4.1 Exponentialfunktionen

Wachstumsvorgänge

Z4.1 Ein Grundstück wird mit Reihenhäusern bebaut. Dabei kann die Anzahl N der nach der Zeit t Tagen fertig gestellten Häuser durch die Gleichung $N(t) = 1{,}008\,032^t$ beschrieben werden.

1) Wie viele Häuser standen zu Beginn der Bauzeit bereits auf dem Grundstück?
2) Welche Bedeutung hat die Zahl 1,008 032?
3) Wie viele fertig gestellte Häuser gibt es nach einem Jahr?
4) Gib eine Wertetabelle an und stelle die Funktion im Intervall [0; 1 000] grafisch dar.
5) Ermittle mithilfe der Zeichnung, nach welcher Zeit 600 Häuser fertig gestellt sein werden.
6) Ab welchem Zeitpunkt kann die Funktion nicht mehr sinnvoll angewandt werden?

Lösung:

1) $N(0) = 1{,}008\,032^0 = 1$ ● Zu Beginn: t = 0 Tage
Zu Baubeginn stand ein Haus auf dem Grundstück.

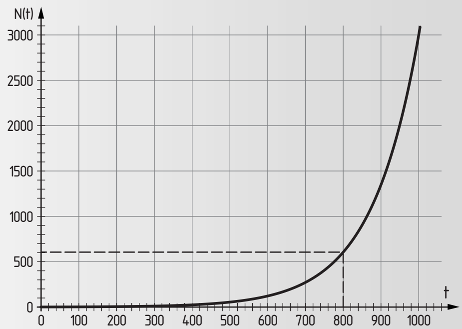
2) Die Zahl 1,008 032 gibt den Wachstumsfaktor an.

3) $N(365) = 1{,}008\,032^{365} = 18{,}540...$ ● 1 Jahr = 365 Tage
Nach einem Jahr gibt es 18 fertig gestellte Häuser.

4) Wertetabelle

t	N(t)
0	1
100	2,2...
200	4,9...
300	11,0...
400	24,5...
500	54,5...
600	121,5...
700	270,4...
800	601,8...
900	1 339,3...
1 000	2 980,7...

Funktionsgraph



5) Nach ungefähr 800 Tagen sind 600 Häuser fertig gestellt.

6) Die Funktion wächst ab 800 Tagen zu rasch an, um die Realität zu beschreiben.

Z4.2 Die Firma „Schön & Schick“ führt ein neues Produkt ein. Erfahrungsgemäß kann die Anzahl N der Personen, die dieses Produkt in einem bestimmten Zeitraum seit Markteinführung gekauft haben, durch die exponentielle Funktion $N(t) = a \cdot b^{\frac{t}{\text{Monat}}}$ beschrieben werden.

1) Berechne die Konstanten a und b, wenn 120 Personen das Produkt sofort kaufen (dh. t = 0 Monate) und 30 weitere Personen das Produkt innerhalb des nächsten Monats erwerben.

2) Gib eine Wertetabelle für die ersten vier Jahre nach Markteinführung an.

3) Stelle die Funktion grafisch dar.

4) Wie viele Personen kaufen das Produkt in den ersten eineinhalb Jahren?

5) Wie viele Personen kaufen das Produkt im 3. Monat nach Markteinführung?

6) Ab welchem Zeitpunkt eignet sich die Funktion nicht mehr für die Berechnungen? Begründe.

Z4.3 Aufgrund des bei größeren Produktionszahlen benötigten höheren Aufwands unterliegen die Produktionskosten für ein bestimmtes Produkt einem exponentiellen Wachstum. Für dieses Produkt kann man von der Gesamtkostenfunktion $K(n) = a \cdot b^n$ ausgehen, wobei n Stück die monatliche Produktionszahl darstellt.

1) Gib eine Wertetabelle im Intervall [0; 150 000] an. Wähle eine geeignete Schrittweite.

2) Stelle die Funktion grafisch dar.

3) Wie groß sind die Produktionskosten bei einer Produktion von 35 000 Stück?

4) Lies aus der Zeichnung ab, bei welcher Stückzahl Produktionskosten in der Höhe von 30 000,00 € entstehen.

5) Für welchen Bereich kann die Funktion $K(n) = a \cdot b^n$ zur Berechnung der Produktionskosten eingesetzt werden? Begründe.

a) a = 7 500,00 €; b = 1,000 008 ***b)*** a = 3 500,00 €; b = 1,000 017

Z4.4 Ein Versandhaus betreibt ein firmeneigenes Lieferservice. Die Lieferzeit t Tage für eine Bestellung hängt von der Anzahl der Gesamtbestellungen ab. In einem bestimmten Bereich lässt sich diese Lieferzeit durch die Funktion $t(n) = 2{,}75 \cdot e^{k \cdot n}$ beschreiben. Dabei gibt n die Anzahl der Bestellungen innerhalb einer Woche an.

1) Berechne den Koeffizienten k, wenn sich bei einer Zahl von 6 293 Bestellungen eine Lieferzeit von fünf Tagen ergibt.

2) Stelle die Funktion im Intervall [0 Bestellungen, 20 000 Bestellungen] grafisch dar.

3) Wie viele Tage dauert eine Auslieferung, wenn in einer Woche 9 800 Bestellungen eingehen?

4) Wie viele Bestellungen sind eingegangen, wenn die Lieferzeit zwei Wochen beträgt? Lies die Antwort aus der Zeichnung ab.

5) Überprüfe das Ergebnis aus ***4)*** rechnerisch.

6) Unzufriedene Kunden bestellen weniger. Ab welcher Anzahl von Bestellungen wäre es sinnvoll, mehr Personal einzustellen, um die Lieferzeit zu verkürzen? Begründe.

Abklingvorgänge (Abnahmevorgänge)

Z4.5 Am 1. Jänner 1980 lebten in einer österreichischen Kleinstadt 45 744 Menschen. Diese Einwohnerzahl verringerte sich die folgenden zehn Jahre jährlich um 1,75 %. 1990 eröffnete ein Großunternehmen eine Niederlassung, sodass die Einwohnerzahl schlagartig um 2 390 Personen anstieg. Bis zur Jahrtausendwende konnte der Wegzug verringert, aber nicht verhindert werden. Er betrug bis zum Jahr 2000 jährlich 0,45 %. In den folgenden zehn Jahren beträgt die Wegzugsrate wieder 1,75 % pro Jahr. Die Bestimmung der Einwohnerzahlen erfolgte jeweils am 1. Jänner des Jahrs.

1) Stelle die Funktionsgleichungen auf, die jeweils die Bevölkerungsentwicklung eines Jahrzehnts darstellen.
2) Stelle die Bevölkerungsentwicklung für den Zeitraum [1980; 2010] grafisch dar.
3) Wie viele Einwohner hatte diese Kleinstadt im Jahr 1985? Wie viele im Jahr 2005?
4) Bestimme mithilfe des Graphen: Wann lebten 35 000 Menschen in dieser Stadt?

Z4.6 Eine bestimmte Stockente quakt zu Beginn mit einem Schalldruckpegel L_{P_0} von 70 dB. Bei jedem weiteren „Quak" senkt sich dieser Schalldruckpegel um 15 %. Insgesamt quakt die Ente n-mal.

1) Stelle die Funktionsgleichung $L_p(n) = L_{P_0} \cdot e^{-k \cdot n}$ auf. Berechne k auf vier Dezimalstellen.
2) Welcher Schalldruckpegel ergibt sich nach dem fünften „Quak"?
3) Stelle die Funktion im Intervall [0; 10] grafisch dar.
4) Beantworte mithilfe des Graphen: Wie oft muss diese Ente quaken, damit der Schalldruckpegel unter 20 dB fällt?

Sättigungsvorgänge – Beschränktes Wachstum

Z4.7 Die Nachfrage nach Gütern und Waren hängt von verschiedenen Faktoren ab. Die Firma „Alltag & Luxus" weiß aus Erfahrung, dass die Nachfrage nach einem Produkt durch die Funktionsgleichung $N(x) = b \cdot (1 - a^{-x})$ beschrieben werden kann. Dabei ist x € das monatliche Nettoeinkommen einer Person und N(x) die von dieser Person jährlich erworbene Anzahl des Produkts. Die Konstanten a und b variieren jeweils.

1) Gib eine Wertetabelle für ein monatliches Einkommen von 0 € bis 3 000,00 € an.
2) Stelle die Funktion N(x) grafisch dar.
3) Wie viel Stück des Produkts erwirbt jemand mit dem Einkommen E?
4) Lies aus der Tabelle ab, wie viel jemand verdient, der S_1 bzw. S_2 Stück jährlich erwirbt.
a) a = 1,000 48; b = 75; E = 1 500,00 €; $S_1 = 16$; $S_2 = 26$
b) a = 1,000 1; b = 350; E = 1 900,00 €; $S_1 = 45$; $S_2 = 73$

Z4.8 Die Kapazität K Stück eines Unternehmens nach der Nutzungsdauer t Zeiteinheiten kann unter bestimmten Bedingungen durch die Funktion $K(t) = b \cdot (1 - e^{\lambda \cdot t})$ beschrieben werden.

1) Berechne die Konstante λ und stelle die Funktion für die Nutzungsdauer grafisch dar.
2) Wie groß ist die Kapazität nach der Hälfte der gesamten Nutzungsdauer?
3) Beantworte mithilfe des Graphen: Nach welcher Zeit erreicht man die Kapazität K_1?
a) $b = 10^6$, K(8 Tage) = 113 808 Stück, Nutzungsdauer = 2 Jahre, K_1 = 500 000 Stück
b) b = 2 500, K(44 Monate) = 2 426 Stück, Nutzungsdauer = 60 Mon., K_1 = 2 450 Stück