Matrizen und Determinanten 3

Matrizengleichungen

In Abschnitt 3.3 wird gezeigt, wie man ein lineares Gleichungssystem in Form einer Matrixgleichung anschreiben und anschließend mithilfe der Matrizenrechnung allgemein lösen kann. Häufig wird versucht, allgemeine Sachverhalte (Modelle) in Form von Matrizengleichungen zu beschreiben. Der Vorteil liegt unter anderem darin, dass diese Schreibweise eine allgemeingültige Formulierung, unabhängig von der Anzahl der Gleichungen und Unbekannten, ermöglicht. Sofern die benötigten Rechenoperationen definiert sind, lassen sich diese Matrizengleichungen nach den verschiedenen Variablen auflösen und liefern somit eine allgemeine Berechnungsvorschrift für die gesuchten Größen.

Z3.1 Löse die Matrizengleichung $A \cdot X - B = C \cdot X$ nach X, unter der Voraussetzung, dass die dafür notwendigen Rechenoperationen definiert sind.

Lösung:

$A \cdot X - B = C \cdot X \quad | + B$

$A \cdot X = C \cdot X + B \quad | - C \cdot X$

$A \cdot X - C \cdot X = B \quad |$ ● Rechtsseitig herausheben

$(A - C) \cdot X = B \quad | (A - C)^{-1} \cdot ...$ ● Linksseitig multiplizieren

$(A - C)^{-1} \cdot (A - C) \cdot X = (A - C)^{-1} \cdot B$

$X = (A - C)^{-1} \cdot B$

Z3.2 Löse die folgenden Matrizengleichungen nach X.

a) $X \cdot A - B = X \cdot C$

b) $X \cdot A \cdot B + A - X \cdot C = D$

c) $D - A \cdot X = C \cdot X$

d) $X \cdot A + A \cdot C = B$

e) $X \cdot A \cdot B = C$

f) $A \cdot X \cdot B = C$

g) $A + B \cdot X = 3B$

h) $mX + C \cdot D = B - nX$ mit $m, n \in \mathbb{R}$

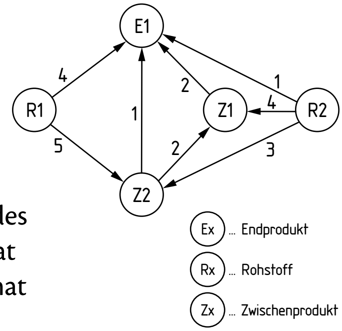
Z3.3 Löse die folgenden Matrizengleichungen nach X.

a) $A^{-1} \cdot X \cdot A = C$ ***b)*** $X^{-1} \cdot D \cdot X = (B \cdot X)^{-1} \cdot C$ ***c)*** $(A + B)^{-1} \cdot X = A \cdot X + B \cdot X$

Gozintograph

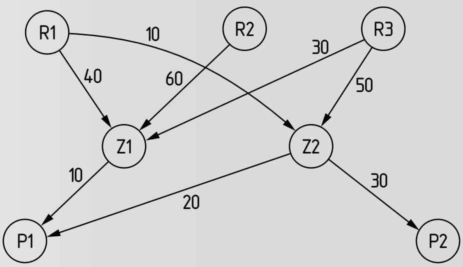
Ein **Gozintograph** (Gozinto-Graph) oder **Verflechtungsgraph** bezeichnet eine graphische Methode, um die Zusammenhänge einzelner Teilbereiche bzw. Teilprodukte in üblicherweise mehrstufigen Produktionsprozessen übersichtlich darzustellen.

Die Rohstoffe, Zwischen- und Endprodukte können als Knoten des Graphen aufgefasst werden. Die Kanten sind gerichtet, die Produktionszahlen entsprechen den Längen der Kanten (vergleiche Abschnitt „Graphentheorie").



Der Name Gozintograph stammt von Andrew Vazsonyi (ungarischer Mathematiker, 1916 – 2003), der seine Entwicklung des Gozintographs dem fiktiven italienischen Mathematiker „Zepartzat Gozinto" zuschrieb. Tatsächlich stand dieser Name für „the part that goes into", phonetisch: „ze part zat goz into".

Z3.4 Aus den drei Rohstoffen R1, R2 und R3 werden Zwischenprodukte Z1 und Z2 produziert, die wiederum zu den Endprodukten P1 und P2 weiterverarbeitet werden. Die für die einzelnen Produktionsstufen (jeweils für die Produktion einer Mengeneinheit) notwendigen Mengeneinheiten (ME) sind dem Gozintographen zu entnehmen.



Welche Mengen werden von jedem Rohstoff benötigt, um 700 ME von P1 und 1200 ME von P2 zu erzeugen?

Lösung:

- Die im Gozintographen enthaltenen Informationen lassen sich in Form von Matrizen darstellen.

$$\begin{array}{c|cc} & Z1 & Z2 \\ \hline R1 & 40 & 10 \\ R2 & 60 & 0 \\ R3 & 30 & 50 \end{array} \Rightarrow B1 = \begin{pmatrix} 40 & 10 \\ 60 & 0 \\ 30 & 50 \end{pmatrix}$$

- Die Bedarfsmatrix B1 beschreibt den Zusammenhang zwischen den Rohstoffen und den Zwischenprodukten.

$$\begin{array}{c|cc} & P1 & P2 \\ \hline Z1 & 10 & 0 \\ Z2 & 20 & 30 \end{array} \Rightarrow B2 = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 20 & 30 \end{pmatrix}$$

- Die Bedarfsmatrix B2 beschreibt den Zusammenhang zwischen den Zwischenprodukten und den Endprodukten.

$$\begin{pmatrix} 40 & 10 \\ 60 & 0 \\ 30 & 50 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 20 & 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600 & 300 \\ 600 & 0 \\ 1\,300 & 1\,500 \end{pmatrix}$$

- Das Produkt der beiden Bedarfsmatrizen beschreibt den direkten Zusammenhang zwischen den Rohstoffen und den Endprodukten.

$$\begin{pmatrix} 600 & 300 \\ 600 & 0 \\ 1\,300 & 1\,500 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 700 \\ 1\,200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 780\,000 \\ 420\,000 \\ 2\,710\,000 \end{pmatrix}$$

- Um zu berechnen, welche Mengen von jedem Rohstoff benötigt werden, um 700 ME von P1 und 1 200 ME von P2 zu erzeugen, benötigt man die Matrizenmultiplikation.

Man benötigt 780 000 ME von Rohstoff 1, 420 000 ME von Rohstoff 2 und 2 710 000 ME von Rohstoff 3.

Bemerkungen:
- Man nennt die in Aufgabe Z3.4 verwendeten Matrizen auch **Stücklisten**.
- Es können auch mehrere Produktionsstufen zur Fertigstellung der Endprodukte notwendig sein.

Z3.5 Gegeben sind folgende Stücklisten:

	Z1	Z2	Z3
R1	2	3	1
R2	4	1	2

und

	P1	P2
Z1	3	0,2
Z2	1	2
Z3	0,5	3

mit Ri ... Rohstoff i, Zi ... Zwischenprodukt i, Pi ... (End-)Produkt i

1) Zeichne den zu dieser Produktion passenden Gozintographen.
2) Gib die Bedarfsmatrix B1 für den Zusammenhang Rohstoffe/Zwischenprodukte und die Bedarfsmatrix B2 für den Zusammenhang Zwischenprodukte/Endprodukte an.
3) Beschreibe allgemein, wie die Matrix D für den direkten Zusammenhang Rohstoffe/Endprodukte zu berechnen ist. Berechne anschließend diese Matrix.
4) Welche Mengen an Rohstoffen müssen eingekauft werden, wenn von P1 30 ME und von P2 55 ME produziert werden sollen?
5) Wie viele Zwischenprodukte werden bei dieser Produktion hergestellt? Erkläre allgemein, wie man diese Berechnung durchführen kann.

Z3.6 Zum Produktionsprozess aus Z3.5 wird ein weiterer Produktionsschritt S mit zwei Zwischenprodukten hinzugefügt:

	Z1	Z2	Z3
R1	2	3	1
R2	4	1	2

,

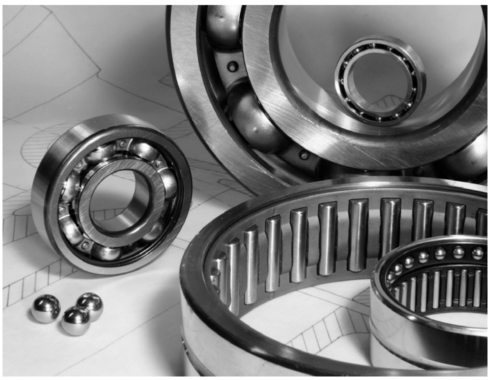
	S1	S2
Z1	3	0,2
Z2	1	2
Z3	0,5	3

und

	P1	P2
S1	3	4
S2	2	1,5

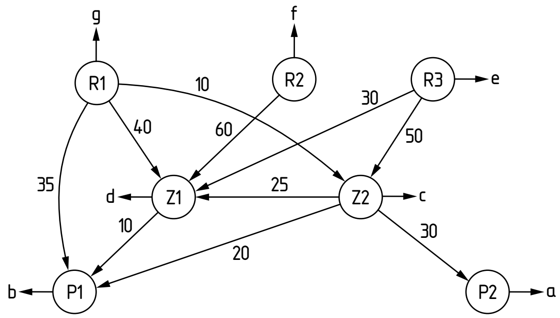
1) Benenne die Bedarfsmatrizen der Stückkostenlisten mit B1, B2 und B3 und gib sie an.
2) Beschreibe allgemein, wie die Matrix für den direkten Zusammenhang Rohstoff/Endprodukt zu berechnen ist. Führe anschließend diese Berechnung durch.
3) Wie lassen sich bei gegebenem Produktionsvektor $\vec{x}$ die Rohstoffmenge und die Menge der bei der Produktion erzeugten Zwischenprodukte berechnen?
4) Berechne die Rohstoffmenge und die Menge der Zwischenprodukte für $\vec{x} = \begin{pmatrix} 20 \\ 45 \end{pmatrix}$.

Meist lassen sich die Zusammenhänge Rohstoffe/Zwischenprodukte/Endprodukte aber nicht so eindeutig abgrenzen, da beispielsweise auch Rohstoffe im letzten Schritt der Endproduktion nochmals direkt zugesetzt werden oder Zwischenprodukte bzw. Rohstoffe aus der Produktion entnommen werden müssen. Dann ist die scharfe Trennung der einzelnen Produktionsschritte nicht mehr möglich, wie folgendes Beispiel zeigen soll.



Produktionsprozess mit Verzweigungen

Die Verallgemeinerung eines Produktionsprozesses soll anhand des Gozintographen von Seite 6 gezeigt werden.



Die Unbekannten a, b, c, d, e, f, g stehen in diesem Graphen für den externen Bedarf, also jene Mengen, die von den einzelnen Zwischen- bzw. Endprodukten entnommen werden sollen. Sie werden häufig als **primärer Bedarfsvektor** $\vec{p}$ bezeichnet, wobei üblicherweise zuerst die Rohstoffe, dann die Zwischenprodukte und zuletzt die Endprodukte angeführt sind.

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} g \\ f \\ e \\ d \\ c \\ b \\ a \end{pmatrix}$$

Um nun den mengenmäßigen Zusammenhang zwischen den Rohstoffen, den Zwischen- und den Endprodukten anzuschreiben, bedarf es einer Matrix, die direkt den Zusammenhang aller beteiligten Produktionsebenen abbildet. Diese Matrix wird **Direktbedarfsmatrix D** genannt.

$$\begin{array}{c} \\ R1 \\ R2 \\ R3 \\ Z1 \\ Z2 \\ P1 \\ P2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} R1 & R2 & R3 & Z1 & Z2 & P1 & P2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 40 & 10 & 35 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 60 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 30 & 50 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 25 & 0 & 20 & 30 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Gesucht ist nun der so genannte **Gesamtbedarfsvektor** $\vec{g}$, der für alle Produktionsebenen die benötigten Mengeneinheiten angibt. Es muss daher gelten: $\vec{p} + D \cdot \vec{g} = \vec{g}$

Die Gleichung lässt sich mit den bekannten Regeln für Matrizengleichungen nach $\vec{g}$ lösen.

Berechnung des **Gesamtbedarfsvektors** $\vec{g}$:

$\vec{g} = (E - D)^{-1} \cdot \vec{p}$ mit $\vec{p}$ ... primäre Bedarfsmatrix, D ... Direktbedarfsmatrix

Bemerkung: Die Matrix (E – D) nennt man die **Technologiematrix T**, ihre inverse Matrix T^{-1} wird als **Gesamtbedarfsmatrix** bezeichnet.

Z3.7 Bestimme den Gesamtbedarf des Produktionsprozesses aus obiger Abbildung für a = 150, b = 120, c = 40, d = 30, e = 25, f = 15, g = 20.

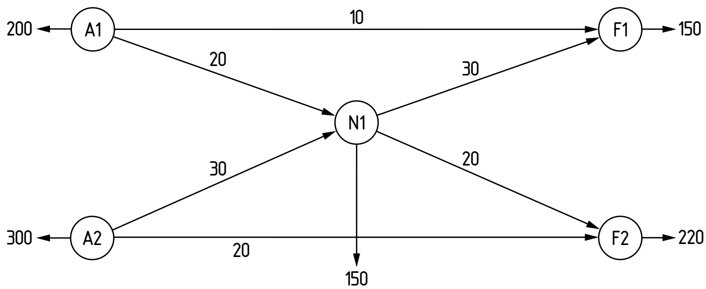
Z3.8 Beschreibe, welche Informationen man aus der Direktbedarfsmatrix und der Gesamtbedarfsmatrix ablesen kann.

Z3.9 ***a)*** Die folgende Stücktabelle zeigt die direkte Verflechtung zwischen den Rohstoffen R1 bis R3, den beiden Zwischenprodukten Z1 und Z2 sowie den Endprodukten P1 und P2.

für → / ↓ von	R1	R2	R3	Z1	Z2	P1	P2
R1	0	0	0	3	5	1	0
R2	0	0	0	2	6	0	0
R3	0	0	0	1	1	2	2
Z1	0	0	0	0	0	3	2
Z2	0	0	0	0	0	2	4
P1	0	0	0	0	0	0	0
P2	0	0	0	0	0	0	0

1) Zeichne den zugehörigen Verflechtungsgraphen.
2) Bestimme die Technologiematrix und die Gesamtbedarfsmatrix.
3) Wie hoch ist der Gesamtbedarf an Rohstoffen, wenn je 200 Stück der Endprodukte, 100 Stück der Zwischenprodukte und 10 Stück der Rohstoffe ausgeliefert werden sollen?

b) Aus zwei Anfangsprodukten A1 und A2 sollen mit Hilfe eines Nebenprodukts N1 zwei verschiedene Fertigprodukte F1 und F2 hergestellt werden. Die Verflechtung der Produktionsebenen und den externen Bedarf entnimm dem Gozintographen.



Wie viele Anfangsprodukte sind herzustellen, um den Gesamtbedarf zu befriedigen?

Z3.10 ***1)*** Für die Herstellung von 30 Karamellbonbons benötigt man $\frac{1}{4}\,\ell$ Kondensmilch (mit einer Dichte von $1{,}3\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$), 3 dag Butter, 20 dag Zucker und 2 Esslöffel (= 30 g) Honig, für die Herstellung von 20 Honigzuckerln 6 dag Butter, 25 dag Zucker und einen Esslöffel Honig. Stelle die Rezeptur graphisch dar, gib alle Größen in der gleichen Einheit an.
2) Um Zeit zu sparen, stellt man zuerst eine Mischung aus 45 dag Zucker, 6 dag Zucker und einem Esslöffel Honig her, teilt diese in zwei gleich große Hälften und gibt zur ersten Hälfte die Kondensmilch und den zweiten Löffel Honig und zur zweiten Hälfte die fehlende Butter dazu. Stelle diese Rezepturen graphisch dar.
3) Beschreibe die Unterschiede zwischen den beiden Gozintographen.

Auch wenn die Trennung der einzelnen Produktionsebenen, wie in der Abbildung auf Seite 8, im Allgemeinen nicht so klar (in diesem Fall linear) aufgebaut ist, lassen sich Bedarfsmatrizen für die Zusammenhänge einzelner Produktionsebenen erstellen.

Z3.11 ***1)*** Bestimme aus dem Gozintographen auf Seite 8 die Bedarfsmatrizen der einzelnen direkten Produktionszusammenhänge.

2) Gib die Gleichung des Gesamtbedarfs an Rohstoffen mithilfe dieser Bedarfsmatrizen an.

Lösung:

1) $R\_Z = \begin{pmatrix} 40 & 10 \\ 60 & 0 \\ 30 & 50 \end{pmatrix}$ • Zusammenhang Rohstoffe/Zwischenprodukte

$R\_P = \begin{pmatrix} 35 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ • Zusammenhang Rohstoffe/Endprodukte

$Z\_Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 25 & 0 \end{pmatrix}$ • Zusammenhang der Zwischenprodukte

$Z\_P = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 20 & 30 \end{pmatrix}$ • Zusammenhang Zwischenprodukte/Endprodukte

2) Gesamtbedarf an Rohstoffen

$$\vec{g_r} = \begin{pmatrix} g \\ f \\ e \end{pmatrix} + (R\_Z + R\_Z \cdot Z\_Z) \cdot \begin{pmatrix} d \\ c \end{pmatrix} + ((R\_Z + R\_Z \cdot Z\_Z) \cdot Z\_P + R\_P) \cdot \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$$

Z3.12 ***1)*** Berechne $\vec{g_r}$ mit den Angaben aus Z3.7.

2) Kontrolliere die Ergebnisse aus ***1)*** mithilfe der Ergebnisse von Z3.7.

Z3.13 Überlege, was der Ausdruck (R_Z + R_Z · Z_Z) bedeutet. Welche Informationen enthält das Ergebnis dieser Berechnung? Formuliere deine Antwort in drei bis fünf Sätzen.

Z3.14 Überlege, was der Ausdruck ((R_Z + R_Z · Z_Z) · Z_P + R_P) bedeutet. Welche Informationen enthält das Ergebnis dieser Berechnung? Formuliere deine Antwort in fünf bis zehn Sätzen.

Z3.15 Lässt sich mithilfe der Bedarfsmatrizen aus Z3.11 auch eine Gesamtbedarfsmatrix ermitteln, die den Zusammenhang Zwischenprodukte/Endprodukte beschreibt? Begründe deine Aussage.

Z3.16 Wie lassen sich mithilfe der Bedarfsmatrizen aus Z3.11 die zu produzierenden Zwischenprodukte bestimmen? Erkläre deine Vorgangsweise.

Z3.17 Formuliere eine allgemeine Anleitung, wie bei mehrstufigen Produktionsprozessen mit Verzweigungen der Gesamtbedarfsvektor der Rohstoffe berechnet werden kann.

Z3.18 Verwende den Gozintographen aus Z3.9 b) und bestimme den Rohstoffbedarf mit Hilfe der Bedarfsmatrizen der einzelnen Produktionsstufen. Verwende dazu die Anleitung aus Z3.17.