Anwendungen der Differentialrechnung

Kosten- und Preistheorie

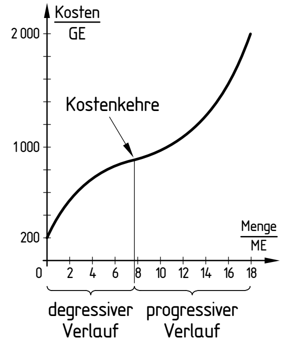
In der Kosten- und Preistheorie befasst sich die Wirtschaftsmathematik mit der Analyse von Kosten, Erlösen und Gewinnen sowie von Angebot und Nachfrage. Dabei werden möglichst einfache mathematische Modellfunktionen für reale Situationen entwickelt, mit deren Hilfe man Kostenverläufe, ihre Veränderungen und Auswirkungen interpretieren kann. Um die Aufgaben möglichst allgemein gültig zu halten, wird statt „Euro" der Begriff „Geldeinheit (GE)" und statt „Stückzahl" der Begriff „Mengeneinheit (ME)" verwendet.

Die Kostenfunktion K(x)

Da die Gesamtkosten, die bei jeder Produktion bzw. beim Handel von Waren entstehen, von der produzierten Menge abhängen, wählt man als mathematisches Modell dieser Abhängigkeit die Funktion $K(x)$. Dabei entspricht x der Menge, Stückzahl oder Masse des hergestellten Produkts, diese Menge wird in Mengeneinheiten (ME) angegeben. Kosten werden üblicherweise in Geldeinheiten (GE) angegeben. Die Gesamtkosten $K(x)$ setzen sich aus zwei Größen zusammen:

- **Fixkosten:** Diese fallen unabhängig von der Produktionsmenge an, auch dann, wenn nichts produziert wird. Sie werden daher mit $K(0)$ bezeichnet, wie zB Büromieten, Personalkosten, Kreditrückzahlungsraten und vieles mehr.
- **variablen Kosten K_v:** Diese sind von der Produktionsmenge abhängig, dazu zählen zB Materialkosten oder Transportkosten.

Obwohl man Kostenverläufe durch verschiedene Funktionen darstellen könnte, hat sich in der Praxis gezeigt, dass die beobachteten Daten oft einen s-förmigen Verlauf zeigen. Es eignet sich daher eine Polynomfunktion 3. Grads (kubische Funktion) häufig am besten, um diesen Verlauf zu beschreiben.



Bei geringeren Produktionsmengen wachsen die Kosten verhältnismäßig langsamer als die Stückzahl, zB durch eine rationellere Arbeitsweise. Man spricht daher von **degressiven Kosten** (latein: degredi = hinabsteigen).

Bei höheren Produktionsmengen wachsen hingegen die Kosten verhältnismäßig schneller als die Stückzahl, zB durch eine höhere Abnutzung der Maschinen, durch teurere Personalkosten wegen zusätzlicher Überstunden. Man spricht unter solchen Bedingungen von **progressiven Kosten** (latein: progressus = Fortschritt).

Die **erste Ableitung der Kostenfunktion** $K'(x)$ entspricht der **momentanen Änderungsrate der Gesamtkosten** bei einer Produktionssteigerung von einer Mengeneinheit und wird als **Grenzkostenfunktion** bezeichnet.

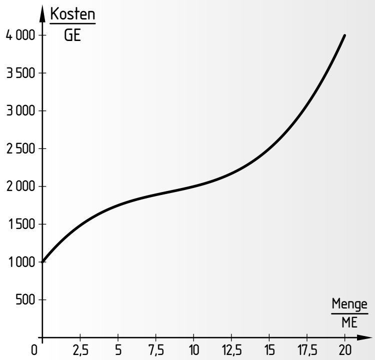
Die **zweite Ableitung der Kostenfunktion** $K''(x)$ definiert den **Kostenverlauf**. Der Übergang vom degressiven zum progressiven Kostenverlauf wird als **Kostenkehre** bezeichnet und entspricht dem Wendepunkt der Kostenfunktion, an dieser Stelle gilt: $K''(x) = 0$

Z5.1 Untersuche den Verlauf der Kostenfunktion $K(x) = x^3 - 25x^2 + 250x + 1\,000$.

1) Stelle diese Kostenfunktion im Intervall [0; 20] grafisch dar.
2) Gib die Funktionsgleichung der Grenzkostenfunktion an.
3) Wo liegt die Kostenkehre?
4) An welcher Stelle hat die Kostenfunktion ihren minimalen Anstieg?
5) In welchem Produktionsbereich ist der Kostenverlauf degressiv, in welchem progressiv?
6) Was bewirkt eine Erhöhung der Fixkosten am Funktionsgraphen?

Lösung:

1) Funktionsgraph:



2) $K'(x) = 3x^2 - 50x + 250$ ● Grenzkostenfunktion $\triangleq$ 1. Ableitung

3) $K''(x) = 6x - 50$ ● Kostenkehre $\triangleq$ Wendepunkt von K(x)
$K''(x) = 0 \;\Rightarrow\; 6x - 50 = 0 \;\Rightarrow\; x = 8{,}\dot{3}$
Die Kostenkehre tritt bei rund 8,33 ME ein.

4) $K(x) = x^3 - 25x^2 + 250x + 1\,000$ ● Der Funktionsgraph ist monoton steigend.
$K'(x) = 3x^2 - 50x + 250$ ● minimaler Anstieg $\triangleq$ Minimum der Funktion K′(x)
$K''(x) = 6x - 50 = 0 \;\Rightarrow\; x = 8{,}\dot{3}$
$K'''(8{,}\dot{3}) > 0$ ... Minimum
Der geringste Anstieg wird bei der Kostenkehre erreicht.

5) degressiver Kostenverlauf: $x \in [0; 8{,}\dot{3}[$
progressiver Kostenverlauf: $x \in \,]8{,}\dot{3}; 20]$

6) Die Höhe der Fixkosten ist am konstanten Glied $a_0 = 1\,000$ abzulesen.
Eine Erhöhung der Fixkosten bewirkt eine Verschiebung der Kostenfunktion K(x) in die positive y-Richtung.

Z5.2 ***1)*** Die Gleichung einer kubischen Kostenfunktion soll aus folgenden Daten ermittelt werden:

x in ME	20	60	120	140
K(x) in GE	64 480,00	74 080,00	146 080,00	195 040,00

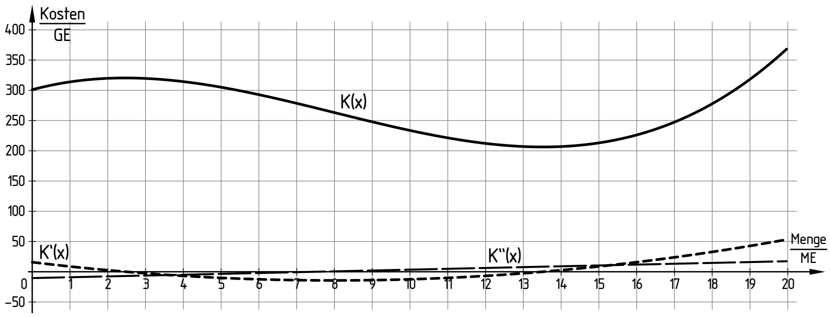
2) Gib die Gleichung der Grenzkostenfunktion an.
3) Stelle die Kostenfunktion und die Grenzkostenfunktion in einem Koordinatensystem grafisch dar.

Z5.3 Eine Kostenfunktion $K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ weist bei 10 ME die Kostenkehre auf. Die Grenzkosten liegen bei der Kostenkehre in einer Höhe von 100,00 GE. Die Gesamtkosten bei einer Produktionsmenge von 50 ME liegen bei 71 200,00 GE. Die Fixkosten sind 1 200,00 GE.
1) Gib die Gleichung der Kostenfunktion K(x) an.
2) Gib die Gleichung der Grenzkostenfunktion an.

Z5.4 Von einer Kostenfunktion 3. Grads kennt man folgende Werte:
$K(0) = 360\,000$; $K'(0) = 2\,000$; $K(10) = 379\,220$; $K''(10) = -14{,}8$
1) Formuliere diese vier Angaben in eigenen Worten.
2) Ermittle die Gleichung der Kostenfunktion.

Z5.5 Recherchiere eigenständig mithilfe von Schulbüchern, Lexika oder dem Internet.
a) Welche Gründe gibt es für den häufig s-förmigen Verlauf von Kostenfunktionen?
b) Erkläre den Zusammenhang zwischen der 2. Ableitung einer Kostenfunktion und dem Kostenverlauf. Finde aus entsprechender Literatur noch weitere Bezeichnungen für degressiven bzw. progressiven Kostenverlauf.
c) Was wird als regressiver Kostenverlauf bezeichnet und in welchen Situationen kann es zu solchen Verläufen kommen?

Z5.6 Lies aus der Grafik dieser Kostenfunktion ab.
1) Wie hoch sind die Fixkosten?
2) In welchen Produktionsbereichen sind die Kosten degressiv, progressiv bzw. regressiv?
3) Wo liegt die Kostenkehre und was ist ihre wirtschaftliche Bedeutung?



Hinweis: Kosten, die mit steigender Beschäftigung sinken und mit sinkender Beschäftigung steigen, werden als **regressive Kosten** bezeichnet. Diese sind in der Praxis sehr selten, zB wird um so weniger Energie zum Heizen benötigt, je mehr Menschen in einem Raum sind.

Die Stückkostenfunktion S(x) und das Betriebsoptimum

Eine wichtige Kenngröße für ein Unternehmen sind neben den Gesamtkosten die (mittleren) Kosten für ein Produkt, die so genannten **Stückkosten** $S(x) = \frac{K(x)}{x}$.

Das **Minimum der Stückkostenfunktion** x_{opt} wird als **Betriebsoptimum** bezeichnet, die dazugehörigen Stückkosten als **langfristige Preisuntergrenze**. Die Stückkosten pro ME erreichen dort ihr Minimum, somit ist an dieser Stelle die erste Ableitung $S'(x_{opt}) = 0$. Die langfristige Preisuntergrenze legt damit jenen Preis pro ME fest, der mindestens verlangt werden muss, um gerade noch kostendeckend zu produzieren.

Die variable Stückkostenfunktion V(x) und das Betriebsminimum

Manchmal erfordert es die Marktsituation, dass ein Betrieb für einen kurzen Zeitraum darauf verzichtet, kostendeckend zu arbeiten und ausschließlich die variablen Kosten durch den Preis decken kann. Die variable Stückkostenfunktion ist definiert als $V(x) = \frac{K_V(x)}{x} = \frac{K(x) - K(0)}{x}$.

Das **Minimum der variablen Stückkostenfunktion** x_{min} wird als **Betriebsminimum** bezeichnet, die dazugehörigen variablen Stückkosten als **kurzfristige Preisuntergrenze**. Die mittleren variablen Kosten pro ME erreichen dort ihr Minimum, für die erste Ableitung gilt an dieser Stelle: $V'(x_{min}) = 0$. Die kurzfristige Preisuntergrenze legt damit jenen Preis pro ME fest, der mindestens verlangt werden muss, um gerade noch die variablen Kosten zu decken.

Z5.7 Von einer Kostenfunktion $K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ betragen die Fixkosten 250,00 GE. Weiters sind für bestimmte Mengen die entsprechenden Gesamtkosten bekannt:

x in ME	10	20	25
K(x) in GE	302,00	336,00	350,00

1) Gib die Gleichung dieser Kostenfunktion an.
2) Berechne das Betriebsoptimum und die langfristige Preisuntergrenze.
3) Berechne das Betriebsminimum und die kurzfristige Preisuntergrenze.

Z5.8 Die Kostenkehre einer kubischen Kostenfunktion liegt bei x = 18 ME. Die Grenzkosten an dieser Stelle betragen 1 026,00 GE, die Stückkosten 2 025,00 GE. Der Betrieb hat mit Fixkosten von 12 150,00 GE zu rechnen. Gib die Gleichung der Kostenfunktion an.

Z5.9 Nach der Beobachtung der Produktionskosten eines Betriebs kennt man folgendes Datenmaterial:

x in ME	100	120	130	150
K(x) in GE	12 900,00	15 512,00	17 025,00	20 525,00

1) Gib die Funktionsgleichung einer Kostenfunktion 3. Grads an.
2) Wie hoch sind die Fixkosten?
3) Bestimme das Betriebsoptimum und die langfristige Preisuntergrenze.
4) Berechne das Betriebsminimum und die kurzfristige Preisuntergrenze.

Z5.10 Berechne jene Produktionsmenge sowie den dazugehörigen Verkaufspreis, bei der ein Betrieb mit der Kostenfunktion $K(x) = 0{,}1x^3 - x^2 + 4x + 5$ sein Betriebsminimum erreicht.