Auflagerkräfte

Es gelten die Gleichgewichtsbedingungen: $\Sigma H = 0$, $\Sigma V = 0$, $\Sigma M = 0$

Bemerkung: Für die Auflagerkräfte werden statt F_{Ax} und F_{Ay} bzw. F_B nun die in der Statik auch üblichen Bezeichnungen A_H und A_V bzw. B verwendet.

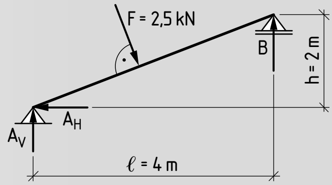
Z3.4 Auf einen schrägen Träger wirkt in der Mitte eine Kraft F.

1) Stelle das Gleichungssystem zur Berechnung der Auflagerkräfte A_H, A_V und B auf.

2) Gib das Gleichungssystem in Matrixschreibweise an.

3) Begründe, warum das Gleichungssystem eindeutig lösbar ist.

4) Invertiere die Matrix und berechne die Auflagerkräfte.



Lösung:

$\alpha = \arctan\left(\frac{2}{4}\right) = 26{,}565...°$

$F_H = F \cdot \sin\alpha \approx 1{,}12$ kN, $F_V = F \cdot \cos\alpha \approx 2{,}24$ kN

- Die Kraft F wird in ihre horizontale und vertikale Komponente zerlegt.

1) $\Sigma H = 0$: $A_H - F_H = 0$

$\Sigma V = 0$: $A_V - F_V + B = 0$

$\Sigma M_a = 0$: $-F_H \cdot \frac{h}{2} - F_V \cdot \frac{\ell}{2} + B \cdot \ell = 0$

- Einsetzen in die Gleichgewichtsbedingungen; die Momente erhält man als Produkt von Kraft mal Normalabstand.

$$\begin{array}{llll} \text{I:} & A_H & & = F_H \\ \text{II:} & & A_V + B & = F_V \\ \text{III:} & & B \cdot \ell & = F_H \cdot \frac{h}{2} + F_V \cdot \frac{\ell}{2} \end{array}$$

- Gleichungssystem

2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \ell \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_H \\ A_V \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_H \\ F_V \\ F_H \cdot \frac{h}{2} + F_V \cdot \frac{\ell}{2} \end{pmatrix}$

3) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \ell \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \ell \end{vmatrix} = 1 \cdot \ell = \ell \neq 0$

Das Gleichungssystem ist lösbar, da die Determinante der Koeffizientenmatrix $\neq 0$ ist.

4)

$\alpha := \operatorname{atan}\left(\frac{2}{4}\right) \qquad F := 2.5 \qquad L := 4 \qquad h := 2$

$M := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & L \end{pmatrix} \qquad M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0.25 \\ 0 & 0 & 0.25 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} A_H \\ A_V \\ B \end{pmatrix} := M^{-1} \cdot \begin{pmatrix} F \cdot \sin(\alpha) \\ F \cdot \cos(\alpha) \\ F \cdot \sin(\alpha) \cdot \frac{h}{2} + F \cdot \cos(\alpha) \cdot \frac{L}{2} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} A_H \\ A_V \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.118 \\ 0.839 \\ 1.398 \end{pmatrix}$

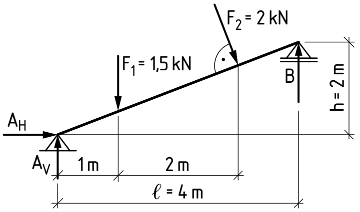
$A_H \approx 1{,}118$ kN, $A_V \approx 0{,}839$ kN, $B \approx 1{,}398$ kN

- Die Berechnung der inversen Matrix und die anschließende Multiplikation werden mithilfe von Technologieeinsatz (zB Mathcad) durchgeführt.

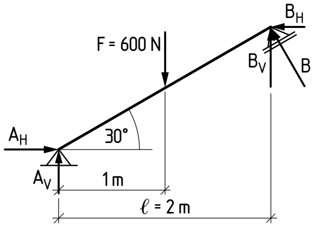
  Mithilfe des Symbols [⁝⁝⁝] kann die Größe der Matrix festgelegt und dann die Werte eingegeben werden.

Z3.5 Stelle das Gleichungssystem zur Berechnung der Auflagerkräfte auf. Gib es in Matrixschreibweise an und berechne anschließend die Auflagerkräfte.

a)

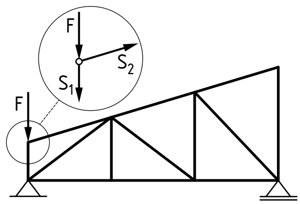


b)

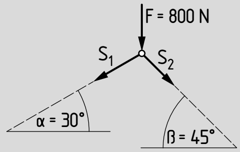


Rundschnittverfahren

Bei der Berechnung der Stabkräfte von Fachwerken wird unter anderem das Rundschnittverfahren angewandt. Dabei denkt man sich das Fachwerk rund um einen Knoten aufgeschnitten. Die Stabkräfte werden als Zugkräfte angesetzt. Das Verfahren kann angewandt werden, wenn zwei unbekannte Stabkräfte in einem Punkt aufeinander treffen. Diese werden dann mithilfe der Gleichgewichtsbedingungen $\Sigma H = 0$ und $\Sigma V = 0$ berechnet.



Z3.6 In der Abbildung ist ein Knoten eines Fachwerks dargestellt. Berechne die Stabkräfte S_1 und S_2. Handelt es sich um Zug- oder Druckstäbe? Berechne mithilfe einer Matrix.



Lösung:

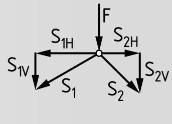
$S_{1H} = S_1 \cdot \cos\alpha$, $S_{1V} = S_1 \cdot \sin\alpha$
$S_{2H} = S_2 \cdot \cos\beta$, $S_{2V} = S_2 \cdot \sin\beta$

- Die Stabkräfte werden in eine horizontale und vertikale Komponente zerlegt.

$\Sigma H = 0$: $-S_{1H} + S_{2H} = 0$
$\Sigma V = 0$: $S_{1V} + S_{2V} + F = 0$

I: $-S_1 \cdot \cos\alpha + S_2 \cdot \cos\beta = 0$
II: $S_1 \cdot \sin\alpha + S_2 \cdot \sin\beta = -F$

- Aufstellen des Gleichungssystems



$$\begin{pmatrix} -\cos\alpha & \cos\beta \\ \sin\alpha & \sin\beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -F \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -800 \end{pmatrix}$$

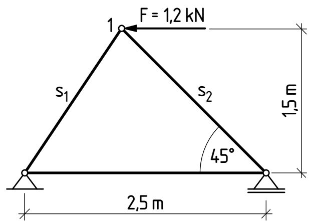
- Matrixschreibweise

$$\begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{3} & \sqrt{3} - 1 \\ \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} & \frac{-(\sqrt{3} - 3) \cdot \sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -800 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -585{,}640... \\ -717{,}260... \end{pmatrix}$$

- Berechnung der Stabkräfte mithilfe der inversen Matrix

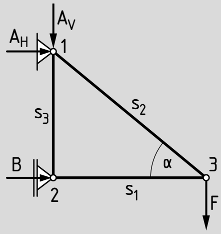
Da die Kräfte negatives Vorzeichen haben, handelt es sich um Druckkräfte.
$S_1 \approx -586$ N, $S_2 \approx -717$ N

Z3.7 Berechne die Stabkräfte des Fachwerks, indem du im gekennzeichneten Knoten 1 das Rundschnittverfahren anwendest. Rechne mithilfe einer Matrix.



Mithilfe des Rundschnittverfahrens können die Auflager- und Stabkräfte gleichzeitig berechnet werden.

Z3.8 Von dem dargestellten Fachwerk sind folgende Gleichungen der Rundschnitte in den Knoten gegeben:



Knoten 1: $A_H + S_2 \cdot \sin\alpha = 0$

$A_V + S_3 + S_2 \cdot \cos\alpha = 0$

Knoten 2: $B + S_1 = 0$

$S_3 = 0$

Knoten 3: $S_1 + S_2 \cdot \cos\alpha = 0$

$F - S_2 \cdot \sin\alpha = 0$

1) Überprüfe die Gleichungen auf ihre Richtigkeit und stelle sie gegebenenfalls richtig.

2) Gib das Gleichungssystem in Matrixschreibweise an.

3) Berechne die Auflager- und Stabkräfte, wenn die Kraft F = 400 N beträgt und die Stäbe s_1 und s_3 gleich lang sind. Gib an, ob es sich um Zug- oder Druckstäbe handelt.

Lösung:

1) Die Gleichungen ergeben sich aus den Gleichgewichtsbedingungen $\Sigma H = 0$ und $\Sigma V = 0$.

Im Knoten 1 muss allerdings gelten:

$A_H + S_2 \cdot \cos\alpha = 0$

$A_V + S_3 + S_2 \cdot \sin\alpha = 0$

2) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \sin\alpha & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\alpha & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_H \\ A_V \\ B \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ F \end{pmatrix}$$

3) $\alpha = 45°$, $\cos\alpha = \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\begin{pmatrix} A_H \\ A_V \\ B \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -F \\ -F \\ F \\ -F \\ \sqrt{2} \cdot F \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Aufgrund der einfachen Bauart der Matrix, kann die Inverse mithilfe des Gauss-Jordan-Algorithmus ermittelt werden.

$A_H = A_V = -400$ N, $B = 400$ N,

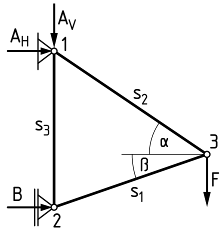
$S_1 = -400$ N (Druckstab), $S_2 \approx 567$ N (Zugstab), $S_3 = 0$ N

Z3.9 Von dem dargestellten Fachwerk sind folgende Gleichungen der Rundschnitte in den Knoten gegeben.

1) Überprüfe die Gleichungen auf ihre Richtigkeit und stelle sie gegebenenfalls richtig.

2) Gib das Gleichungssystem in Matrixschreibweise an.

3) Berechne die Auflager- und Stabkräfte, wenn F = 600 N, $\alpha = 45°$ und $\beta = 30°$ betragen. Gib an, ob es sich um Zug- oder Druckstäbe handelt.



Knoten 1: $A_H + S_2 \cdot \cos\alpha = 0$

$A_V + S_3 + S_2 \cdot \sin\alpha = 0$

Knoten 2: $B + S_1 \cdot \sin\beta = 0$

$S_3 + S_1 \cdot \cos\beta = 0$

Knoten 3: $S_1 \cdot \cos\beta + S_2 \cdot \cos\alpha = 0$

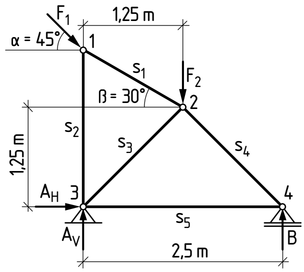
$F - S_2 \cdot \sin\alpha + S_1 \cdot \sin\beta = 0$

Z3.10 Von dem dargestellten Fachwerk sind folgende Gleichungen der Rundschnitte in den Knoten gegeben.

1) Überprüfe diese auf ihre Richtigkeit und stelle sie gegebenenfalls richtig.

2) Gib das Gleichungssystem in Matrixschreibweise an.

3) Berechne die Auflager- und Stabkräfte, wenn $F_1 = 800$ N und $F_2 = 1{,}2$ kN betragen.



Knoten 1: $F_{1H} + S_{1H} = 0$

$F_{1V} + S_2 + S_{1V} = 0$

Knoten 2: $S_{4H} - S_{1H} - S_{3H} = 0$

$F_2 - S_{1V} + S_{3V} + S_{4V} = 0$

Knoten 3: $A_H + S_{3H} + S_5 = 0$

$A_V + S_2 + S_{3V} = 0$

Knoten 4: $S_5 + S_{4H} = 0$

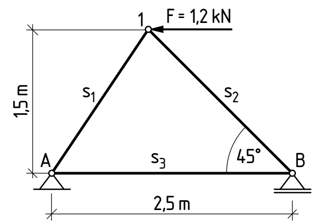
$B + S_{4V} = 0$

Z3.11 ***1)*** Stelle die Gleichungen in den Knoten auf.

2) Gib das Gleichungssystem in Matrixschreibweise an.

3) Berechne die Auflager- und Stabkräfte.

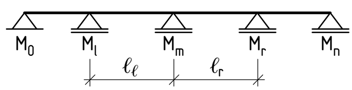
4) Berechne die Auflagerkräfte auf herkömmliche Weise. Vergleiche die Ergebnisse mit Aufgabe Z3.7.



Dreimomentengleichung

Die Dreimomentengleichung von Clapeyron (Benoît Clapeyron, französischer Ingenieur, 1799 – 1864) bietet eine Möglichkeit, die Stützmomente M_i eines Durchlaufträgers zu bestimmen.

Durchlaufträger sind Träger, die mehr als zwei Auflager haben, sie sind daher statisch unbestimmt. Das heißt, sie können nicht durch die Gleichgewichtsbedingungen berechnet werden. In der einfachsten Form lautet die Dreimomentengleichung: $\ell_\ell \cdot M_\ell + 2 \cdot (\ell_\ell + \ell_r) \cdot M_m + \ell_r \cdot M_r = -\ell_\ell \cdot R_\ell - \ell_r \cdot L_r$



Die Indizes ℓ bzw. r bedeuten jeweils die Stützweite bzw. das Stützmoment links bzw. rechts von M_m. R_ℓ und L_r sind Belastungsglieder, die aus Tabellen entnommen werden können. Es werden so viele Gleichungen benötigt, wie Innenstützen vorhanden sind.