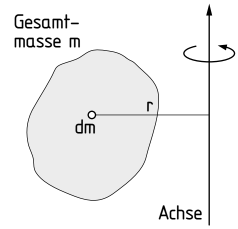
7.7 Massenträgheitsmoment

Bei der Untersuchung von geradlinigen Bewegungen geht man davon aus, dass die Masse eines Körpers in seinem Schwerpunkt konzentriert ist. Dabei spricht man von so genannten **Punktmassen**. Nach dem Trägheitsgesetz bringt ein Körper einer Änderung seiner Geschwindigkeit umso mehr Widerstand entgegen, je größer seine Masse ist.

Bei der Translation ist die Masse ein Maß für die Trägheit eines Körpers. Bei einer Rotation setzt ein Körper einer Bewegungsänderung umso mehr Widerstand entgegen, je weiter er von der Drehachse entfernt ist. Das Maß für die Trägheit wird durch das Produkt aus der Masse m und dem Quadrat des Abstandes r zur Drehachse beschrieben: $I = m \cdot r^2$

Dies ist das **Massenträgheitsmoment** I einer Punktmasse bezüglich einer festen Achse.

Da diese Definition nur für Punktmassen gilt, wird die Gesamtmasse m eines Körpers in beliebig kleine Massenelemente dm zerlegt.



Für jedes dieser Massenelemente ergibt sich damit das Trägheitsmoment bezüglich einer Drehachse $dI = r^2 \cdot dm$.

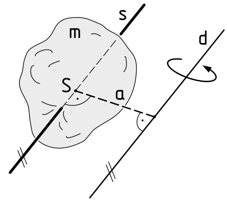
Um das Massenträgheitsmoment des gesamten Körpers zu bestimmen, müssen diese einzelnen Momente aufsummiert werden. Dieses Massenträgheitsmoment erhält man also durch Integration über die Gesamtmasse: $I = \int_m r^2\, dm$

Unter der Voraussetzung, dass die Masse des Körpers homogen verteilt ist, führt dies über $dm = \rho \cdot dV$ zu $I = \rho \cdot \int_V r^2\, dV$. ($\rho$ ... Dichte)

Für die Berechnung des **Massenträgheitsmoments** I bezüglich der Drehachse eines Körpers mit der Masse m im Normalabstand r von der Drehachse gilt: $I = \int_m r^2\, dm = \rho \cdot \int_V r^2\, dV$

Je nach der Form der Massenelemente kann das Volumenelement dV meist in einen Ausdruck mit dr umgeformt werden. Dadurch kann nach dr integriert werden.

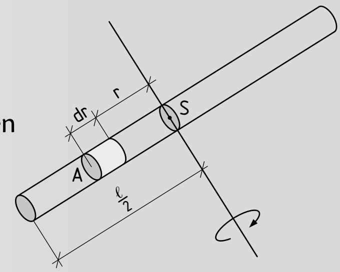
Meist wird das Trägheitsmoment bezüglich der Schwerachse benötigt. Für Standardkörper findet man die Trägheitsmomente in Tabellen. Um das Trägheitsmoment bezüglich einer beliebigen Achse zu berechnen, verwendet man den **Satz von Steiner** (Jacob Steiner, schweizer Mathematiker, 1796 – 1863).



Satz von Steiner:
Ist I_d das Trägheitsmoment eines Körpers bezüglich einer Drehachse d und I_s sein Trägheitsmoment bezüglich einer im Abstand a zu dieser Drehachse verlaufenden, parallelen Achse s durch den Schwerpunkt S, so gilt: $I_d = I_s + m \cdot a^2$

Z7.11 Ein dünner Stab hat die Länge ℓ, die Querschnittsfläche A und die Dichte ρ. Berechne sein Massenträgheitsmoment bezüglich einer Achse, die durch seinen Schwerpunkt verläuft und im rechten Winkel zum Stab liegt.

Lösung:



$$I = \int_m r^2\,dm = \rho \cdot \int_V r^2\,dV$$

$dV = A \cdot dr$ — ● dV mithilfe von dr ausdrücken

$I = \rho A \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} r^2\,dr =$ — ● Integrationsgrenzen $\pm\frac{\ell}{2}$

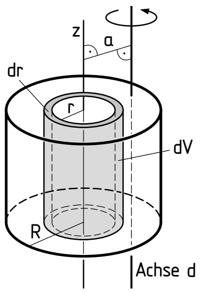
$I = 2\rho A \cdot \int_0^{\frac{\ell}{2}} r^2\,dr$ — ● Nutzen der Symmetrie

$$I = 2\rho A \cdot \left(\frac{r^3}{3}\right)\Big|_0^{\frac{\ell}{2}}$$

$$I = 2\rho A \cdot \frac{\ell^3}{24} = \frac{\overbrace{\rho \cdot A \cdot \ell}^{=m} \cdot \ell^2}{12} = \frac{m\ell^2}{12}$$

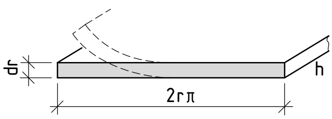
Das Massenträgheitsmoment des Stabs ist $I = \frac{m\ell^2}{12}$.

ZB: Es soll nun das Massenträgheitsmoment eines Vollzylinders mit dem Radius R, der Höhe h und der Dichte ρ berechnet werden, wenn die Achse d in einem Abstand von $a = \frac{3}{4}R$ von seiner Schwerachse entfernt ist.



Zuerst berechnet man das Trägheitsmoment bezüglich der Schwerachse, also bezüglich der Zylinderachse z.

Das Gesamtvolumen des Zylinders besteht aus beliebig kleinen Hohlzylindern. Diese Hohlzylinder werden sozusagen „ausgerollt“.



Für das Volumenelement dV erhält man somit: $dV = 2r\pi \cdot h \cdot dr$

$$I_s = I_z = \rho \cdot \int_V r^2\,dV = 2\pi \cdot h \cdot \rho \int_0^R r^3\,dr = 2\pi \cdot h \cdot \rho \cdot \left(\frac{r^4}{4}\right)\Big|_0^R = 2\pi \cdot h \cdot \rho \cdot \frac{R^4}{4} = \underbrace{R^2\pi \cdot h \cdot \rho}_{=m} \cdot \frac{R^2}{2} = m \cdot \frac{R^2}{2}$$

Für das Massenträgheitsmoment bezüglich der Achse d im Abstand a von z kann nun der Satz von Steiner angewandt werden:

$$I_d = \frac{m \cdot R^2}{2} + m \cdot \left(\frac{3R}{4}\right)^2 = \frac{17}{16} \cdot m \cdot R^2$$

Das Massenträgheitsmoment bezüglich der Achse d für den Vollzylinder ist $I = \frac{17}{16} \cdot m \cdot R^2$.

Bemerkung: Das Massenträgheitsmoment eines **Hohlkörpers** wird berechnet, indem man die **Differenz** der Massenträgheitsmomente **zweier Vollkörper** bildet.

Aufgaben Z7.12 – Z7.15: Berechne jeweils das Massenträgheitsmoment des Körpers für die angegebene Drehachse.

Z7.12 Ein dünner Stab hat die Länge ℓ, die Querschnittsfläche A und die Dichte ρ. Er rotiert um eine auf ihn normal stehende Achse.

a) Die Drehachse d befindet sich bei $\frac{2}{3}\ell$. ***b)*** Die Drehachse d befindet sich bei $\frac{3}{4}\ell$.

Z7.13 Ein Vollzylinder (Radius R, Höhe h, Dichte ρ) dreht sich um eine Achse, die auf seiner Mantelfläche parallel zu seiner Schwerachse liegt (a = R).

Z7.14 Ein voller Drehkegel (Basisradius R, Höhe h, Dichte ρ) rotiert um seine Symmetrieachse.

Z7.15 Eine Vollkugel (Radius R, Dichte ρ) rotiert um eine feste Achse d, die

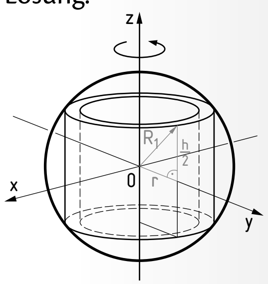
1) durch den Kugelmittelpunkt verläuft.

2) eine Tangente an die Kugel ist.

3) außerhalb der Kugel liegt und a = 3R vom Schwerpunkt entfernt ist.

Z7.16 Eine Hohlkugel mit dem äußeren Radius R_1, dem inneren Radius R_2 und der Dichte ρ rotiert um eine Achse durch ihren Mittelpunkt. Fertige eine Zeichnung an und berechne ihr Massenträgheitsmoment.

Lösung:



- Anfertigen einer Zeichnung
- Das Massenträgheitsmoment eines hohlen Körpers wird über die Differenz der Massenträgheitsmomente zweier Vollkörper berechnet. Daher genügt es, eine Formel für das Massenträgheitsmoment einer Vollkugel zu entwickeln, zB für das der äußeren Kugel (R_1).
- Der Kugel werden Hohlzylinder eingeschrieben.

$dV = 2r\pi \cdot h \cdot dr$

- „Ausrollen" der Hohlzylinder (vgl. S. 29) r = konstant

$\frac{h}{2} = \sqrt{R_1^2 - r^2} \Rightarrow h = 2 \cdot \sqrt{R_1^2 - r^2}$

$\Rightarrow dV = 4\pi \cdot r \cdot \sqrt{R_1^2 - r^2} \cdot dr$

$I_1 = \rho \cdot \int_V r^2\, dV = 4\pi\rho \cdot \int_0^R r^3 \sqrt{R_1^2 - r^2}\, dr$

- Berechnung mithilfe partieller Integration

$I_1 = \underbrace{\frac{4R_1^3\pi \cdot \rho}{3}}_{= m} \cdot \frac{2R_1^2}{5} = \frac{2}{5} m \cdot R_1^2$

- Trägheitsmoment der äußeren Kugel (R_1)

$I_2 = \underbrace{\frac{4R_2^3\pi \cdot \rho}{3}}_{= m} \cdot \frac{2R_2^2}{5} = \frac{2}{5} m \cdot R_2^2$

- Die Ermittlung des Trägheitsmoments der inneren Kugel (R_2) erfolgt analog.

$I = I_1 - I_2 = \frac{2}{5} m \cdot (R_1^2 - R_2^2)$

- Das Trägheitsmoment der Hohlkugel erhält man aus der Differenz der Momente der äußeren und der inneren Kugel.

Z7.17 Ein Hohlzylinder hat den äußeren Radius R_1, den inneren Radius R_2, die Höhe h und die Dichte ρ. Berechne sein Massenträgheitsmoment.
a) Die Drehachse a verläuft durch die Zylinderachse.
b) Die Drehachse a verläuft durch den Schwerpunkt des Zylinders und steht im rechten Winkel auf die Zylinderachse.

Z7.18 Eine Hohlkugel hat den äußeren Radius R_1, den inneren Radius R_2 und die Dichte ρ. Die Drehachse a befindet sich außerhalb der Kugel, $a = 2R_1$ vom Schwerpunkt entfernt. Berechne ihr Massenträgheitsmoment.

Z7.19 Die Drehachse a einer dünnen Zylinderscheibe mit dem Radius R, der Dicke h und der Dichte ρ liegt auf einem Durchmesser der Scheibe.
Berechne ihr Massenträgheitsmoment.
Hinweis: Zerlege die Scheibe in beliebig kleine Quader, die im Abstand r parallel zur Achse liegen und ermittle einen Zusammenhang zwischen R und r (r = const.).

Z7.20 Der Graph einer Funktion f(x) rotiert im angegebenen Intervall um die x-Achse. Berechne das Massenträgheitsmoment des Drehkörpers (Einheiten in cm).
a) $f(x) = \frac{x^3}{2}$, [0; 2] ***b)*** $f(x) = \frac{1}{x} + 2$, [1; 5] ***c)*** $f(x) = \sqrt{x}$, [0; 5]

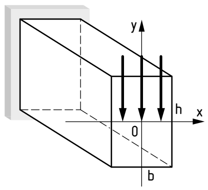
7.8 Flächenträgheitsmomente

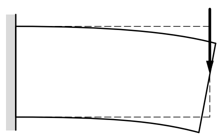
Wirkt auf einen elastischen Träger eine Belastung, kann eine Biegung auftreten. Bei der Konstruktion von Trägern ist es wichtig, deren Verhalten bei Belastungen zu untersuchen. **Flächenträgheitsmomente** bzw. **Flächenmomente 2. Ordnung** benötigt man in der Festigkeitslehre zur Berechnung von Biege- und Torsionsspannungen. Flächenmomente 2. Ordnung sind nur von der Form der Querschnittsfläche eines Körpers abhängig.

Axiale Flächenträgheitsmomente (AFTM)

Die Querschnittsfläche A liegt ebenso wie die Bezugsachse der Verformung in der xy-Ebene. Je nachdem in welcher Richtung die Belastung wirkt, unterscheidet man:

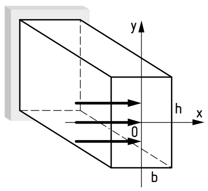
- **AFTM bezüglich der x-Achse**
  (Biegung um die x-Achse)
  $I_x = \int_A y^2\, dA$
  y ... Abstände der Flächenelemente dA von der x-Achse

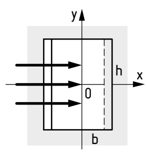




Seitenansicht

- **AFTM bezüglich der y-Achse**
  (Biegung um die y-Achse)
  $I_y = \int_A x^2\, dA$
  x ... Abstände der Flächenelemente dA von der y-Achse





Vorderansicht