HAAGER

REGELUNGS-TECHNIK

KOMPETENZORIENTIERT

KOMPETENZORIENTIERT

Inhaltsverzeichnis

1 Dynamik linearer Systeme

Die Naturwissenschaften wollen nicht erklären, und sie wollen selten etwas interpretieren, sie schaffen in der Hauptsache Modelle. Mit einem Modell ist ein mathematisches Konstrukt gemeint, das unter Zusatz bestimmter sprachlicher Interpretationen Phänomene der Beobachtungswelt beschreibt. Die Berechtigung eines solchen mathematischen Konstrukts beruht einzig und allein auf der Hoffnung, dass es funktioniert.

JOHN VON NEUMANN

1.1 Grundlegendes

Die Systemtheorie, welche auch die theoretische Grundlage für die Regelungstechnik bildet, beschäftigt sich mit der mathematischen Beschreibung des dynamischen Verhaltens von Systemen. Die Gestalt der Systeme ist dabei unerheblich, technische Systeme werden in gleicher Weise beschrieben wie etwa ökonomische, biologische, chemische oder physikalische Systeme. Als System ist eine abgegrenzte funktionale Einheit zu verstehen, die über bestimmte, im Allgemeinen von der Zeit abhängige Größen mit der Umgebung in Wechselwirkung steht.

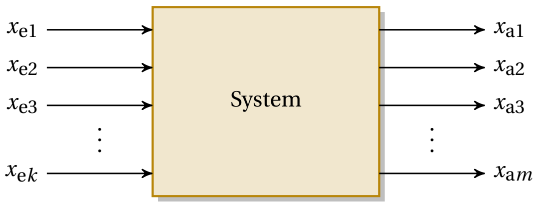


Bild 1.1 Dynamisches System mit k Eingangsgrößen und m Ausgangsgrößen

Wirken auf ein System in Abhängigkeit von der Zeit physikalische Größen $x_{e,i}(t)$, die sogenannten **Eingangsgrößen**, von außen ein, dann reagiert dieses System in bestimmter Weise darauf; physikalische Größen in diesem System erfahren zeitliche Veränderungen. Die interessierenden, nach außen in Erscheinung tretenden Größen werden **Ausgangsgrößen** $x_{a,i}(t)$ genannt.

In der Regelungstechnik wird bei den Eingangsgrößen üblicherweise zwischen Stellgrößen und Störgrößen unterschieden:

- **Stellgrößen** $u_i(t)$, mit denen das System gezielt beaufschlagt wird, und
- **Störgrößen** $z_i(t)$, die das System ohne besondere Beabsichtigung beeinflussen (und sich meist störend auf das Regelverhalten auswirken).

Tabelle 1.1 Beispiele für Systeme

System	u_i	z_i	$x_{a,i}$
Raumheizung	Heizleistung	Außentemperatur, Öffnung der Fenster	Raumtemperatur
Kraftfahrzeug	Gaspedalstellung	Steigung, Gegenwind	Geschwindigkeit
Schiff	Ruderstellung	Wind, Wasserströmung	Kurs
Elektronische Schaltung	Eingangsspannung, Potenziometerstellung	Temperatur, Belastung	Ausgangsspannung, Schwingfrequenz ...
Synchronmaschine (am Netz)	Antriebsmoment, Erregung	Elektr. Belastung	Wirkleistung, Blindleistung
Synchronmaschine (im Inselbetrieb)	Antriebsmoment, Erregung	Elektr. Belastung	Drehzahl (Frequenz) Spannung,
Elektr. Antrieb	Spannung	Belastung	Drehzahl
Chemisches Reaktionsgefäß	Mischungsverhältnis, Heizleistung	Qualität der Ausgangsstoffe	Beschaffenheit der Endprodukte, Temperatur, Druck
Roboter	Spannungen der Antriebsmotore	Gewicht des Werkstücks	Position der Roboterarme

Die Abgrenzung des Systems zu seiner Umgebung ist aufgrund *gegenseitiger* Beeinflussungen oft schwierig. Eine eindeutige Zuordnung der Größen zu Eingangs- und Ausgangsgrößen ist dann nicht mehr zwingend gegeben, sondern kann in gewissem Ausmaß nach Belieben *definiert* werden.

Beispiel: Antrieb

Ein elektrischer Antrieb soll üblicherweise eine Arbeitsmaschine mit einer gewissen Drehzahl n antreiben. Betrachtet man die Drehzahl als *Ausgangsgröße* des Motors (und somit als Eingangsgröße der Arbeitsmaschine), dann antwortet die Arbeitsmaschine mit einem Lastmoment M, das die Drehzahl zu verringern versucht und für den Motor eine *Eingangsgröße* darstellt.

Dieser Sachverhalt könnte ebenso umgekehrt gesehen werden: Der Motor entwickelt ein bestimmtes Antriebsmoment (*Ausgangsgröße*), die Arbeitsmaschine reagiert darauf mit einer bestimmten Drehzahl (*Eingangsgröße* für den Motor).

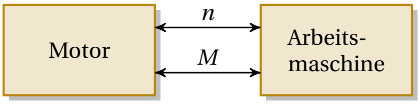


Bild 1.2

Über die zwei mechanischen Größen Drehzahl n und Drehmoment M stehen der Motor und die Arbeitsmaschine in Wechselwirkung. Ein steigendes Lastmoment wirkt der Drehzahl entgegen, bei einer Drehzahlabsenkung wird im Allgemeinen auch das Lastmoment sinken.

Beispiel: Spannungsquelle

Eine Spannungsquelle erzeugt eine elektrische Spannung U. Wird daran ein Verbraucher angeschlossen, so beginnt ein Strom I zu fließen. Aufgrund des Innenwiderstandes der Spannungsquelle wirkt der Strom auf die Spannung zurück, die mit steigendem Strom sinken wird. Spannung und Strom sind zwei Größen, die die beiden Systeme Erzeuger (Spannungsquelle) und Verbraucher miteinander verkoppeln:

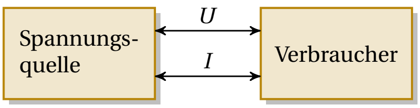


Bild 1.3

Damit ein dynamisches System aus seiner Umgebung herausgelöst oder von anderen Systemen getrennt theoretisch untersucht werden kann, ist **Rückwirkungsfreiheit** vorauszusetzen. Das heißt, die Umgebung oder andere Systeme wirken nicht auf das betrachtete System zurück.

Genau dann ist auch die Zuordnung der nach außen in Erscheinung tretenden physikalischen Größen zu Eingangs- und Ausgangsgrößen eindeutig.

Beispiel: Antrieb

Ist die Drehzahl eines Antriebs vom auftretenden Lastmoment unabhängig, handelt es sich also um einen drehzahlsteifen Antrieb (was in der Praxis nur näherungsweise erfüllt sein wird), dann ist für die Arbeitsmaschine die Drehzahl eindeutig eine *Eingangsgröße* und das Lastmoment eindeutig eine *Ausgangsgröße*.

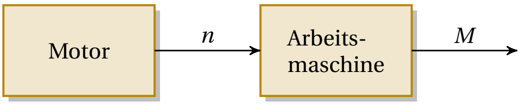


Bild 1.4

Weitere Beispiele für Rückwirkungsfreiheit:

- Eine Spannungsquelle verändert bei Belastung die Spannung nicht.
- Ein Haus heizt die Umgebung nicht auf (und kühlt dadurch nicht langsamer aus).
- Verstärktes Antreiben einer Synchronmaschine ändert die Netzfrequenz nicht.

In Abhängigkeit von Eingangsgrößen, Ausgangsgrößen und der Systembeschreibung werden in der Regelungstechnik drei grundlegende Aufgabenstellungen unterschieden:

Analyse: Die Eingangsgrößen $x_{e,i}$ (Stellgrößen u_i und Störgrößen z_i) und das System sind gegeben; gesucht sind die Ausgangsgrößen $x_{a,i}$.

Die Analyse beantwortet die Frage, wie ein bekanntes System auf bestimmte Eingangsgrößen reagiert. Die Untersuchung des Verhaltens von Regelkreisen fällt im Wesentlichen in diesen Bereich.

Synthese: Die Ausgangsgrößen (d. h. ein gewünschtes Verhalten des Systems) und das System sind gegeben; die dazu erforderlichen Eingangsgrößen sind gesucht.

Die Synthese beantwortet die Frage, mit welchen Größen ein bekanntes System zu beaufschlagen ist, damit es in gewünschter Weise reagiert. In diesen Bereich fällt im Wesentlichen der Entwurf von Regelungen, ein zentrales Anliegen der Regelungstechnik. Ein Regler hat im Prinzip die Aufgabe, die erforderliche Stellgröße aus der Ausgangsgröße des Systems zu erzeugen.

Identifikation: Die Eingangsgrößen und die Ausgangsgrößen sind gegeben, gesucht ist das System (bzw. eine mathematische Beschreibung des Systems). Aufgrund der an das System angelegten Eingangsgrößen und gemessenen Ausgangsgrößen wird bei der Identifikation das Verhalten des Systems untersucht und daraus eine mathematische Beschreibung gewonnen, die in der Regelungstechnik eine Grundvoraussetzung für einen vernünftigen Regelungsentwurf ist.

1.2 Die Laplace-Transformation

1.2.1 Beschreibung von Systemen mit Differenzialgleichungen

Das dynamische Verhalten von Systemen wird mit Hilfe von Differenzialgleichungen mathematisch beschrieben.

Für ein *lineares, zeitinvariantes* System mit einer einzigen Eingangsgröße $u(t)$ und einer einzigen Ausgangsgröße $x(t)$ gilt:

$$\begin{aligned} &a_n \overset{(n)}{x}(t) + a_{n-1} \overset{(n-1)}{x}(t) + \cdots + a_2 \ddot{x}(t) + a_1 \dot{x}(t) + a_0 x(t) = \\ &\qquad = b_m \overset{(m)}{u}(t) + b_{m-1} \overset{(m-1)}{u}(t) + \cdots + b_2 \ddot{u}(t) + b_1 \dot{u}(t) + b_0 u(t) \end{aligned} \tag{1.1}$$

Lineares System: ein System, das durch eine *lineare* Differenzialgleichung beschrieben wird, d. h. die Differenzialgleichung ist linear in den Ableitungen $u^{(i)}$ der Eingangsgröße und den Ableitungen $x^{(i)}$ der Ausgangsgröße (nichtlineare Terme wären z. B. x^2, $\dot{x}^3$, $x \cdot \dot{x}$).

Zeitinvariantes System: ein System, dessen Differenzialgleichung nur konstante (d. h. von der Zeit unabhängige) Koeffizienten a_i und b_i enthält.

Beispiel: RC-Glied

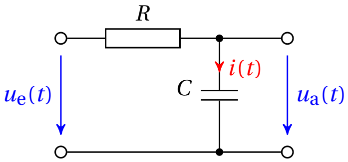


Bild 1.5

Eingangsgröße … $u_e(t)$
Ausgangsgröße … $u_a(t)$

$$u_a(t) = \frac{1}{C} \cdot \int\limits_0^t i(\tau)\,\mathrm{d}\tau + u_a(0)\,, \qquad i(t) = \big[u_e(t) - u_a(t)\big] \cdot \frac{1}{R}$$

$$\frac{\mathrm{d}u_a}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{C} \cdot i(t) = \frac{1}{RC} \cdot \big[u_e(t) - u_a(t)\big]$$

$$\dot{u}_a + \frac{1}{RC} \cdot u_a = \frac{1}{RC} \cdot u_e$$

Die Koeffizienten a_i und b_i der Differenzialgleichung erster Ordnung ($n=1$) lauten somit:

$$a_1 = 1\,, \quad a_0 = \frac{1}{RC}\,, \quad b_0 = \frac{1}{RC}$$

Beispiel: Feder-Masse-System (ungedämpft)

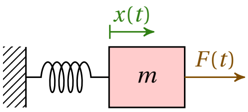


Bild 1.6

Eingangsgröße … $F(t)$
Ausgangsgröße … $x(t)$

Aus dem Schwerpunktsatz folgt:

$$m \cdot \ddot{x}(t) = F(t) - k_c \cdot x(t) \qquad k_c \;\ldots\; \text{Federkonstante}$$

$$m\,\ddot{x} + k_c\,x = F$$

Die Koeffizienten a_i und b_i der Differenzialgleichung zweiter Ordnung ($n=2$) lauten somit:

$$a_2 = m\,, \quad a_1 = 0\,, \quad a_0 = k_c\,, \quad b_0 = 1$$

Nur für lineare zeitinvariante Differenzialgleichungen gibt es eine allgemeine Lösungstheorie. Die Regelungstechnik macht von solchen Differenzialgleichungen einen derart intensiven Gebrauch, dass zu ihrer Untersuchung ein besonderes Verfahren entwickelt wurde, das zum „täglichen Brot“ aller Regelungstechniker gehört: die **Laplace-Transformation**.

Die direkte Lösung der Differenzialgleichung, die das dynamische Verhalten eines Systems im *Zeitbereich* beschreibt, ist im Allgemeinen ein mühsames und mitunter kompliziertes

Unterfangen. Wird die Differenzialgleichung der Laplace-Transformation – einer speziellen mathematischen Operation, die im Folgenden erläutert wird – unterzogen, dann wird sie zu einer gewöhnlichen algebraischen Gleichung, deren Lösung keinerlei Schwierigkeiten bereitet.

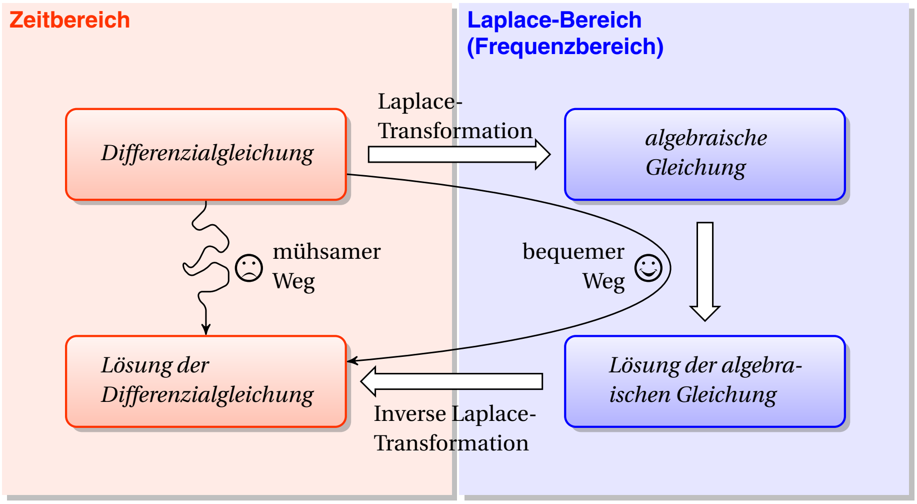


Bild 1.7 Lösung einer Differenzialgleichung mit Hilfe der Laplace-Transformation

Der Umweg über den Laplace-Bereich bietet eine bequeme und elegante Methode zur Lösung einer linearen zeitinvarianten Differenzialgleichung. In diesem Bereich hängen die physikalischen Größen nicht mehr von der Zeit t, sondern von einer auf den ersten Blick ziemlich abstrakt erscheinenden Variablen s ab.

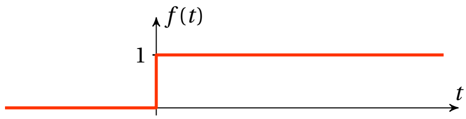
Die Rücktransformation der Lösung in den Zeitbereich ist mitunter etwas mühsam (rechenaufwändig). Sie ist aber meist gar nicht notwendig, da sehr viele wichtige Systemeigenschaften direkt im Laplace-Bereich erkennbar sind (z. B. Stabilität, Ausgleichsverhalten, Stationärverhalten).

Regelungstechniker untersuchen also dynamische Vorgänge meist direkt im Laplace-Bereich; dieser Bereich ist auch Grundlage der meisten Reglerentwurfsverfahren. Sehr eng verwandt mit dem Laplace-Bereich ist der *Frequenzbereich*, eine den Elektrotechnikern von der komplexen Wechselstromrechnung her vertraute Sache. Physikalische Größen hängen dabei nicht von der Zeit t ab, sondern (unter Annahme sinusförmiger eingeschwungener Zustände) von der komplexen Kreisfrequenz $j\omega$.

1.2.2 Sprungfunktion, Stoßfunktion

Sprungfunktion $\sigma(t)$ (Heaviside-Funktion):

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= 0 \quad \ldots \quad t \le 0 \\ \sigma(t) &= 1 \quad \ldots \quad t > 0 \end{aligned} \tag{1.2}$$



$f(t) = \sigma(t)$

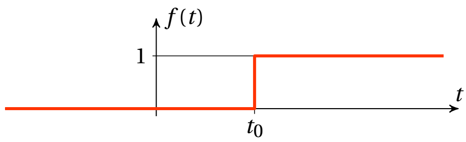
Bild 1.8

Beispielsweise kann das Einschalten einer Gleichspannung mathematisch mit einer Sprungfunktion beschrieben werden.

Zur Beurteilung des dynamischen Verhaltens eines Systems wird häufig die Reaktion auf eine sprungförmige Änderung der Eingangsgröße, z. B. einen Einschaltvorgang untersucht, entweder rechnerisch oder experimentell durch Messung. Die sich dabei ergebende Ausgangsgröße ist die **Sprungantwort** oder **Übergangsfunktion**.

Zeitverschobene Sprungfunktion:

Wird das Argument t durch $t - t_0$ ersetzt, wobei t_0 einen konstanten Wert hat, so erhält man die zeitverschobene Sprungfunktion:

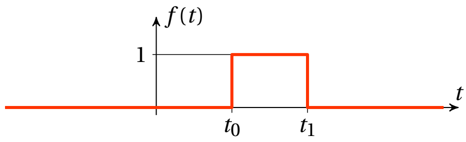


$f(t) = \sigma(t - t_0)$

Bild 1.9

Zusammensetzung von Sprungfunktionen:

Durch eine Zusammensetzung verschiedener (zeitverschobener) Sprungfunktionen lassen sich beliebige Impulse mathematisch beschreiben:



$f(t) = \sigma(t - t_0) - \sigma(t - t_1)$

Bild 1.10

Stoßfunktion $\delta(t)$ (Dirac-Impuls):

Die Stoßfunktion kann als „zeitliche Ableitung“ der Sprungfunktion angesehen werden. Das ist zwar mathematisch nicht exakt, da die Sprungfunktion an der Unstetigkeitsstelle bei $t=0$ keine Ableitung besitzt (dazu muss der Begriff der Ableitung für unstetige Funktionen erweitert werden – Theorie der Distributionen). Es ist aber eine physikalisch sehr anschauliche Deutung.

Die Stoßfunktion $\delta(t)$ ist (ziemlich unmathematisch ausgedrückt) ein „sehr hoher Impuls“ bei $t=0$, die Fläche unter diesem Impuls ist aber endlich, nämlich 1. Die Stoßfunktion als zeitliche Ableitung einer dimensionslosen Größe hat die Dimension *Zeit*$^{-1}$.

$$\delta(t) = 0 \;\ldots\; t \neq 0$$

$$\delta(t) \to \infty \;\ldots\; t = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,\mathrm{d}t = 1 \tag{1.3}$$

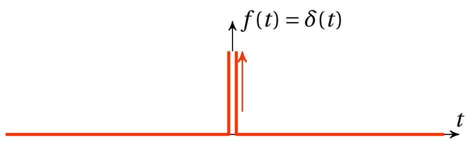


Bild 1.11

Die Reaktion eines Systems auf die Stoßfunktion als Eingangsgröße wird **Stoßantwort** oder **Gewichtsfunktion** genannt, üblicherweise mit $g(t)$ bezeichnet.

Wie Sprungfunktion und Stoßfunktion aus einer Rampenfunktion bzw. aus einem Impuls im Grenzfall entstehen, verdeutlicht Bild 1.12.

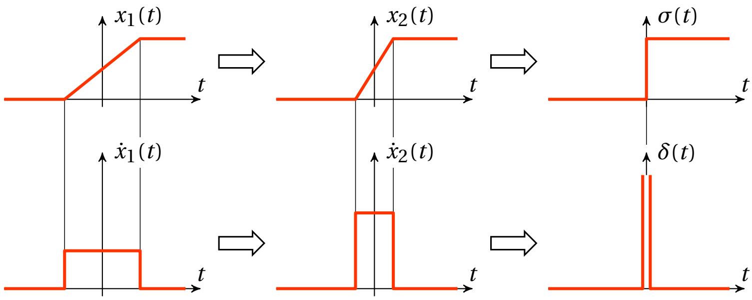


Bild 1.12 Entstehung von Sprungfunktion und Stoßfunktion aus einer Rampe und deren Ableitung

Mit größer werdender Steigung der Rampe wächst die Impulshöhe über alle Grenzen, die Fläche unter dem Impuls, die der Rampenhöhe entspricht, bleibt aber konstant!

Ein Dirac-Impuls tritt zwar in der Natur nicht exakt auf (physikalische Größen können keine unendlich großen Werte annehmen), bei der mathematischen Beschreibung von Systemen bietet er aber vielfach sehr bequeme und genaue Näherungen an das tatsächliche dynamische Verhalten.

Beispiele:

- Entladen eines Kondensators bei verschwindendem elektrischen Widerstand:

  Obwohl die gespeicherte Ladung Q einen endlichen Wert hat, nimmt der Entladestrom $i(t)$ kurzzeitig sehr hohe Werte an, begrenzt durch doch vorhandene ohmsche und induktive Widerstände im Stromkreis. Die Entladung kann näherungsweise durch einen Dirac-Impuls beschrieben werden:

$$u(t) = U_0 \cdot \big(1 - \sigma(t)\big)$$
$$i(t) = \frac{\mathrm{d}Q(t)}{\mathrm{d}t} = C \cdot \frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} = -C\,U_0 \cdot \delta(t)$$

- Ausschalten des Stroms durch eine Spule:

  Obwohl die magnetische Flussverkettung ψ einen endlichen Wert hat, nimmt die Selbstinduktionsspannung $u(t)$ kurzzeitig sehr hohe Werte an, begrenzt durch den Lichtbogen beim Öffnen der Kontakte. Die Induktionsspannung kann näherungsweise durch einen Dirac-Impuls beschrieben werden:

$$i(t) = I_0 \cdot \big(1 - \sigma(t)\big)$$
$$u(t) = \frac{\mathrm{d}\psi(t)}{\mathrm{d}t} = L \cdot \frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} = -L\,I_0 \cdot \delta(t)$$

- Aufschlagen eines Gegenstandes mit der Masse m an eine starre Wand:

  Obwohl der Impuls p einen endlichen Wert hat, nimmt die Stoßkraft $F(t)$ kurzzeitig sehr hohe Werte an, begrenzt durch plastische oder elastische Verformung der Masse. Die auftretende Kraft kann näherungsweise durch einen Dirac-Impuls beschrieben werden:

$$p(t) = m\,v_0 \cdot \big(1 - \sigma(t)\big)$$
$$F(t) = \frac{\mathrm{d}p(t)}{\mathrm{d}t} = m \cdot \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = -m\,v_0 \cdot \delta(t)$$

1.2.3 Definitionsgleichung der Laplace-Transformation

Die Laplace-Transformierte $\mathscr{L}$ einer Zeitfunktion $f(t)$ ist durch folgende Operation *definiert*:

$$\boxed{\mathscr{L}\{f(t)\} := \int_0^\infty f(t) \cdot \mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t} \tag{1.4}$$

Diese Transformationsregel, die aus jeder Funktion $f(t)$, die von der Zeit t abhängt, eine neue Funktion erzeugt, die von einer Variablen s abhängt, erscheint auf den ersten Blick willkürlich und unanschaulich. Es wird sich aber zeigen, dass diese Transformation bestimmte Eigenschaften besitzt, die sie in hervorragender Weise zur Lösung von linearen zeitinvarianten Differenzialgleichungen und somit zur Analyse von dynamischen Systemen geeignet machen.

Die Laplace-Transformierte einer Funktion wird üblicherweise mit Großbuchstaben bezeichnet:

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s) \tag{1.5}$$

t ... Zeitvariable, $[t] = \mathrm{sec}$
s ... Laplace-Variable, $[s] = \mathrm{sec}^{-1}$

In Fällen, wo Verwechslungen zwischen der Laplace-Variable „s" und der Abkürzung „s" für die Sekunde möglich sind, ist es zweckmäßig, die Sekunde mit „sec" abzukürzen, wovon im Weiteren gegebenenfalls Gebrauch gemacht wird.

Die Umkehrung der Laplace-Transformation, die Rücktransformation in den Zeitbereich, erfolgt durch Aufspalten in eine *Summe* von elementaren Funktionen und mit Hilfe von Tabellen. Folgende Schreibweise ist gebräuchlich:

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} \tag{1.6}$$

In der Regelungstechnik werden üblicherweise alle Zeitfunktionen nur für $t > 0$ betrachtet. Einschaltvorgänge finden im Zeitursprung $(t = 0)$ statt, vorher befindet sich das System in Ruhe oder in einem stationären Zustand; die Änderungen von physikalischen Größen beginnen frühestens bei $t=0$.

Diesem Umstand wird auch in der Laplace-Transformation Rechnung getragen. Zeitverläufe für $t<0$ gehen in die Laplace-Transformierte nicht ein, da die Untergrenze des Integrationsbereiches der Wert 0 ist. Für *alle* Zeitfunktionen wird daher in der Folge ohne weitere Erwähnung für $t<0$ der Wert 0 angenommen. Formal könnte dies durch Multiplikation aller Zeitfunktionen mit der Sprungfunktion $\sigma(t)$ beschrieben werden; aus Gründen der Einfachheit kann aber darauf verzichtet werden.

Tabelle 1.2 zeigt eine Zusammenstellung wichtiger Zeitfunktionen und deren Laplace-Transformierten.

Beispiele:

1. $f(t) = 1$ (eigentlich $\sigma(t)$)

$$F(s) = \int_0^\infty 1 \cdot \mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{s} \cdot \mathrm{e}^{-st}\Big|_0^\infty = -\frac{1}{s} \cdot 0 + \frac{1}{s} = \frac{1}{s}$$

$$\boxed{\mathscr{L}\{1\} = \frac{1}{s}} \tag{1.7}$$

Tabelle 1.2 Tabelle zur Laplace-Transformation

	$f(t)$	$F(s)$
1.	$\delta(t)$	1
2.	1	$\frac{1}{s}$
3.	t	$\frac{1}{s^2}$
4.	$\frac{1}{2}\,t^2$	$\frac{1}{s^3}$
5.	$\frac{1}{n!}\,t^n$	$\frac{1}{s^{n+1}}$ $(n>0$, ganzzahlig)
6.	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
7.	$\frac{1}{a}\,e^{-\frac{t}{a}}$	$\frac{1}{1+as}$
8.	$\sin bt$	$\frac{b}{s^2+b^2}$
9.	$\cos bt$	$\frac{s}{s^2+b^2}$
10.	$e^{at}\sin bt$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$
11.	$e^{at}\cos bt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$
12.	$1-e^{-\frac{t}{a}}$	$\frac{1}{s(1+as)}$
13.	$\frac{1}{a^2}\,t\,e^{-\frac{t}{a}}$	$\frac{1}{(1+as)^2}$
14.	$\frac{e^{-t/a}-e^{-t/b}}{a-b}$	$\frac{1}{(1+as)(1+bs)}$
15.	$\frac{1}{a^3}(a-t)\,e^{-\frac{t}{a}}$	$\frac{s}{(1+as)^2}$
16.	$\frac{a\,e^{-t/b}-b\,e^{-t/a}}{ab(a-b)}$	$\frac{s}{(1+as)(1+bs)}$
17.	$1-\left(1-\frac{b}{a}\right)e^{-\frac{t}{a}}$	$\frac{1+bs}{s(1+as)}$
18.	$1+\frac{a\,e^{-t/a}-b\,e^{-t/b}}{b-a}$	$\frac{1}{s(1+as)(1+bs)}$
19.	$a\left(e^{-\frac{t}{a}}-1\right)+t$	$\frac{1}{s^2(1+as)}$
20.	$\frac{ab+(a-b)\,t}{a^3}\,e^{-\frac{t}{a}}$	$\frac{1+bs}{(1+as)^2}$

2. $f(t) = \mathrm{e}^{at}$ ($a \ldots$ konstanter Parameter)

$$F(s) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{at} \cdot \mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \mathrm{e}^{(a-s)t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a-s}\,\mathrm{e}^{(a-s)t}\Big|_0^\infty = \frac{1}{s-a} \quad (\text{mit } \operatorname{Re} s > a)$$

$$\boxed{\mathscr{L}\{\mathrm{e}^{+at}\} = \frac{1}{s-a}, \quad \mathscr{L}\{\mathrm{e}^{-at}\} = \frac{1}{s+a}} \tag{1.8}$$

3. $f(t) = t$

   Durch partielle Integration erhält man:

$$F(s) = \int_0^\infty \underbrace{t}_{g} \cdot \underbrace{\mathrm{e}^{-st}}_{f'}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{s} \cdot \mathrm{e}^{-st} \cdot t\Big|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{1}{s} \cdot \mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{s}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{s^2}$$

$$\boxed{\mathscr{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}} \tag{1.9}$$

1.2.4 Linearität

Die Laplace-Transformation ist eine *lineare* Transformation. Das heißt, ein konstanter Faktor bleibt bei der Laplace-Transformation unverändert erhalten,

$$\mathscr{L}\{a \cdot f(t)\} = a \cdot \mathscr{L}\{f(t)\} = a \cdot F(s) \tag{1.10}$$

und bei einer Summe von Funktionen können die Summanden getrennt transformiert werden:

$$\mathscr{L}\{f(t) + g(t)\} = \mathscr{L}\{f(t)\} + \mathscr{L}\{g(t)\} = F(s) + G(s) \tag{1.11}$$

Allgemein:

$$\boxed{\mathscr{L}\{a \cdot f(t) + b \cdot g(t)\} = a \cdot F(s) + b \cdot G(s)} \tag{1.12}$$

Beweis:

$$\int_0^\infty [a\,f(t) + b\,g(t)]\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t = a \cdot \underbrace{\int_0^\infty f(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t}_{F(s)} + b \cdot \underbrace{\int_0^\infty g(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t}_{G(s)}$$

Ebenso können bei einer *Summe* im Laplace-Bereich die Summanden getrennt rücktransformiert werden:

$$\mathscr{L}^{-1}\{F(s) + G(s)\} = f(t) + g(t) \tag{1.13}$$

Achtung: Für das Produkt von Funktionen gilt das nicht!

$$\mathscr{L}\{f(t)\cdot g(t)\} \neq F(s)\cdot G(s)$$
$$\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\cdot G(s)\} = f(t) * g(t) \neq f(t)\cdot g(t)$$

Die Rücktransformation eines Produkts führt zum sogenannten *Faltungsprodukt* (bezeichnet mit „$*$“), auf das hier nicht näher eingegangen wird.

Beispiel:

$$f(t) = 1 - \mathrm{e}^{-3t}$$

$$F(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+3} = \frac{3}{s(s+3)} = \frac{3}{s}\cdot\frac{1}{s+3}$$

$$\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s}\cdot\frac{1}{s+3}\right\} \neq 3\cdot\mathrm{e}^{-3t} \;!!$$

1.2.5 Ableitungs- und Integralsatz

Für die Zeitableitung einer Funktion $x(t)$ erhält man im Laplace-Bereich mit Hilfe partieller Integration:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{\dot{x}(t)\} &= \int_0^\infty \underbrace{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}_{f'} \cdot \underbrace{\mathrm{e}^{-st}}_{g}\,\mathrm{d}t = x(t)\,\mathrm{e}^{-st}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty (-s)\,\mathrm{e}^{-st}\,x(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \underbrace{x(t)\,\mathrm{e}^{-s\cdot\infty}}_{0\ (\text{für }\mathrm{Re}(s)>0)} - x(0)\,\underbrace{\mathrm{e}^{-s\cdot 0}}_{1} + s\cdot\int_0^\infty x(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t \\
&= s\cdot\mathscr{L}\{x(t)\} - x(0)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{L}\{\dot{x}(t)\} = s\cdot X(s) - x(0)} \qquad \textbf{Ableitungssatz} \tag{1.14}$$

Allgemein gilt für die n-te Ableitung:

$$\boxed{\mathscr{L}\{\overset{(n)}{x}(t)\} = s^n X(s) - s^{n-1}x(0) - s^{n-2}\dot{x}(0) - \ldots s\overset{(n-2)}{x}(0) - \overset{(n-1)}{x}(0)} \tag{1.15}$$

Unter der Annahme, dass der Funktionswert x an der Stelle $t=0$ verschwindet, $x(0)=0$, was in der Praxis sehr oft vorkommt und in weiterer Folge stillschweigend angenommen wird, entspricht eine *Differenziation* im Zeitbereich einer *Multiplikation mit s* im Laplace-Bereich. Diese Regel hat weitreichende Konsequenzen für die Behandlung von Differenzialgleichungen.

Ebenso erhält man für das Zeitintegral einer Funktion $x(t)$ im Laplace-Bereich mit Hilfe partieller Integration:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left\{\int\limits_0^t x(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right\} &= \int\limits_0^\infty \underbrace{\int_0^t x(\tau)\,\mathrm{d}\tau}_{g} \cdot \underbrace{\mathrm{e}^{-st}}_{f'}\,\mathrm{d}t \\ &= \underbrace{\int\limits_0^t x(\tau)\,\mathrm{d}\tau \cdot \left(-\frac{1}{s}\right)\mathrm{e}^{-st}\Big|_0^\infty}_{0} + \int\limits_0^\infty x(t)\cdot\frac{1}{s}\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{s}\cdot\mathscr{L}\{x(t)\}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{L}\left\{\int\limits_0^t x(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right\} = \frac{1}{s}\cdot X(s)}$$ **Integralsatz** (1.16)

Eine *Integration* im Zeitbereich entspricht also einer *Division durch s* im Laplace-Bereich.

Beispiele:

1. Gesucht ist die Laplace-Transformierte von $f(t)=t$, die sich aus der bekannten Beziehung $\mathscr{L}\{1\}=1/s$ mit Hilfe des Integralsatzes leicht berechnen lässt:

$$\mathscr{L}\{t\} = \mathscr{L}\left\{\int_0^t \sigma(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right\} = \frac{1}{s}\cdot\mathscr{L}\{1\} = \frac{1}{s^2}$$

2. Lösung einer Differenzialgleichung mit Hilfe der Laplace-Transformation:

$$\dot{x}(t) + 3\,x(t) = \sigma(t)\,, \quad x(0)=0$$

$$s\,X(s) + 3\,X(s) = \frac{1}{s}$$

Diese Gleichung kann leicht nach $X(s)$ aufgelöst werden:

$$(s+3)\cdot X(s) = \frac{1}{s}\,, \quad X(s) = \frac{1}{s\,(s+3)} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{s\cdot(1+1/3\,s)}$$

Die Ermittlung der Zeitfunktion $x(t)$ erfolgt durch Rücktransformation mit Hilfe der Tabelle 1.2 zu:

$$x(t) = \frac{1}{3}\left(1-\mathrm{e}^{-3t}\right)$$

1.2.6 Dämpfungssatz

Wird die Zeitfunktion $x(t)$ mit dem Term e^{-at} multipliziert, wird sie also einer Dämpfung unterworfen, so erhält man für ihre Laplace-Transformierte:

$$\mathscr{L}\{x(t)\cdot \mathrm{e}^{-at}\} = \int_0^\infty x(t)\cdot \mathrm{e}^{-at}\cdot \mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty x(t)\cdot \mathrm{e}^{-(s+a)t}\,\mathrm{d}t = X(s+a)$$

$$\boxed{\mathscr{L}\{x(t)\cdot \mathrm{e}^{-at}\} = X(s+a)} \qquad \textbf{Dämpfungssatz} \qquad (1.17)$$

Eine Multiplikation mit e^{-at} im Zeitbereich entspricht also dem Ersatz des Parameters s durch $s+a$ im Laplace-Bereich.

Beispiele:

$$x(t) = 1\cdot \mathrm{e}^{-at} \quad \ldots \quad X(s) = \frac{1}{s+a}$$

$$x(t) = t\cdot \mathrm{e}^{-at} \quad \ldots \quad X(s) = \frac{1}{(s+a)^2}$$

$$x(t) = \mathrm{e}^{-at}\cdot \sin t \quad \ldots \quad X(s) = \frac{1}{(s+a)^2+1}$$

1.2.7 Zeitverschiebungssatz

Ersetzt man in der Zeitfunktion $x(t)$ die Zeit t durch $t-t_0$, so erhält man die um t_0 nach rechts verschobene Funktion:

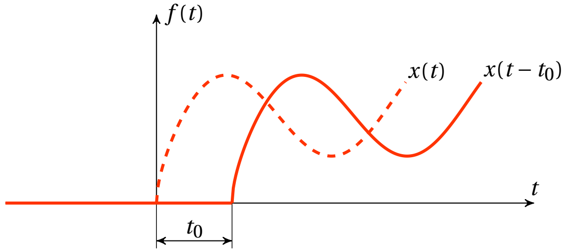


Bild 1.13

$$\mathscr{L}\{x(t-t_0)\} = \int_{t_0}^\infty x(t-t_0)\cdot \mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t$$

Mit der Substitution $t-t_0=\xi$ erhält man daraus:

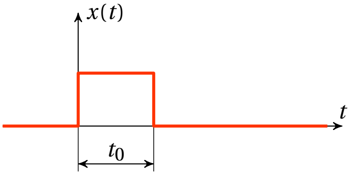
$$\int_0^\infty x(\xi)\cdot \mathrm{e}^{-(\xi+t_0)\,s}\,\mathrm{d}\xi = \mathrm{e}^{-st_0}\int_0^\infty x(\xi)\cdot \mathrm{e}^{-s\xi}\,\mathrm{d}\xi = \mathrm{e}^{-st_0}\,\mathscr{L}\{x(t)\} = X(s)\cdot \mathrm{e}^{-st_0}$$

$$\boxed{\mathscr{L}\{x(t-t_0)\} = X(s)\cdot \mathrm{e}^{-st_0}} \qquad \textbf{Zeitverschiebungssatz} \tag{1.18}$$

Eine Zeitverschiebung um t_0 nach rechts im Zeitbereich entspricht also einer Multiplikation der Laplace-Transformierten mit dem Faktor e^{-st_0}. Bemerkenswert ist die Ähnlichkeit mit dem Dämpfungssatz.

Beispiele:

1. Laplace-Transformierte eines Impulses:

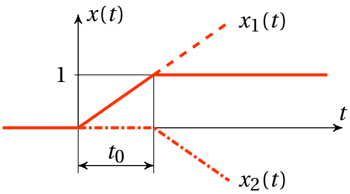


$$x(t) = \sigma(t) - \sigma(t-t_0)$$

$$X(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s}\,\mathrm{e}^{-st_0} = \frac{1}{s}\left(1-\mathrm{e}^{-st_0}\right)$$

Bild 1.14

2. Laplace-Transformierte einer Rampenfunktion:



$$x_1(t) = \frac{t}{t_0}\cdot\sigma(t)$$

$$x_2(t) = -\frac{t-t_0}{t_0}\cdot\sigma(t-t_0)$$

$$X(s) = \frac{1}{s^2\,t_0} - \frac{1}{s^2\,t_0}\,\mathrm{e}^{-st_0} = \frac{1}{s^2\,t_0}\left(1-\mathrm{e}^{-st_0}\right)$$

Bild 1.15

1.2.8 Anfangs- und Endwerttheorem

Anfangs- und Endwerttheorem geben Auskunft über das Zeitverhalten einer Funktion $x(t)$ im Zeitursprung $t=0_+$ (genauer gesagt beim rechtsseitigen Grenzwert); also über das dynamische Verhalten zu Beginn eines Ausgleichsvorgangs, bzw. über dessen Stationärzustand, nachdem der Ausgleichsvorgang beendet ist ($t\to\infty$). Bei Anwendung dieser Regeln kann das dynamische Verhalten eines Systems bis zu einem gewissen Grad direkt im Laplace-Bereich, also ohne Rücktransformation, beurteilt werden.

Ausgangspunkt für die Herleitung ist der Ableitungssatz:

$$s\cdot X(s) = x(0_+) + \mathscr{L}\{\dot{x}(t)\} = x(0_+) + \int_{0_+}^\infty \dot{x}(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t \tag{1.19}$$

Die Bildung des Grenzwerts für $s \to \infty$ liefert (da das Integral auf der rechten Seite von Gleichung (1.19) verschwindet):

$$\lim_{s\to\infty} s\,X(s) = x(0_+)$$

$$\boxed{\lim_{t\to 0_+} x(t) = \lim_{s\to\infty} s\,X(s)} \qquad \textbf{Anfangswerttheorem (AWT)} \qquad (1.20)$$

Die Bildung des (rechtsseitigen) Grenzwerts für $s \to 0$ liefert:

$$\lim_{s\to 0} s\,X(s) = x(0_+) + \int_{0_+}^{\infty} \dot{x}(t)\,\mathrm{d}t = x(0_+) + \left[x(\infty) - x(0_+)\right] = x(\infty) = \lim_{t\to\infty} x(t)$$

$$\boxed{\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} s\,X(s)} \qquad \textbf{Endwerttheorem (EWT)} \qquad (1.21)$$

Achtung:

Anfangs- und Endwerttheorem gelten nur, wenn die Grenzwerte für $t \to 0$ bzw. $t \to \infty$ tatsächlich existieren!

Beispiel:

$$X(s) = \frac{s+3}{s\,(s+5)} = \cdots = \frac{3}{5s} + \frac{2}{5\,(s+5)}$$

Zur Rücktransformation wird $X(s)$ zweckmäßigerweise in eine Summe von elementaren Funktionen aufgespalten (siehe Abschnitt 1.3.2). Im Zeitbereich erhält man:

$$x(t) = \left[\frac{3}{5} + \frac{2}{5}\cdot \mathrm{e}^{-5t}\right]\cdot \sigma(t)$$

Mit dem Anfangswerttheorem erhält man auch ohne Rücktransformation den Anfangswert

$$x(0) = \lim_{s\to\infty} s\,X(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{s+3}{s+5} = 1$$

und mit dem Endwerttheorem den Stationärwert:

$$x(\infty) = \lim_{s\to 0} s\,X(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s+3}{s+5} = \frac{3}{5}$$

1.2.9 Verständnisfragen

1. Wie kann bei zwei hintereinandergeschalteten RC-Gliedern Rückwirkungsfreiheit erreicht werden?
2. Warum kann eine Gleichrichterschaltung nicht mit der Laplace-Transformation beschrieben werden?
3. Ein mechanischer Stoßvorgang kann näherungsweise mit einem Dirac-Impuls beschrieben werden. Welche physikalische Größe entspricht der Fläche unter dem Impuls?
4. Ein System hat die Sprungantwort $x(t) = t \cdot \mathrm{e}^{-2t}$. Wie lautet die Stoßantwort?
5. Welche Dimension hat die Laplace-Variable?

1.2.10 Übungsaufgaben

1. Berechnen Sie die Laplace-Transformierte von folgenden Funktionen:

   (a) $2\sin t + \sin 2t$ (b) $2\sin t \cdot \sin 2t$ (c) $t^2 + t + 1$

   (d) $\mathrm{e}^t + 2\mathrm{e}^{2t} + 3\mathrm{e}^{3t}$ (e) $\cos^3 t$ (f) $\sin(t+a)$

2. Berechnen Sie die Laplace-Transformierte von folgenden stückweise zusammengesetzten Funktionen:

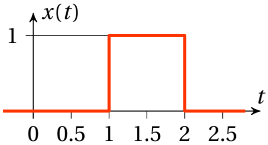
   (a)
   

   Bild 1.16

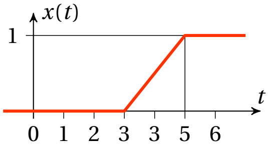
   (b)
   

   Bild 1.17

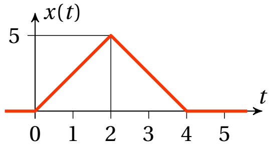
   (c)
   

   Bild 1.18

3. Berechnen Sie die Laplace-Transformierte von $f(t) = \mathrm{e}^{at} \cdot \sin bt$ durch partielle Integration.
4. Ermitteln Sie zu folgenden Funktionen $X(s)$ mit Hilfe der Tabelle zur Laplace-Transformation die zugehörigen Zeitfunktionen $x(t)$:

   (Hinweis: Die Funktionen sind zuvor in entsprechende Form zu bringen!)

   (a) $\dfrac{1}{s(s+1)}$ (b) $\dfrac{1}{s(s+1)(s+2)}$ (c) $\dfrac{s+1}{s+2}$

   (d) $\dfrac{s+1}{s(s+2)}$ (e) $\dfrac{s+1}{(s+2)^2}$ (f) $\dfrac{s+1}{s^2+2}$

   (g) $\dfrac{s+1}{2s}$ (h) $\dfrac{1}{s^2(s+2)}$ (i) $\dfrac{1+10s}{s(1+2s)}$

   (j) $\dfrac{1+10s}{s(1+2s)(1+s)}$

5. Ermitteln Sie mit Hilfe von Anfangs- und Endwerttheorem die Anfangswerte und Stationärwerte der Funktionen des vorigen Beispiels.

ENDE DES
PROBEKAPITELS