Definitions- und Lösungsmenge der Bruchgleichungen in der Grundmenge $\mathbb{Q}$! *AG |2.2|*

a) $\frac{x}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$
b) $\frac{2x}{x+3} + 1 = \frac{5}{x+3}$
c) $\frac{3x+4}{x-4} - 1 = \frac{2}{x-4}$
d) $\frac{x}{x-2} = \frac{2}{x-2}$
e) $\frac{5}{x+3} + \frac{1}{x-1} - \frac{6}{x-1} = 0$
f) $\frac{x}{x-2} - \frac{x-2}{x-3} = \frac{2}{5x-x^2-6}$

2.53 Addiert man zu Zähler und Nenner des Bruches $\frac{5}{8}$ jeweils dieselbe Zahl, so erhält man einen Bruch mit dem Wert $\frac{4}{5}$.
Berechne die Zahl! *AG |2.2|*

2.54 Ermittle die Definitions- und Lösungsmenge der Bruchgleichung in der Grundmenge $\mathbb{Q}$! *AG |2.2|*

a) $\frac{3x+1}{(x-2)^2} = \frac{5}{x+2} - \frac{2x+5}{x^2-4}$ b) $\frac{9}{(x+4)^2} = \frac{2}{x-4} - \frac{2x+7}{x^2-16}$

c) $\frac{x}{x^2-6x+9} - \frac{1}{x^2-3x} = \frac{1}{x}$ d) $\frac{2x+1}{5x-5} - \frac{x+2}{4x-4} + \frac{11x-18}{3x-3} = 1$

e) $\frac{x+1}{x-1} = \frac{7x-5}{(x-1)\cdot(2x-1)} + 1$ f) $\frac{6x+4}{2x-2} - \frac{6x^2+2}{2x^2-2} = \frac{5x+9}{x\cdot(x+1)}$

2.55 Löse die Gleichung in der Grundmenge $\mathbb{Q}$ und gib die Definitionsmenge an! *AG |2.2|*

a) $\frac{3v}{\frac{v}{4}+6} - 4 = 0$ b) $\frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{5}\cdot f} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{5}f+\frac{3}{2}}$

c) $\frac{\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}+1} - 2\cdot\frac{\frac{1}{1+x}}{\frac{1}{1-x}} + \frac{1}{6} = 0$ d) $\frac{1+\frac{2}{z}}{1-\frac{2}{z}} - \frac{\frac{1}{z-3}-1}{\frac{1}{z-3}+1} = 3$

2.56 Thomas versucht, die Gleichung $\frac{2}{x} + 4 = \frac{3x+2}{x}$ zu lösen. *AG |2.2|*
Er rechnet:

$$\frac{2}{x} + 4 = \frac{3x+2}{x} \qquad |\cdot x$$
$$2 + 4x = 3x + 2 \qquad |-2-3x$$
$$x = 0$$

Er schreibt, dass die Zahl 0 die Lösung der Gleichung ist.
Begründe, ob dies richtig ist!

2.57 Ermittle die Definitions- und die Lösungsmenge der folgenden Gleichung in der Grundmenge $\mathbb{R}$ in Abhängigkeit vom **Parameter** $a \in \mathbb{R}$!
a ist eine beliebige reelle Zahl ungleich 0. *AG |2.2|*

$$\frac{x^2+a^2}{x^2-ax} - \frac{a^2+1}{ax-a^2} = 1$$

Lösung:
Gemeinsamer Nenner: $a\cdot x\cdot(x-a)$; $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0; x \neq a\}$
Mit dem gemeinsamen Nenner wird die Gleichung multipliziert:
$(x^2+a^2)\cdot a - (a^2+1)\cdot x = a\cdot x\cdot(x-a)$
Ausmultiplizieren: $ax^2 + a^3 - a^2x - x = ax^2 - a^2x$
Ordnen und zusammenfassen: $x = a^3$ und $L = \{a^3\}$

2.58 Bestimme die Definitions- und Lösungsmenge der Bruchgleichung in der Grundmenge $\mathbb{R}$ in Abhängigkeit der Parameter $a, b \in \mathbb{R}$! *AG |2.2|*

a) $\frac{3x+a}{3x-1} = \frac{x+1}{x-a}$ b) $x + \frac{1}{a} = \frac{1}{a-1}$

c) $\frac{x-a}{x+a} + \frac{x+a}{x-a} = 2$ d) $\frac{a+1}{2x+a} + \frac{a-2}{2x-a} = \frac{4a^2-5a}{4x^2-a^2}$

e) $\frac{a+x}{b-x} - \frac{b-x}{a+x} = \frac{2a^2-2b^2}{ab-ax+bx-x^2}$ f) $\frac{a-bx}{ax-a} - \frac{x+1}{x-1} = 1$

2.6 Verhältnisse und Proportionen

2.59 Ein Fußgänger legt in einer Stunde 4 km zurück und ein Kleinmotorrad 60 km. Ermittle, in welchem Verhältnis die zurückgelegten Wege zueinander stehen! Berechne den Proportionalitätsfaktor! *AG |2.2|*

Um die beiden Wege vergleichen zu können, wird der Quotient (Verhältnis) des Wegs des Kleinmotorrads s_1 und des Wegs des Fußgängers s_2 gebildet, also $\frac{s_1}{s_2} = \frac{60\text{ km}}{4\text{ km}} = 15$.

Dies bedeutet, dass pro Stunde der Weg des Kleinmotorrads 15-mal größer als der Weg des Fußgängers ist. In der Gleichung $\frac{s_1}{s_2} = \frac{60}{4}$ steht sowohl auf der linken als auch auf der rechten Seite ein Verhältnis.

Wird der jeweilige Bruchstrich durch Divisionspunkte ersetzt, so ergibt sich $s_1 : s_2 = 60 : 4$; gesprochen s_1 verhält sich zu s_2 wie 60 zu 4.

Vorteilhaft kann es sein, eine Proportion in Form von zwei Gleichungen zu schreiben: Man erhält die Glieder der einen Seite einer Proportion, wenn man die Glieder der anderen Seite mit einem bestimmten Faktor k ungleich null – dem **Proportionalitätsfaktor** – multipliziert.

$$a : b = c : d \ \Leftrightarrow \ a = k \cdot c \ \text{ und } \ b = k \cdot d$$

Es ergibt sich daher:
$s_1 : s_2 = 60 : 4 = 15 : 1 \ \Leftrightarrow \ s_1 = 15 \cdot k$ und $s_2 = 1 \cdot k$ mit $k = 4$.

Eine Gleichung der Gestalt $a : b = c : d$ (gesprochen: a verhält sich zu b wie c zu d) mit $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, $d \neq 0$ wird **Verhältnisgleichung oder Proportion** genannt.

Werden mehr als zwei Verhältnisse miteinander verbunden, so wird von einer **fortlaufenden Proportion** $a : b : c = x : y : z$ gesprochen.

Zwei veränderliche Größen x und y sind zueinander **direkt proportional**, wenn ihr Quotient $y : x$ einen festen positiven Wert k hat.

Zwei veränderliche Größen x und y sind zueinander **indirekt proportional**, wenn ihr Produkt $x \cdot y$ einen festen positiven Wert k hat.

Bei einem direkten Verhältnis gilt also insbesondere: „Je mehr ..., desto mehr ...“ beziehungsweise „Je weniger ..., desto weniger ...“.

Bei einem indirekten Verhältnis gilt also insbesondere: „Je mehr ..., desto weniger ...“ beziehungsweise „Je weniger ..., desto mehr ...“.

2.60 Gegeben ist eine fortlaufende Proportion $x : y : z = 1 : 2 : 3$ und die Gleichung $3x - y + 5z = 32$.
Berechne die Zahlen x, y und z derart, dass sie sowohl die Proportion als auch die Gleichung erfüllen! *AG |2.2|*

Lösung:

Mithilfe des Proportionalitätsfaktors k ergibt sich:
$x = k$, $y = 2k$, $z = 3k$

In die Gleichung $3x - y + 5z = 32$ eingesetzt:
$3k - 2k + 15k = 32$; daher ist $k = 2$.

Für die Variablen x, y, z erhalten wir: $x = 2$, $y = 4$ und $z = 6$.

2.61 Bei einer Proportion $a : b = c : d$ werden a und d als Außenglieder und b und c als Innenglieder bezeichnet.
Zeige, dass das Produkt der Außenglieder gleich dem Produkt der Innenglieder ist!
($a \cdot d = b \cdot c$) *AG |2.2|*

2.62 Entscheide, ob die zwei Größen x und y direkt oder indirekt proportional sind!
Es besteht auch die Möglichkeit, dass es sich weder um ein direktes noch um ein indirektes Verhältnis handelt. *AG |2.2|*

x	y	direkt	indirekt	weder noch
Wegstrecke	Benzinverbrauch			
Fiebertemperatur	Uhrzeit			
Gasverbrauch	Rechnungsbetrag			
Arbeitsstunden	Lohn			
Schülerzahl	Busfahrtkosten pro Schüler			
Fülldauer	Pumpenleistung			

M **2.63** Bei den folgenden Aussagen ist genau eine richtig. Kreuze diese richtige an! *AG |2.2|*

Je älter eine Person ist, desto schwerer ist sie.	☐
Je mehr Musiker in einem Orchester spielen, desto länger dauert die Aufführung.	☐
Je größer die Anzahl der Tiere, desto höher der Futterverbrauch.	☐
Je mehr Geld man verdient, desto glücklicher ist man.	☐
Je größer die zu streichende Fläche ist, desto weniger Farbe wird benötigt.	☐
Die Zeit, die für eine Prüfung gelernt wird, verändert die Note, die man erhält.	☐

M **2.64** Kreuze die beiden richtigen Aussagen an! *AG |2.2|*

In der Aussageform $\frac{1}{3}y = x$ ist die Größe y zur Größe x indirekt proportional.	☐
In der Aussageform $2y = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x}$ ist die Größe y zur Größe x direkt proportional.	☐
Die Produktgleichung der Proportion $x : 2 = 5 : y$ lautet: $x \cdot 5 = y \cdot 2$	☐
Die Innenglieder einer Proportion dürfen vertauscht werden: $a : b = c : d \iff a : c = b : d$	☐
Die Innenglieder einer Proportion dürfen gegen die Außenglieder vertauscht werden: $a : b = c : d \iff b : a = d : c$	☐

2.65 Bestimme den Wert der einzelnen Variablen so, dass das Verhältnis gleich 9 : 4 ist! *AG |2.2|*

a) $18 : a$
b) $b : 8$
c) $1 : c$
d) $d : 1$
e) $4{,}5 : x$
f) $y : 2{,}5$

2.66 Begründe die folgende Rechenregel:
Innen- und Außenglied einer Proportion darf mit der gleichen Zahl f multipliziert oder durch die gleiche Zahl f dividiert werden ($f \neq 0$). *AG |2.2|*

2.67 Löse die folgenden Aufgaben in der Grundmenge $\mathbb{Q}$!
Gib die Definitionsmenge an! *AG |2.2|*

a) $4 : 9 = x : 27$
b) $y : 6 = 27 : 18$
c) $10 : 5 = 4 : z$
d) $39 : 6 = x : 11$
e) $59 : 100 = 12 : x$
f) $25{,}5 : 19{,}25 = 12 : x$

2.68 Gegeben ist die Gleichung $(1 - a) \cdot x = b - 2$ in der Grundmenge $\mathbb{R}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. *AG |2.2|*

a) Löse die Gleichung nach x!
b) Beurteile, welche Beziehung zwischen a und b besteht, falls $x = 2$ die Lösung ist!

2.69 Aus einer Teigmenge kann ein Bäcker 120 Brote zu je $2\frac{1}{2}$ kg formen.
Er möchte $1\frac{1}{2}$-kg-Brote aus derselben Teigmenge herstellen.
Erstelle eine passende Proportion!
Berechne, wie viele Brote erzeugt werden können! *AG |2.2|*

2.70 Wenn Herr Adam mit 60 km/h Durchschnittsgeschwindigkeit fährt, legt er eine bestimmte Strecke in 4 Stunden zurück.
Berechne, wie lange er braucht, wenn er mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 80 km/h fährt! *AG |2.2|*

2.71 Zwei Zahlen x und y verhalten sich wie 4 : 9.
Berechne x und y, wenn zusätzlich bekannt ist, dass ... *AG |2.2|*

a) die größere der beiden Zahlen 985 ist!
b) die kleinere der beiden Zahlen 985 ist!
c) die Summe der beiden Zahlen 988 beträgt!
d) die Differenz der beiden Zahlen 985 ist!

2.72 Löse die folgenden Proportionen in der Grundmenge $\mathbb{R}$ nach x auf!
Gib die Definitionsmenge an! *AG |2.2|*

a) $\frac{7a}{3b} : \frac{6a^2}{21c} = \frac{8c^2}{ab} : x$
b) $2a^2x : (-a)^3 = 2a : a$
c) $\frac{3}{4} : \frac{x}{2} = \frac{3a}{5} : \frac{a}{0{,}5}$
d) $\frac{x}{2a} : b = \frac{1}{a} : 2$
e) $\frac{3a}{10b} : \frac{25b^2}{50} = \frac{9ab}{5c} : x$
f) $\frac{1}{a} : \frac{1}{b} = x : \frac{1}{ab}$

2.73 4 Schokoladeschirmchen kosten 1,60 Euro. Eine Großpackung mit 60 Stück wird um 28 Euro angeboten.
Argumentiere mithilfe einer Berechnng, ob es sich lohnt, die Großpackung zu kaufen! *AG |2.2|*

2.74 Eine Rechnung von 3.000 Euro soll auf drei Personen im Verhältnis 4 : 5 : 7 aufgeteilt werden.
Berechne, wie viel jede Person zahlen muss! *AG |2.2|*

2.75 Drei Teesorten werden im Verhältnis 2 : 5 : 6 gemischt. Insgesamt sollen 49 kg Tee hergestellt werden.
Berechne, wie viel Kilogramm Tee von jeder Sorte zu nehmen sind! *AG |2.2|*

2.76 Eine Wandfläche von 98,80 m^2 soll mit zwei Tapeten, uni und gemustert, im Verhältnis 3 : 5 ausgestattet werden.
Berechne, wie viele Quadratmeter Tapeten von jeder Sorte verarbeitet werden! *AG |2.2|*

2.77 Das Mischungsverhältnis von Kalk und Sand bei Kalkmörtel beträgt 2 : 6.
Berechne, wie viele m^3 Sand benötigt werden, um damit 10 m^3 Kalkmörtel herzustellen! *AG |2.2|*

2.78 Zum Glockenturm einer Kirche führen 68 Stufen mit einer Höhe von je 14 cm. Bei einem geplanten Umbau sollen die Stufen eine Höhe von 17 cm erhalten.
Berechne die Anzahl der Stufen nach dem geplanten Umbau! *AG |2.2|*

2.79 Eine Gruppe von 24 Personen muss für eine Ausstellung 180 Euro Eintritt zahlen. Drei Personen werden krank.
Berechne, wie viel der Eintritt für den Rest der Gruppe beträgt! *AG |2.2|*

2.80 Bilde aus den Proportionen fortlaufende Proportionen! *AG |2.2|*

a) $a : b = 3 : 2$ und $b : c = 1 : 3$
b) $a : b = 3 : 1$ und $b : c = 3 : 7$
c) $a : b = 3 : 8$ und $c : b = 2 : 7$
d) $a : b = 3 : 2$ und $a : c = 6 : 7$
e) $a : b = \frac{1}{3} : 2$ und $c : b = \frac{1}{2} : 3$
f) $a : b = 3 : \frac{1}{2}$ und $c : a = \frac{1}{7} : 5$

2.81 Berechne, welche Zahlen für die Variablen x, y und z eingesetzt werden können, damit die Proportion und die Gleichung erfüllt werden! *AG |2.2|*

a) $x : y : z = 2 : 1 : 1$ und $3x + 2y - 2z = 6$
b) $x : y : z = 5 : 1 : 7$ und $2x + 3y + 2z = 81$
c) $2x : 3y : z = 8 : 15 : 6$ und $5x - 6y + 3z = 24$
d) $3x : y : z = 3 : 2 : 3$ und $3x + 2y - z = 12$

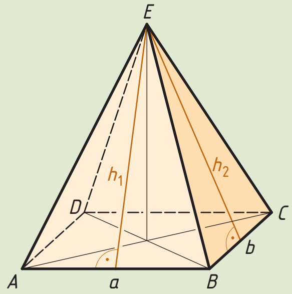
2.7 Umformen von Formeln

2.82 Forme die Formel für die Berechnung der Oberfläche einer Pyramide mit rechteckiger Grundfläche nach *b* um:

$O = a \cdot b + a \cdot h_1 + b \cdot h_2$

$b =$ ______________________

AG |2.2|



b ist in diesem Beispiel Gleichungsvariable.

Die gesuchte Größe *b* tritt zweimal auf.

Es sind alle *b* auf eine Seite zu bringen. Anschließend ist *b* herauszuheben:

$$\begin{aligned} O &= a \cdot b + a \cdot h_1 + b \cdot h_2 && \mid -a \cdot h_1 \\ O - a \cdot h_1 &= a \cdot b + b \cdot h_2 && \mid \text{Faktorisieren (} b \text{ herausheben)} \\ O - a \cdot h_1 &= b \cdot (a + h_2) && \mid : (a + h_2) \\ b &= \frac{O - a \cdot h_1}{a + h_2} \end{aligned}$$

Die Variable, nach der die Gleichung aufzulösen ist, heißt **Gleichungsvariable.** Alle Variablen, die nicht Gleichungsvariable sind, werden wie bestimmte, feste Zahlenwerte behandelt und als **Formvariable** bezeichnet.

Um eine Formel nach einer Variablen umzuformen, gibt es im Allgemeinen mehrere Lösungswege. Hilfreich ist es jedoch, die folgenden Punkte nach dieser Reihenfolge zu beachten:

1. Falls die gesuchte Variable im Nenner eines Bruchs vorkommt, beseitigt man diesen Bruch durch geeignete Multiplikation beider Seiten.
2. Produkte, in denen die Variable vorkommt, werden ausmultipliziert.
3. Alle Summanden, in denen die Variable vorkommt, werden auf eine Seite gebracht.
4. Falls die gesuchte Variable in mehreren Summanden vorkommt, wird die Variable herausgehoben.
5. Dividieren, sodass die gesuchte Variable zuletzt allein auf einer Seite steht.

TE

2.83 Berechne aus der Formel für die Steighöhe $h = v_0 \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2$ beim lotrechten Wurf nach oben die Anfangsgeschwindigkeit v_0!
Überprüfe mit Technologieeinsatz!

$v_0 =$ ______________________

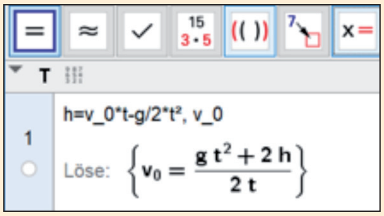
AG |2.2|

Lösung:

$$\begin{aligned} h &= v_0 \cdot t - \tfrac{g}{2} \cdot t^2 && \mid \cdot 2 \\ 2 \cdot h &= 2 \cdot v_0 \cdot t - g \cdot t^2 && \mid + g \cdot t^2 \\ 2 \cdot h + g \cdot t^2 &= 2 \cdot v_0 \cdot t && \mid : (2 \cdot t) \\ v_0 &= \frac{2h + g \cdot t^2}{2t} \end{aligned}$$

TE

Technologieeinsatz beim Umformen von Formeln
zB **Geogebra**
Eingabe der Formel,
Beistrich, gewünschte Variable
und Taste $\boxed{x=}$ drücken.



2.84 Drücke die gesuchte Variable a jeweils durch die übrigen Variablen der Gleichung aus! Es sollen keine Doppelbrüche entstehen.
Zu welchen geometrischen Figuren passen die Formeln jeweils?
Erkläre, was damit berechnet werden kann! *AG |2.2|*

a) $a^2 + b^2 = c^2$ b) $A = \frac{a \cdot h_a}{2}$

c) $u = 2 \cdot (a + b)$ d) $A = \frac{a + c}{2} \cdot h$

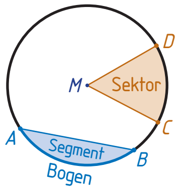
e) $a \cdot h_a = \frac{e \cdot f}{2}$ f) $A = a^2$

2.85 Drücke die gesuchte Variable r durch die übrigen Variablen der Gleichung aus! *AG |2.2|*

a) Umfang des Kreises $u = 2 \cdot \pi \cdot r$

b) Fläche des Kreissektors $A = \frac{\pi}{360°} \cdot a \cdot r^2$

c) Bogenlänge des Kreissektors $b = \frac{\pi}{180°} \cdot a \cdot r$



M **2.86** Die folgenden Formeln beziehen sich jeweils auf die Oberflächeninhalte von Körpern (Stereometrie). Berechne die gesuchte Variable! *AG |2.2|*

a) Quader $O = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot h + b \cdot h)$ $a =$ ____________

b) Zylinder $O = 2 \cdot r^2 \cdot \pi + 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h$ $h =$ ____________

c) Kegel $O = (r + s) \cdot r \cdot \pi$ $s =$ ____________

d) Kugel $O = 4 \cdot r^2 \cdot \pi$ $r =$ ____________

M **2.87** Die folgenden Formeln beziehen sich jeweils auf das Volumen von Körpern (Stereometrie). Berechne die gesuchte Variable! *AG |2.2|*

a) Quader $V = a \cdot b \cdot c$ $c =$ ____________

b) Zylinder $V = \frac{d^2}{4} \cdot \pi \cdot h$ $d =$ ____________

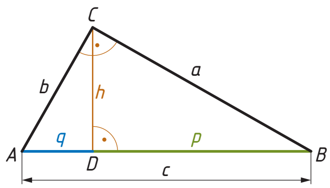
c) Kegel $V = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot h}{3}$ $h =$ ____________

d) Kugel $V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi$ $r =$ ____________

M **2.88** Drücke die gesuchte Variable durch die übrigen Variablen der Gleichung aus! *AG |2.2|*

a) Kathetensatz
$a^2 = c \cdot p$ $a =$ ____________

b) Höhensatz
$h^2 = p \cdot q$ $p =$ ____________



M **2.89** Die Formel beschreibt die Geschwindigkeit v bei einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung, die t Zeiteinheiten andauert.
Berechne die Beschleunigung a!
Geschwindigkeit $v = v_0 + a \cdot t$

$a =$ ____________________

Beschreibe, wie sich v verändert, wenn man in dieser Formel den Wert der Anfangsgeschwindigkeit v_0 verringert und die Werte der anderen Variablen gleich bleiben! *AG |2.2|*

M **2.90** Die Formel beschreibt den in der Zeitdauer t zurückgelegten Weg bei einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung.
Berechne die Beschleunigung a!
Weg $s = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2$

$a =$ ____________________

Beschreibe, wie sich s verändert, wenn man den Wert der Anfangsgeschwindigkeit v_0 vergrößert und die Werte der anderen Variablen gleich bleiben! *AG |2.2|*

M **2.91** Bei der einfachen Verzinsung ergibt sich das Endkapital K_n aus dem Anfangskapital K_0, der Gesamtlaufzeit n in Jahren und dem Zinssatz i pro Jahr mit:

$$K_n = K_0 \cdot (1 + i \cdot n)$$

AG |2.2|

a) Forme nach der Variablen i um!

$i =$ ____________________

Interpretiere, wie sich bei sonst gleichbleibenden Variablen der Wert von K_n verändert, wenn man i verdoppelt!

b) Forme nach der Laufzeit n um!

$n =$ ____________________

Interpretiere, wie sich bei sonst gleichbleibenden Variablen der Wert von K_n verändert, wenn man die Laufzeit halbiert!

M **2.92** Die Formel, mit der die mechanische Energie E eines Körpers beschrieben wird, lautet:

$$E = mgh + \frac{mv^2}{2}$$

Argumentiere, ob die Energie E einer doppelt so großen Masse m ebenfalls doppelt so hoch wäre!

Forme nach der Variablen m um!

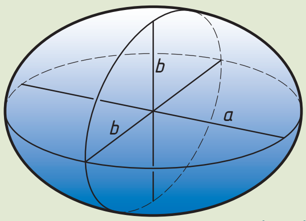
$m =$ ____________________

Forme nach der Variablen v um!

$v =$ ____________________ *AG |2.2|*

Beachte: Bei der Berechnung von Größen in einer Formel müssen die Maßeinheiten unbedingt berücksichtigt werden!

2.93 Das Volumen V des dargestellten geometrischen Körpers lässt sich mit der Formel
$V = \frac{4\pi \cdot a \cdot b^2}{3}$
beschreiben und beträgt 26 632 mm³.
Berechne die Länge der Halbachse a für $b = 1{,}7$ cm!



AG |2.2|

Zunächst müssen alle Größen auf dieselbe Maßeinheit gebracht werden: Hier ist günstig, b in mm umzuwandeln. (Alternativ könnte man auch V in cm^3 umwandeln.)

b = 17 mm wird in die Formel eingesetzt: $26\,632 = \frac{4\pi \cdot a \cdot 17^2}{3}$

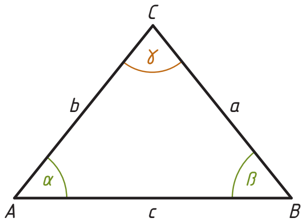
Wir erhalten nach Auflösung der Gleichung: $a = 21{,}999... \approx 22$ mm

Werden Größen mit einer bestimmten Maßeinheit mithilfe einer Formel berechnet, so sind vor der Berechnung alle in der Formel enthaltenen Größen auf dieselbe Maßeinheit umzuwandeln.

M **2.94** Kreuze das richtige Ergebnis für die Diagonale d eines Rechtecks mit a = 3 cm und b = 8 mm an! (Der Wert ist auf 2 Nachkommstellen gerundet.) AG |2.2|

d = 9,22 mm	☐	d = 9,22 cm	☐	d = 92,2 dm	☐
d = 3,10 mm	☐	d = 3,10 cm	☐	d = 31 dm	☐

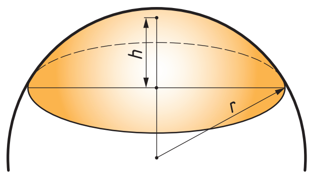
2.95 Der Flächeninhalt A eines gleichschenkeligen Dreiecks ist gegeben durch $A = \frac{c}{4} \cdot \sqrt{4 \cdot a^2 - c^2}$ und beträgt $A = 60\ dm^2$.
Die Seite c = 240 cm.



Berechne die Seite a!

Interpretiere die Formel hinsichtlich der folgenden Fragen zum gleichschenkeligen Dreieck:
- Wenn man die Seite a verdreifacht, die Seite c gleich lässt, verdreifacht sich dann auch die Fläche?
- Hat eine doppelt so große Fläche auch doppelt so lange Seiten? AG |2.2|

2.96 Das Volumen V eines Kugelabschnitts ist gegeben durch $V = \pi \cdot h^2 \cdot \left(r - \frac{h}{3}\right)$ und beträgt $3{,}5\ m^3$.
Die Höhe h = 150 cm.

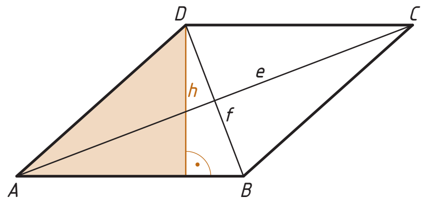


Berechne den Kugelradius r!

Interpretiere die Formel hinsichtlich der folgenden Fragen zum Kugelabschnitt:
- Wenn man den Kugelradius r bei gleichbleibender Höhe h halbiert, wird dann auch das Volumen halbiert?
- Wenn man bei gleichbleibendem Volumen V die Höhe h halbiert, verdoppelt sich dadurch der Kugelradius r? AG |2.2|

2.97 Die Höhe einer Raute h ist gegeben durch
$h = \frac{e \cdot f}{\sqrt{e^2 + f^2}}$
mit h = 35 mm und f = 7 cm.

Berechne die Diagonale e! AG |2.2|



2.8 Anwendungsorientierte Aufgaben

2.8.1 Aufgaben aus Alltag und Geldwesen

2.98 Gabi besitzt drei verschiedene Bankkonten. Insgesamt hat sie 10.450 Euro angespart. Dieses Geld ist auf den drei Konten verteilt. Auf dem ersten Konto A befinden sich 614 Euro mehr als auf dem Konto B. Auf Konto C befinden sich 2.164 Euro weniger als auf Konto B.
Berechne, wie viel Geld sich auf jedem der drei Konten befindet! *AG |2.2|*

M **2.99** Nach Abzug von 1,5 % Skonto werden 14.282,50 Euro bezahlt.
Kreuze den richtigen Rechnungsbetrag in Euro vor dem Skontoabzug an!

14.496,74	☐	14.500,00	☐	15.000,00	☐
14.550,50	☐	14.300,00	☐	14.068,26	☐

AG |2.2|

2.100 Karin lädt ihre vier Freundinnen zum Geburtstag ins Kino ein. Sie zahlt die Eintrittskarten und kauft noch für alle zusammen eine Packung Popcorn für 3,50 Euro.

a) Stelle eine lineare Gleichung auf, mit der die Kosten pro Eintrittskarte bestimmt werden können, wenn Karin in Summe 27,50 Euro ausgegeben hat!
b) Berechne, wie viel eine einzelne Eintrittskarte kostet! *AG |2.2|*

2.101 Frau Gudrin ist in einem Klub, bei dem sie DVDs 15 % günstiger einkaufen kann. Ihr Jahresbeitrag im Klub beträgt 45 Euro. Die Mitgliedschaft soll sich lohnen. *AG |2.2|*

a) Berechne, für welchen Betrag sie DVDs kaufen muss!
b) Argumentiere, warum beim Kauf von 10 DVDs noch keine Aussage getroffen werden kann, ob sich die Mitgliedschaft lohnt!

2.102 Für eine Theateraufführung zahlen begleitende Lehrkräfte den doppelten Preis wie Kinder. Eine Schule fährt mit zwei Klassen ins Theater. Die eine Klasse besucht die Vorstellung mit 22 Kindern und einem Lehrer, die andere Klasse mit 26 Kindern und 2 Lehrern. Insgesamt müssen 216 Euro bezahlt werden.
Berechne, wie teuer die Karte für ein Kind beziehungsweise für eine begleitende Lehrkraft ist! *AG |2.2|*

2.103 Ein Einzelhändler verkauft ein Elektrogerät um 1.620 Euro.
Ermittle den Selbstkostenpreis des Erzeugers, wenn der Erzeuger 25 %, der Großhändler 20 % und der Einzelhändler 20 % zum jeweiligen Selbstkostenpreis dazugeschlagen hat! *AG |2.2|*

2.104 Der Preis eines Autos stieg um 10 % und sank dann wieder um 10 % und beträgt nun 9.504 Euro.
Stelle eine lineare Gleichung auf, um den ursprünglichen Preis zu ermitteln! *AG |2.2|*

2.105 Ein Teil eines Kapitals von 70.350 Euro ist zu 6 % angelegt, der andere zu 5 %.
Der Jahreszins des gesamten Kapitals beträgt 4.100 Euro.
Berechne, wie groß die einzelnen Kapitalanteile sind! *AG |2.2|*

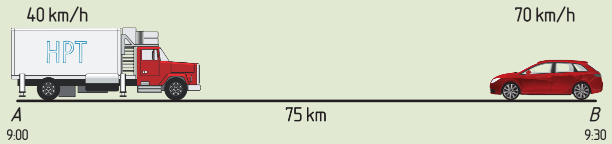
2.106 Peter legt seinen Totogewinn auf einem Bankkonto an. Nach genau einem Jahr zahlt er zusätzlich 350 Euro ein. Nach genau einem weiteren Jahr kann er 4.266,50 Euro abheben. Er erhält im 1. Jahr 5 % und im 2. Jahr 6 % Zinsen.
Berechne die Höhe des Totogewinns! *AG |2.2|*

2.8.2 Bewegungsaufgaben

TE

2.107 Ein LKW fährt mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von 40 km/h um 9 Uhr vom Ort A zum 75 km entfernten Ort B ab. Eine halbe Stunde später fährt ein PKW mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von 70 km/h von B in Richtung A ab.

AG |2.2|



a) Berechne, zu welchem Zeitpunkt der PKW und der LKW einander begegnen! Kontrolliere mit Technologieeinsatz!
b) Ermittle, in welcher Entfernung von A sich der PKW und der LKW begegnen!

Auf längeren Fahrten ändert sich die Geschwindigkeit eines Fahrzeugs ständig, auf gerader Strecke eventuell schneller, Kurven dagegen müssen langsamer durchfahren werden und an Ampeln muss eventuell gestoppt werden. Bewegt sich ein Körper nicht gleichförmig, dann wird der Quotient aus der seit dem Beginn der Bewegung zurückgelegten Strecke s und der seit Beginn der Bewegung verstrichenen Zeit t als durchschnittliche Geschwindigkeit v der Bewegung angesehen.
Manchmal wird diese durchschnittliche Geschwindigkeit nur während eines kurzen Zeitintervalls auf der Strecke bestimmt, dann spricht man von der mittleren Geschwindigkeit in diesem Intervall.

Nicht gleichförmige Bewegung eines Objekts:
durchschnittliche (mittlere) Geschwindigkeit $v = \frac{s}{t}$, Maßeinheit meist m/s oder km/h

a) Ist t die Fahrzeit des LKWs in Stunden, so ergibt sich die folgende Tabelle:

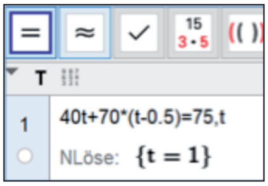
	Geschwindigkeit in km/h	Zeit in Stunden	Weg in Kilometer
LKW	40	t	$40 \cdot t$
PKW	70	$t - 0{,}5$	$70 \cdot (t - 0{,}5)$

Der Weg des LKWs und der Weg des PKWs zusammen müssen 75 km (die gesamte Entfernung) ergeben:

$$\begin{aligned}
40 \cdot t + 70 \cdot (t - 0{,}5) &= 75 && \mid \text{Ausmultiplizieren}\\
40 \cdot t + 70 \cdot t - 35 &= 75 && \mid \text{Summanden zusammenfassen}\\
110 \cdot t - 35 &= 75 && \mid +35\\
110 \cdot t &= 110 && \mid :110\\
t &= 1
\end{aligned}$$

TE

Der LWK fährt um 9 Uhr weg und benötigt 1 Stunde, um den PKW zu begegnen. Es ist daher 10 Uhr.
Kontrolle durch Gleichungslösen mit **Geogebra**:
Eingabe der Gleichung im CAS, Taste $\boxed{x \approx}$ drücken.



b) Die Entfernung von A wird durch die Strecke des LKWs wiedergegeben, diese ist: $40 \cdot t = 40 \cdot 1 = 40$ km.
Beachte jeweils die Verwendung der gleichen Einheiten! In diesem Beispiel wurde mit Kilometern und Stunden gearbeitet. 0,5 Stunden entspricht einer halben Stunde.

Bei Bewegungsaufgaben mit 2 Fahrzeugen lassen sich drei Aufgabentypen unterscheiden.

1. Zwei Fahrzeuge fahren von verschiedenen Ausgangspunkten einander entgegen. Die Abfahrt kann gleichzeitig oder nacheinander mit verschiedener oder gleicher durchschnittlicher Geschwindigkeit erfolgen. Dabei gilt stets, dass der **Gesamtweg** gleich der Summe der Einzelwege der beiden Fahrzeuge ist.
2. Zwei Fahrzeuge fahren von verschiedenen Ausgangspunkten in gleicher Richtung mit verschiedenen durchschnittlichen Geschwindigkeiten. Dabei können bei gleichzeitiger oder nicht gleichzeitiger Abfahrt die **entsprechenden Wege bis zum Treffpunkt** gleichgesetzt werden.
3. Zwei Fahrzeuge fahren vom gleichen Ausgangspunkt in gleicher Richtung mit verschiedenen durchschnittlichen Geschwindigkeiten und ungleichen Abfahrtszeiten. Dabei sind stets **die Wege bis zum Treffpunkt** dieselben.

2.108 Zwischen Blitz und Donner vergehen 14 Sekunden.
Berechne, wie weit ein Gewitter noch entfernt ist!
Für die Schallgeschwindigkeit kann mit 340 m/s gerechnet werden. *AG |2.2|*

Lösung:
Gesucht ist die Strecke $s = v \cdot t$ mit $v = 340$ m/s und $t = 14$ s:
$s = 340 \cdot 14 = 4\,760$ m

2.109 Susi hat zum Geburtstag ein Fahrrad bekommen, mit dem sie den Schulweg mit 15 km/h dreimal so schnell zurücklegt wie sonst zu Fuß.
Sie kann deshalb um 20 Minuten später aufstehen.
Berechne, wie lange der Schulweg ist! *AG |2.2|*

2.110 Der Abstand zwischen zwei Lichtmasten beträgt 50 m.

a) Ein Fußgänger braucht für diese Strecke 25 s, ein Radfahrer 16 s und ein Mopedfahrer 10 s.
Berechne die mittlere Geschwindigkeit auf dieser Strecke in m/s und km/h!

b) Eine Straßenbahn fährt durchschnittlich mit 40 km/h.
Berechne die benötigte Zeit für diese Strecke! *AG |2.2|*

2.111 Ein Zug fährt durchschnittlich mit 75 km/h und braucht für eine bestimmte Strecke laut Fahrplan 20 Minuten. Wegen einer Störung hat er 5 Minuten Verspätung.
Berechne, wie hoch seine Durchschnittsgeschwindigkeit nun war! *AG |2.2|*

M **2.112** Ein Fallschirmspringer sinkt gebremst durch den Widerstand des Schirms in der Nähe des Erbodens mit der Endgeschwindigkeit $v = 5$ m/s zu Boden.
Die Formel für die Geschwindigkeit im freien Fall, bei dem der Luftwiderstand vernachlässigt wird, lautet $v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$ mit $g = 9{,}81$ m/s^2.
Ermittle die Höhe h, aus der man ohne Schirm zu Boden springen müsste, um mit dieser Geschwindigkeit aufzutreffen! *AG |2.2|*

2.113 Für die Strecke Graz nach Bruck an der Mur (54 km) benötigt ein Autofahrer 44 Minuten.
Wegen des starken Verkehrs muss er eines Tages 20 km/h langsamer fahren.
Berechne, um wie viel später als sonst er an diesem Tag ankommt! *AG |2.2|*

M **2.114** Der rasende Vertreter Herr Huber fährt zu einem Kunden zunächst 40 km auf der Landstraße und dann noch 180 km auf der Autobahn. Seine durchschnittliche Geschwindigkeit auf der Autobahn ist dabei doppelt so hoch wie die durchschnittliche Geschwindigkeit auf der Landstraße. Insgesamt benötigt Herr Huber 1 Stunde und 40 Minuten zum Kunden.
Kreuze die 2 richtigen auf 2 Nachkommastellen gerundeten durchschnittlichen Geschwindigkeiten an, die Herr Huber auf der Landstraße gefahren ist! *AG |2.2|*

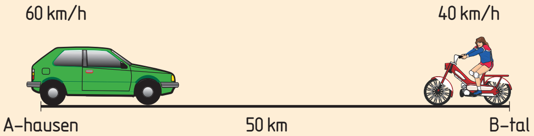
78,00 km/h	☐	100,00 km/h	☐	92,86 km/h	☐
25,79 m/s	☐	21,67 m/s	☐		

2.115 Paul läuft in 20 Sekunden die normale Treppe einer U-Bahn-Station hinauf. Läuft er mit der gleichen Geschwindigkeit die Rolltreppe hinauf, benötigt er 12 Sekunden.
Ermittle mithilfe einer Gleichung, wie lange es dauert, wenn er sich stehend von der Rolltreppe hochfahren lässt! *AG |2.2|*

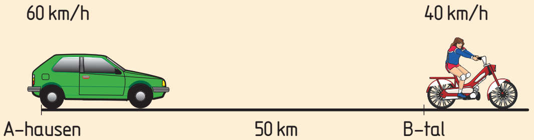
2.116 Eine Autofahrerin wohnt in A-hausen, ein Mopedfahrer im 50 km entfernten B-tal. Die Autofahrerin ist mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 60 km/h unterwegs, der Mopedfahrer mit 40 km/h.

a) Ermittle, wann und wo die beiden einander begegnen, wenn sie gleichzeitig losfahren und einander entgegenfahren!
b) Berechne, wann und wo sie sich treffen, wenn die Autofahrerin eine halbe Stunde später losfährt!
c) Bestimme, wann und wo das Auto das Moped einholt, wenn sie gleichzeitig aus ihren jeweiligen Wohnorten in gleicher Richtung losfahren! *AG |2.2|*

Lösung:
t ... Fahrzeit des Mopedfahrers in Stunden
a)



$60 \cdot t + 40 \cdot t = 50$ und daher $t = 0{,}5$ Stunden.
Sie begegnen sich nach einer halben Stunde, 30 km von A-hausen entfernt.
b) $60 \cdot (t - 0{,}5) + 40 \cdot t = 50$ und daher $t = 0{,}8$ Stunden.
Sie begegnen einander nach 0,8 Stunden, 18 km von A-hausen entfernt.
c)



$50 + 40 \cdot t = 60 \cdot t$ und daher $t = 2{,}5$ Stunden.
Das Auto holt das Moped nach 2,5 Stunden ein; das Auto ist 150 km gefahren.

2.117 Aufgabe des deutschen Mathematikers **Christoph Rudolff** (geboren um 1500): „Zwei Boten betreten einen Raum von 140 Meilen; beide beginnen zu ein und derselben Stunde auf einander zuzueilen. Der eine von ihnen legt jeden Tag 8 Meilen zurück, der andere aber durchmisst an jedem Tag 6 Meilen."
Berechne in Tagen, wann sich die beiden treffen! *AG |2.2|*

M **2.118** Für eine Weichensteuerung soll berechnet werden, nach welcher Zeit die Bewegung zweier 4,20 m voneinander entfernter Greifgeräte abgeschaltet werden soll, wenn sie sich aufeinander zu bewegen und der eine sich mit einer durchschnittlichen Geschwindkeit von 0,8 m/s und der andere mit 0,6 m/s bewegt.

Ergänze zu dieser Aufgabe die Textlücken durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine korrekte Aussage entsteht! *AG |2.2|*

Die Greifarme müssen nach ______ ❶ ______ abgeschaltet werden, und das Verhältnis ihrer zurückgelegten Strecken beträgt ______ ❷ ______.

❶	
2 Sekunden	☐
3 Sekunden	☐
4 Sekunden	☐

❷	
4 : 3	☐
5 : 4	☐
6 : 5	☐

2.119 Aus einem chinesischen Rechenbuch (Chiu Chang Suan Shu) für den praktischen Gebrauch aus der frühen Hanzeit (202 v. Chr. bis 9 n. Chr.):
A bricht von Changan nach Chí auf und braucht 5 Tage. B bricht von Chí auf und benötigt 7 Tage nach Changan.
Wenn nun B zwei Tage früher aufbricht, wann treffen sie sich? *AG |2.2|*

2.120 Ein Kontrollposten am Rand der Autobahn misst ein als gestohlen gemeldetes Auto mit einer mittleren Geschwindigkeit von 150 km/h auf der Messstrecke. Er meldet seine Beobachtung der 50 km (rückwärts) entfernten Aufsicht.
Hier startet 6 Minuten später ein Hubschrauber zur Verfolgungsjagd. Er bewegt sich mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von 220 km/h vorwärts.

Berechne, nach welcher Zeit und in welcher Entfernung der Hubschrauber das fragliche Auto einholt! *AG |2.2|*

2.121 Zwei Sportlerinnen drehen auf einer 400 m langen Laufstrecke ihre Trainingsrunden. Sie starten gleichzeitig, aber die eine erreicht eine Durchschnittsgeschwindigkeit von 18 km/h und die andere von 15 km/h.

a) Berechne, wann die schnellere Läuferin die langsame überrundet!
b) Ermittle, welche Strecke die schnellere Läuferin bis zur Überrundung zurückgelegt hat! *AG |2.2|*

2.122 Ein PKW und ein LKW fahren gleichzeitig von P-stadt in das 60 km entfernte Q-dorf. Der PKW erreicht eine mittlere Geschwindigkeit von 100 km/h, der LKW fährt mit 80 km/h. Nachdem der Autofahrer in Q-dorf angekommen ist, fährt er sofort wieder zurück.
Berechne, wann und wo er dem LKW begegnet! *AG |2.2|*

2.123 An einer Straße liegen die Orte A, B und C, wobei A von B 25 km und B von C 100 km entfernt ist.
Um 8 Uhr verlässt ein Mopedfahrer den Ort B mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von 38 km/h in Richtung C.
Um 9 Uhr fährt ein PKW-Fahrer mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von 80 km/h vom Ort A in Richtung C ab.
Berechne, um wie viel Uhr und in welcher Entfernung von C der PKW-Fahrer den Mopedfahrer einholt! *AG |2.2|*

2.124 Thomas wettet, dass er mit seinem Mofa, das durchschnittlich 25 km/h fährt, Karin auf einer Strecke von 10 km einholen kann, wenn Karin mit ihrem Fahrrad 20 km/h fährt und 10 Minuten Vorsprung hat.
Argumentiere, ob Thomas die Wette gewinnen kann! *AG |2.2|*

2.8.3 Mischungsaufgaben

2.125 a) Eine 30%ige Salzlösung muss mit 5 Liter 15%iger Salzlösung gemischt werden, damit eine 20%ige Salzlösung entsteht.
Berechne wie viel Liter der 30%igen Salzlösung dies sind!
b) 8 Liter 60%ige Salzlösung werden mit 2 Liter 40%iger Salzlösung gemischt.
Berechne, welche Salzlösung entsteht!
c) 6 Liter 70%iger Salzlösung sollen mit 8 Liter einer 2. Salzlösung zu einer 50%igen Salzlösung gemischt werden.
Berechne, welche Salzlösung zu verwenden ist! *AG |2.2|*

a) Zur Unterstützung kann die folgende Tabelle dienen, wobei x die Menge in Liter der 30%igen Salzlösung ist.

Art	Menge in Liter	% der Lösung	Menge der Lösung
Lösung 1	x	30	$0,3 \cdot x$
Lösung 2	5	15	$5 \cdot 0,15$
Mischung	$x + 5$	20	$0,2 \cdot (x + 5)$

Daher ergibt sich:
$0,3 \cdot x + 5 \cdot 0,15 = 0,2 \cdot (x + 5)$ | Ausmultiplizieren
$0,3 \cdot x + 0,75 = 0,2 \cdot x + 1$ | $-0,75$
$0,3 \cdot x = 0,2 \cdot x + 0,25$ | $-0,2 \cdot x$
$0,1 \cdot x = 0,25$ | $:0,1$
$x = 2,5$
2,5 Liter der 30%igen Salzlösung sind notwendig.

b) x ist der Salz-Prozentsatz der Mischung

Art	Menge in Liter	% der Lösung	Menge der Lösung
Lösung 1	8	60	$0,6 \cdot 8$
Lösung 2	2	40	$0,4 \cdot 2$
Mischung	10	x	$\frac{x}{100} \cdot 10$

Daher ergibt sich:
$\frac{x}{100} \cdot 10 = 0,6 \cdot 8 + 0,4 \cdot 2$ | Ausmultiplizieren und zusammenfassen
$0,1 \cdot x = 5,6$ | $:0,1$
$x = 56$
Die Mischung ist eine 56%ige Salzlösung.

c) x ist der Salz-Prozentsatz der 2. verwendeten Salzlösung.

Art	Menge in Liter	% der Lösung	Menge der Lösung
Lösung 1	6	70	$0{,}7 \cdot 6$
Lösung 2	8	x	$\frac{x}{100} \cdot 8$
Mischung	14	50	$0{,}5 \cdot 14$

Daher ergibt sich:

$0{,}5 \cdot 14 = 0{,}7 \cdot 6 + \frac{x}{100} \cdot 8$ | Ausmultiplizieren

$7 = 4{,}2 + 0{,}08 \cdot x$ | – 4,2

$2{,}8 = 0{,}08 \cdot x$ | : 0,08

$x = 35$

Die 2. verwendete Salzlösung hat einen Salzgehalt von 35 %.

Bei Mischungsaufgaben werden mehrere Stoffe mit unterschiedlichen Eigenschaften gemischt.

2.126 Eine Mischung aus insgesamt 70 kg Walnüssen und Erdnüssen soll 3,15 Euro pro Kilogramm kosten. Die Walnüsse kosten 3,30 Euro je Kilogramm, die Erdnüsse 2,70 Euro pro Kilogramm.
Berechne, wie viel von den beiden Sorten zu nehmen ist, damit die Mischung den gewünschten Preis pro Kilogramm hat! *AG |2.2|*

Lösung:
x ist die Menge an Walnüssen in Kilogramm

Art	Menge in kg	Preis pro kg der Nüsse	Kosten
Walnuss	x	3,30	$3{,}30 \cdot x$
Erdnuss	$70 - x$	2,70	$2{,}70 \cdot (70 - x)$
Mischung	70	3,15	$3{,}15 \cdot 70$

Daher ergibt sich:

$3{,}30 \cdot x + 2{,}70 \cdot (70 - x) = 3{,}15 \cdot 70$ | Ausmultiplizieren

$3{,}30 \cdot x + 189 - 2{,}70 \cdot x = 220{,}5$ | Summanden zusammenfassen

$0{,}6 \cdot x + 189 = 220{,}5$ | – 189

$0{,}6 \cdot x = 31{,}5$ | : 0,6

$x = 52{,}5$

Es werden 52,5 Kilogramm Walnüsse und 17,5 Kilogramm Erdnüsse benötigt.

2.127 Neusilber mit einer Legierung von 57,5 % Kupfer, 12,5 % Nickel und 30 % Zink soll hergestellt werden. Es werden 850 g Kupfer verwendet.
Berechne, wie viel Gramm von Nickel und Zink benötigt werden! *AG |2.2|*

2.128 Es soll 850 kg Nitinol hergestellt werden. Dieses besteht aus 55 % Nickel und 30 % Titan sowie weiteren Substanzen.
Berechne, wie viel Kilogramm von Nickel und Titan benötigt werden! *AG |2.2|*

2.129 Meerwasser hat einen durchschnittlichen Salzgehalt von 3,5 %.

a) Berechne, wie viel Gramm Salz in 250 g Meerwasser enthalten ist!

b) 1 kg Meerwasser und 4 kg salzfreies Wasser werden gemischt.
Berechne den Salzgehalt der Mischung! *AG |2.2|*

2.130 Zu 40 Litern 80%iger Schwefelsäure werden 10 Liter 30%ige Schwefelsäure hinzugemischt.
Berechne die Schwefelsäurekonzentration! *AG |2.2|*

2.131 In einer Kaffeerösterei werden zwei Kaffeesorten gemischt.
1 kg der ersten Sorte kostet 9,00 Euro, 1 kg der zweiten Sorte 7,90 Euro.
Es werden 15 kg der ersten Sorte mit 10 kg der zweiten Sorte gemischt.
Berechne, wie teuer ein Kilogramm der Mischung ist! *AG |2.2|*

2.132 Eine Süßwarenfabrik will 120 kg Schokolade mit einem Kakaoanteil von 30 % herstellen. Sie nimmt 80 kg Schokoladenmasse mit 40 % Kakaoanteil.
Berechne, wie viel Prozent Kakaoanteil die restliche Schokoladenmasse hat! *AG |2.2|*

2.133 Aus einer Altmetallsorte mit 60 % Kupfer und 40 % Zinn soll durch Zusatz von Kupfer eine Walzbronze mit 92 % Kupfer und 8 % Zinn hergestellt werden.
Berechne die Mengen Altmetall und Kupfer, die für 100 Kilogramm Walzbronze erforderlich sind! *AG |2.2|*

2.134 5 Liter Wasser mit einer Temperatur von 70 °C wurden mit 3 Liter kaltem Wasser gemischt. Die Mischung hat eine Temperatur von 50,5 °C.
Berechne, wie hoch die Temperatur des kalten Wassers war! *AG |2.2|*

Zusammen*fassung*

Für das Lösen von Gleichungen werden die **Grund-, Definitions- und Lösungsmenge** unterschieden.

Bei der Lösung einer Gleichung gilt es, Zahlen aus der Definitionsmenge zu finden, die anstelle der Variablen eingesetzt werden dürfen, um eine wahre Aussage zu erhalten. Dabei werden Gleichungen als **äquivalent** betrachtet, wenn sie die gleichen Lösungen besitzen.

Eine **lineare Gleichung** in der Variablen x hat die Form $a \cdot x + b = 0$, mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$.

Bruchgleichungen sind Gleichungen, bei denen die Variablen auch im Nenner vorkommen. Daher ist immer eine Definitionsmenge anzugeben.

Eine **Verhältnisgleichung oder Proportion** ist eine Gleichung der Gestalt $a : b = c : d$.
Falls $y : x = k$ ist, dann sind x und y zueinander direkt proportional.
Falls $x \cdot y = k$, dann sind x und y zueinander indirekt proportional.
k ist der Proportionalitätsfaktor.

Eine **Gleichungsvariable** ist eine Variable, nach der eine Gleichung aufzulösen ist, wobei alle anderen Variablen wie bestimmte, feste Zahlenwerte behandelt werden.

Bei Bewegungsaufgaben wird mit **durchschnittlichen Geschwindigkeiten** gearbeitet. Häufig vorkommende Bewegungsaufgaben sind solche, wo beispielsweise zwei Objekte einander entgegenfahren oder das eine das andere Objekt einholt.

Bei Mischungsaufgaben werden mehrere Stoffe mit **unterschiedlichen Eigenschaften** gemischt.

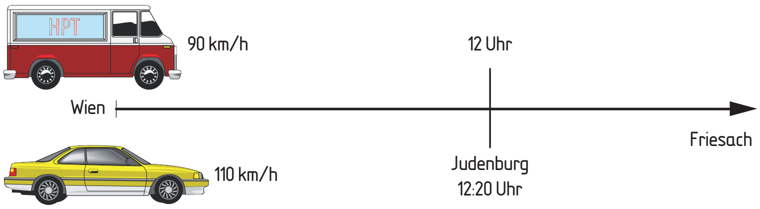
Vermischte *Aufgaben* zur Vorbereitung auf die Reifeprüfung

M **2.135** Typ 2

Für 20 Arbeiter soll für einen bestimmten Auftrag ein Dienstplan erstellt werden. Von den Arbeitern sind 10 vollbeschäftigt (100 %), 6 halbbeschäftigt (50 %) und 4 sind nur für einen Arbeitsumfang von 20 % angestellt. Das Projekt wird in 2 Arbeitsschichten pro Tag aufgeteilt. Eine Schicht erfordert jeweils 2 Personen zur Bedienung der benötigten Maschinen. Der Auftrag soll in $34\frac{1}{2}$ Tagen bewerkstelligt sein.
Erstelle eine Gleichung zur Berechnung der Anzahl der Schichten pro Arbeiter!
Berechne, wie viele Schichten auf jeden Arbeiter fallen! *AG |2.2|*

M **2.136** Typ 2

Ein Fahrzeug hat eine durchschnittliche Geschwindigkeit von 90 km/h und fährt von Wien nach Friesach in Kärnten und um 12 Uhr bei Judenburg in der Steiermark vorbei. Ein anderes Fahrzeug, welches ebenfalls von Wien nach Friesach auf der gleichen Strecke unterwegs ist, fährt eine durchschnittliche Geschwindigkeit von 110 km/h und passiert 20 Minuten später Judenburg.



Berechne, wann das eine Fahrzeug das andere überholt!
Berechne, wie viele Kilometer von Judenburg aus das Fahrzeug überholt wird! *AG |2.2|*

M **2.137** Typ 2

Ein Fahrzeug fährt mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von 6 km/h bergauf und anschließend mit 18 km/h bergab.
Für den gesamten Weg von 40 km benötigt es 3 Stunden.
Berechne, wann und wo das Fahrzeug den höchsten Punkt erreicht! *AG |2.2|*

M **2.138** Typ 2

Eine Schwimmerin will einen 2 km breiten See durchqueren. Sie schwimmt mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von 1,5 km/h. 10 Minuten später folgt ihre Freundin in einem Ruderboot mit durchschnittlich 6 km/h.

a) Berechne, wann und wo die Freundin die Schwimmerin überholt!
b) Nachdem die Freundin am anderen Ufer angekommen ist, macht sie eine Pause von 10 Minuten und rudert dann wieder zurück.
Berechne, wann und wo sie der Schwimmerin begegnet! *AG |2.2|*

M **2.139** Typ 2

In der Feinkostabteilung wird eine größere Menge Aufschnitt vorbereitet, wofür zwei Sorten von Schinken verwendet werden. Von der ersten Sorte mit einem Preis von 15,80 Euro pro Kilogramm werden 3,5 kg genommen. Der Preis der zweiten Sorte pro Kilogramm beträgt 18 Euro.
Berechne, wie viel von der zweiten Sorte genommen werden muss, damit der Aufschnitt 17 Euro pro Kilogramm kostet! *AG |2.2|*

M **2.140** Typ 2

Es sollen Münzen hergestellt werden, die neben Kupfer und Nickel auch Zink beinhalten. Dazu werden 2 kg Nickelmünzen mit 75 % Kupfer und 25 % Nickel und 3 kg Argentan mit 60 % Kupfer, 10 % Nickel und 30 % Zink zusammengeschmolzen.
Berechne jeweils den Prozentanteil von Kupfer, Nickel und Zink der neuen Münze! *AG |2.2|*

Wissens-*Check*

Bearbeite die Aufgaben! **Begründe** jeweils deine Auswahl!

1 Ordne den Gleichungen jeweils die äquivalente Gleichung aus A bis F zu! $(G = \mathbb{N})$

$7 \cdot x = 0$	
$4 \cdot x - 8 = 0$	
$x^2 + x = x^2 + 4$	
$5 \cdot x = 5$	

A	$x = 0$
B	$x = 1$
C	$x = 2$
D	$x = 3$
E	$x = 4$
F	$x = 5$

2 Kreuze die richtige Aussage an!

$7 \cdot (5x - 2) + 6 = 2$ hat in $\mathbb{N}$ eine Lösung.	☐
$9 \cdot x = \sqrt{7}$ hat in $\mathbb{Q}$ eine Lösung.	☐
$(7 \cdot x - 9)^2 = (7 \cdot x + 5)^2 + 56 \cdot x$ hat in $\mathbb{Z}$ eine Lösung.	☐
$2 \cdot x - 9 = 5 \cdot (x - 3) - 3x + 6$ hat in $\mathbb{N}$ genau eine Lösung.	☐
$3 \cdot (x - 2)^2 = 3 \cdot x^2$ hat in $\mathbb{Q}$ eine Lösung.	☐
$(x - \sqrt{3})^2 = (x + \sqrt{3})^2 - 2$ hat in $\mathbb{Q}$ eine Lösung.	☐

3 Kreuze jenen Ausdruck an, der eine Lösungsmenge in der Grundmenge $\mathbb{Q}$ darstellen könnte!

3	☐	-7	☐	$\left\{\frac{\pi}{3}\right\}$	☐
$\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$	☐	$\mathbb{R}\backslash\{-3\}$	☐	$\{-5\}$	☐

4 Ergänze die Textlücken durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine korrekte Aussage entsteht!

Die Bruchgleichung ______ ❶ ______ hat die Definitionsmenge ______ ❷ ______.

❶	
$\frac{x}{2} - \frac{3}{3} = 2 \cdot x$	☐
$x - \frac{2x - 1}{2} = \frac{3 \cdot x}{2 \cdot (x - 1)}$	☐
$\frac{2 \cdot x}{x - 1} + \frac{x - 1}{x} = 3$	☐

❷	
$\mathbb{R}\backslash\{0, 1\}$	☐
$\mathbb{R}\backslash\{0\}$	☐
$\mathbb{R}\backslash\{0, -1\}$	☐

Wissens-*Check*

5 Ordne den Bruchgleichungen in $G = \mathbb{R}$ jeweils die korrekte Lösungsmenge zu!

$28 - 2 \cdot \left(\frac{9}{x} + 4\right) = \frac{28 + 4}{2x} + \frac{94}{x} - 12$	
$\frac{2 + 37 \cdot x - 3 \cdot x^2}{x^2 - 16} + \frac{5 \cdot x - 1}{x + 4} - \frac{2 \cdot x + 3}{x - 4} = 0$	
$\frac{2}{x} - 1 - \frac{x}{1 - x} = \frac{2x}{x^2 - 1}$	
$\frac{9}{5 \cdot x} - \frac{8}{10 \cdot x - 5} = \frac{1 - 4 \cdot x}{1 - 4 \cdot x^2}$	

A	$\{4\}$
B	$\mathbb{R}$
C	$\left\{\frac{6}{5}\right\}$
D	$\{-2\}$
E	$\{-3\}$
F	$\{0\}$

6 Ein Bruch hat den Wert $\frac{17}{18}$.
Eine bestimmte Zahl wird vom Zähler subtrahiert und zum Nenner addiert, sodass der Wert des Bruchs $\frac{2}{3}$ beträgt.
Kreuze die beiden Gleichungen an, mit denen die Zahl berechnet werden kann!

$\frac{17}{18} - \frac{x}{x} = \frac{2}{3}$	☐
$\frac{17}{18} \cdot x = \frac{2}{3}$	☐
$\frac{18 + x}{17 - x} = \frac{3}{2}$	☐
$\frac{17 - x}{18 + x} = \frac{2}{3}$	☐
$\frac{x - 17}{18 + x} = \frac{2}{3}$	☐

7 Kreuze das Verhältnis zwischen der Anzahl der Seiten eines Quadrats und der Anzahl der Kanten eines Würfels an!

1 : 2	☐	3 : 2	☐	4 : 1	☐
1 : 3	☐	2 : 3	☐	2 : 1	☐

8 Bei einem Fotogeschäft lagen Bestellungen von einer Woche für verschiedene Fotogrößen im folgenden Verhältnis vor:
15 cm x 10 cm : 18 cm x 13 cm : 23 cm x 15 cm = 6 : 3 : 1.

Insgesamt wurden 410 Bestellungen aufgegeben.
Kreuze an, wie viele 18 cm x 13 cm Fotos bestellt wurden!

41	☐	82	☐	123	☐
205	☐	246	☐	369	☐

Lösung:
1) A; C; E; B 2) 5. Zeile 3) 2. Zeile, 3. Spalte 4) 1: 3. Zeile → 2: 1. Zeile 5) A; C; D; E
6) 3. und 4. Zeile 7) 2. Zeile, 1. Spalte 8) 1. Zeile, 3. Spalte