6 Differentialgleichungen

Biegelinie

Wird ein Träger durch Biegung beansprucht, so verformt er sich. Die gebogene Stabachse (Nulllinie) wird als Biegelinie bezeichnet. In Zusatzheft 3 wurden im Zuge der Kurvendiskussion Funktionsgleichungen von Biegelinien verschieden belasteter Träger angegeben und untersucht. Die Funktionsgleichung einer Biegelinie y = y(x) (auch w(x)) ergibt sich unter anderem aus der Art der Belastung. Für geringe Formänderungen erhält man die Funktionsgleichung durch zweimalige Integration folgender Differentialgleichung:

$y'' = -\frac{M}{E \cdot I}$ mit M ... Biegemoment, E ... Elastizitätsmodul,
I ... Trägheitsmoment (Flächenmoment 2. Ordnung)

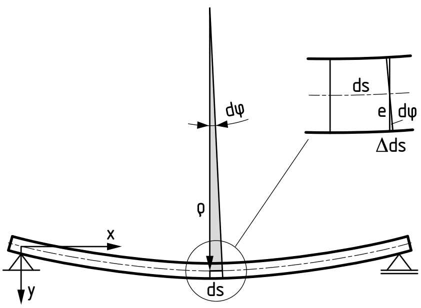
Um diese Gleichung herzuleiten, benötigt man das Hooke'sche Gesetz, die Biegespannung und die Gleichung der Krümmung (vergleiche Band 3).

Hooke'sches Gesetz: Die Spannung σ ist proportional zur Dehnung ε:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad \text{mit} \quad \varepsilon = \frac{\Delta \ell}{\ell_0} = \frac{\text{Längenänderung}}{\text{ursprüngliche Länge}}$$

Biegespannung: $\sigma = \frac{M}{I} \cdot e$ mit e ... Abstand von der Randfaser zur Nulllinie

Krümmung: $\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{y''}{\sqrt{(1 + (y')^2)^3}}$



In jedem Punkt der Biegelinie kann ein Krümmungskreis mit Radius ρ gezeichnet werden. Betrachtet man ein sehr kleines verformtes Element des Trägers, so ergibt sich aufgrund der ähnlichen Dreiecke:

$\frac{ds}{\rho} = \frac{\Delta ds}{e}$ bzw. $\frac{1}{\rho} = \frac{1}{e} \cdot \frac{\Delta ds}{ds}$

Der Ausdruck $\frac{\Delta ds}{ds}$ entspricht der Dehnung ε und mit $\frac{1}{\rho} = \kappa$ erhält man: $\kappa = \frac{1}{e} \cdot \varepsilon$

Nun wird für $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$ und für $\sigma = \frac{M}{I} \cdot e$ eingesetzt: $\kappa = \frac{1}{e} \cdot \varepsilon = \frac{1}{e} \cdot \frac{\sigma}{E} = \frac{1}{e} \cdot \frac{1}{E} \cdot \frac{M}{I} \cdot e = \frac{M}{E \cdot I}$

Da die y-Koordinate für positive Funktionswerte der Biegelinie nach unten zeigt, hat ein nach unten durchgebogener Träger eine negative Krümmung. Eine Durchbiegung nach unten wird durch ein positives Moment hervorgerufen. Somit gilt: $\kappa = -\frac{M}{E \cdot I}$

Mit der Definition der Krümmung erhält man die Differentialgleichung: $\frac{y''}{\sqrt{(1 + (y')^2)^3}} = -\frac{M}{E \cdot I}$

Da die Formänderungen nur gering sein dürfen, ist der Wert von $(y')^2$ vernachlässigbar klein und damit gilt für die Krümmung: $\kappa = \frac{1}{\rho} = y''$. Man erhält:

> Vereinfachte Differentialgleichung der Biegelinie: $y''(x) = -\frac{M(x)}{E \cdot I}$

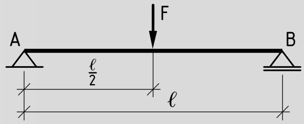
$y' = \int -\frac{M(x)}{E \cdot I}\, dx = \tan \alpha$ gibt den Neigungswinkel der Stabachse an.

Ist die Gleichung des Biegemoments bekannt, so kann die Differentialgleichung nach Angabe von zwei Randbedingungen durch Integration gelöst werden. Ist nur die Belastung gegeben oder das System statisch unbestimmt, so werden die Zusammenhänge zwischen Last q, Querkraft V und Biegemoment M verwendet: $V(x) = -\int q(x)\,dx$, $M(x) = \int V(x)\,dx$

Die Randbedingungen ergeben sich aus der Form der Biegelinie oder statischen Forderungen.

Z6.1 Für das Biegemoment eines Trägers auf zwei Stützen, der durch eine Einzellast mittig belastet wird, gilt:

$M(x) = \frac{F}{2} \cdot x,\ 0 \leqslant x \leqslant \frac{\ell}{2}$



1) Überlege, welche Randbedingungen für die Biegelinie gelten.

2) Zeige durch Integration, dass sich daraus folgende Gleichung der Biegelinie ergibt:

$y(x) = \frac{F \cdot \ell^3}{48 \cdot E \cdot I} \cdot \left[3 \cdot \left(\frac{x}{\ell}\right) - 4 \cdot \left(\frac{x}{\ell}\right)^3\right]$, $0 \leqslant x \leqslant \frac{\ell}{2}$; die rechte Seite ergibt sich durch Symmetrie

3) Gib für $F = 2$ kN, $\ell = 2{,}0$ m, $E = 1\,000\ \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$ und $I = 1\,152\ \text{cm}^4$ (8 cm x 12 cm) die maximale Durchbiegung an. Vergleiche diese mit einer zulässigen Durchbiegung von $f_{max} = \frac{\ell}{300}$. Wie groß darf F maximal sein, damit die zulässige Durchbiegung eingehalten wird?

Lösung:

1) Da der Träger im Auflager aufliegt, gilt: $y(0) = 0$
Der Träger darf in der Mitte keinen Knick haben und hat dort die größte Durchbiegung, damit ergibt sich: $y'\left(\frac{\ell}{2}\right) = 0$

2) $y''(x) = -\frac{M}{E \cdot I} = -\frac{F}{2 \cdot E \cdot I} \cdot x$

$y'(x) = -\frac{F}{2 \cdot E \cdot I} \cdot \int x\,dx = -\frac{F}{2 \cdot E \cdot I} \cdot \frac{x^2}{2} + C_1$

$y(x) = \int\left(-\frac{F}{2 \cdot E \cdot I} \cdot \frac{x^2}{2} + C_1\right) dx = -\frac{F}{2 \cdot E \cdot I} \cdot \frac{x^3}{6} + C_1 \cdot x + C_2$

$y(0) = 0$: $C_2 = 0$

$y'\left(\frac{\ell}{2}\right) = 0$: $-\frac{F}{4 \cdot E \cdot I} \cdot \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{F \cdot \ell^2}{16 \cdot E \cdot I}$

$y(x) = -\frac{F \cdot x^3}{12 \cdot E \cdot I} + \frac{F \cdot \ell^2}{16 \cdot E \cdot I} \cdot x = \frac{F \cdot \ell^3}{48 \cdot E \cdot I} \cdot 3 \cdot \frac{x}{\ell} - \frac{F \cdot \ell^3}{48 \cdot E \cdot I} \cdot 4 \cdot \frac{x^3}{\ell^3}$

- Einsetzen in die Differentialgleichung
- Zweimalige Integration
- Einsetzen der Randbedingungen
- Nach dem Umformen erkennt man die Gleichheit zur angegebenen Gleichung.

3) $y_{max} = y\left(\frac{\ell}{2}\right) = \frac{F \cdot \ell^3}{48 \cdot E \cdot I} \cdot \left[3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) - 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3\right] = \frac{F \cdot \ell^3}{48 \cdot E \cdot I}$

$y_{max} = \frac{2 \cdot (200\ \text{cm})^3}{48 \cdot 1\,000\ \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \cdot 1\,152\ \text{cm}^4} \approx 0{,}29\ \text{cm}$

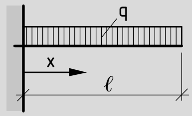
$y_{max} < f_{max} = \frac{200\ \text{cm}}{300} \approx 0{,}67\ \text{cm}$

$F = \frac{f_{max} \cdot 48 \cdot E \cdot I}{\ell^3} = 4{,}608\ \text{kN}$

Die Einzellast darf maximal 4,6 kN betragen.

- Die größte Durchbiegung befindet sich in der Mitte des Trägers.
- Die maximale Durchbiegung ist kleiner als die zulässige.
- Berechnung der maximalen Last

Z6.2 Die Biegelinie eines einseitig eingespannten Trägers, der durch eine Gleichlast beansprucht wird, ist gesucht.



1) Welchen Grad hat die Polynomfunktion?
2) Begründe, welche Randbedingungen gelten müssen.
3) Leite die Gleichung der Biegelinie her. Dokumentiere deinen Lösungsweg.
4) Wie ändert sich die Durchbiegung, wenn die Gleichlast verdoppelt wird?

Lösung:

1) Da die Last konstant ist, ergibt eine viermalige Integration eine Polynomfunktion 4. Grads.

2) Da der Träger eingespannt ist, ist an der Einspannstelle der Funktionswert 0 und die Tangente waagrecht. $y(0) = 0,\ y'(0) = 0$

Da die Querkraft und das Moment am freien Trägerende null sind, ergibt sich:
$M(x) = -EIy''(x)$: $M(\ell) = 0 \ \Rightarrow\ y''(\ell) = 0$
$V(x) = -EIy'''(x)$: $V(\ell) = 0 \ \Rightarrow\ y'''(\ell) = 0$

3) $q(x) = q$

$V(x) = -\int q(x)\,dx = -q \cdot x + C_1$

$M(x) = \int V(x)\,dx = -q \cdot \frac{x^2}{2} + C_1 \cdot x + C_2$

$y''(x) = -\frac{M}{E \cdot I} = -\frac{1}{E \cdot I} \cdot \left(-q \cdot \frac{x^2}{2} + C_1 \cdot x + C_2\right)$

$y'(x) = -\frac{1}{E \cdot I} \cdot \left(-q \cdot \frac{x^3}{6} + C_1 \cdot \frac{x^2}{2} + C_2 \cdot x + C_3\right)$

$y(x) = -\frac{1}{E \cdot I} \cdot \left(-q \cdot \frac{x^4}{24} + C_1 \cdot \frac{x^3}{6} + C_2 \cdot \frac{x^2}{2} + C_3 \cdot x + C_4\right)$

Die Gleichlast ist konstant. Die Querkraft und das Moment werden durch Integration ermittelt. Die Gleichung des Biegemoments wird in die Differentialgleichung der Biegelinie eingesetzt und anschließend integriert.

Randbedingungen:
$y(0) = 0$: $C_4 = 0$
$y'(0) = 0$: $C_3 = 0$
$V(\ell) = 0$: $-q \cdot \ell + C_1 \ \Rightarrow\ C_1 = q \cdot \ell$
$M(\ell) = 0$: $-q \cdot \frac{\ell^2}{2} + q \cdot \ell \cdot \ell + C_2 = 0 \ \Rightarrow\ C_2 = -q \cdot \frac{\ell^2}{2}$

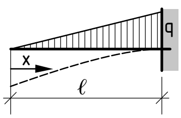
Die Konstanten werden durch Einsetzen der Randbedingungen ermittelt.

Gleichung der Biegelinie:

$y(x) = -\frac{1}{E \cdot I} \cdot \left(-q \cdot \frac{x^4}{24} + q \cdot \ell \cdot \frac{x^3}{6} - q \cdot \frac{\ell^2}{2} \cdot \frac{x^2}{2}\right) = \frac{q \cdot \ell^4}{24 \cdot E \cdot I} \cdot \left(\frac{x^4}{\ell^4} - 4 \cdot \frac{x^3}{\ell^3} + 6 \cdot \frac{x^2}{\ell^2}\right)$

4) Wird q verdoppelt, so werden die Funktionswerte von y(x) verdoppelt.

Z6.3 Auf einen einseitig eingespannten Träger wirkt eine Dreieckslast. Für das Biegemoment und die Randbedingungen gilt: $M(x) = -\frac{q \cdot x^3}{6\ell}$, $y(\ell) = 0$, $y'(\ell) = 0$

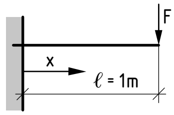


1) Erkläre, welche Bedeutung die gegebenen Randbedingungen haben.
2) Ermittle die Gleichung der Biegelinie.
3) Die Durchbiegung am freien Ende beträgt 1 cm. Wie groß ist q, wenn der Träger 2 m lang ist und $E \cdot I = 213\,333\ \mathrm{kNcm^2}$ beträgt?

Z6.4 Eine freitragende Treppe soll errichtet werden. Dazu werden 8 cm dicke, 26 cm breite und 1,00 m lange Bretter ($E = 1\,000\ \frac{kN}{cm^2}$) an einer Seite in der Säule fest eingespannt.

1) Für den Verlauf der Biegelinie gelten folgende Bedingungen:
$y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(\ell) = 0$, $y(\ell) = y_{max}$
Begründe, warum die Biegelinie durch eine Polynomfunktion 3. Grads beschrieben werden kann und beschreibe die gegebenen Bedingungen.

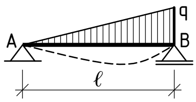
2) Bestimme die Gleichung der Biegelinie als Polynomfunktion.



3) Zeige, dass diese Gleichung mit jener übereinstimmt, die sich aus der Differentialgleichung der Biegelinie mit $M(x) = -F \cdot (\ell - x)$, $y(0) = 0$ und $y'(0) = 0$ ergibt.

4) Die Durchbiegung darf maximal $\frac{\ell}{250}$ betragen. Wie groß darf F maximal sein? Welche Werte können geändert werden, damit eine größere Last möglich ist?

Z6.5 Auf einen Träger auf zwei Stützen wirkt eine Dreieckslast. Für das Biegemoment und die Randbedingungen gilt:
$M(x) = -\frac{q}{6\ell} \cdot x^3 + \frac{q \cdot \ell}{6} \cdot x$, $y(0) = y(\ell) = 0$



1) Erkläre, warum die gegebenen Randbedingungen gelten.

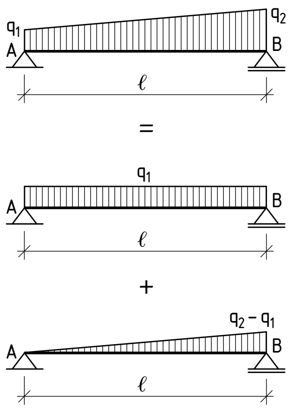
2) Leite die Gleichung der Biegelinie her.

3) Stelle den Querkraft- und Biegemomentenverlauf sowie die Biegelinie mit den gegebenen Werten mithilfe von Technologieeinsatz grafisch dar.

4) Gib die Steigungswinkel der Tangenten in den Auflagern an.

5) Befinden sich das maximale Moment und die größte Durchbiegung an derselben Stelle? Begründe durch eine Rechnung.
$q = 3\ \frac{kN}{m}$, $\ell = 3$ m, $E = 1\,100\ \frac{kN}{cm^2}$, Kantholz 10 cm x 12 cm ($I = 1\,440\ cm^4$)

Z6.6 Ein Träger auf zwei Stützen wird durch eine Trapezlast belastet. Für das Biegemoment gilt (vergleiche Zusatzheft 3, Seite 23):
$M(x) = -\frac{q_2 - q_1}{6\ell} \cdot x^3 - \frac{q_1}{2} \cdot x^2 + \frac{\ell \cdot (2q_1 + q_2)}{6} \cdot x$



1) Leite die Gleichung der Biegelinie her.
Es gilt: $y(0) = y(\ell) = 0$

2) Zeige, dass die in ***1)*** erhaltene Gleichung mit der Summe aus der Funktionsgleichung der Biegelinie einer Gleichlast (Band 4, Seite 89) und der einer Dreickslast (Aufgabe Z6.5) übereinstimmt.
Bemerkung: Die Überlagerung der Durchbiegungen (und auch Momenten) nennt man Superposition.