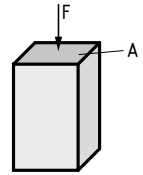


## Mechanik

### Zug- und Druckspannung

Wirkt die Kraft  $F$  normal zur Fläche  $A$ , so spricht man von Normalspannung. Je nachdem, ob es sich um eine Zug- oder Druckkraft handelt, von Zug- oder Druckspannung.

$$\sigma = \frac{\text{Kraft}}{\text{Fläche}} = \frac{F}{A}$$



**Z2.1** Auf eine quadratische Holzsäule wirkt eine Druckkraft  $F$ .

- 1) Berechne die Druckspannung, wenn die Seitenlänge der Säule  $a = 14 \text{ cm}$  und die Kraft  $F = 500 \text{ N}$  beträgt. Vergleich sie mit der zulässigen Druckspannung  $\sigma_{\text{zul}} = 10 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ .
- 2) Die Seitenlänge  $a$  der Säule beträgt  $10 \text{ cm}$ . Gib die Druckspannung in Abhängigkeit von der wirkenden Kraft  $F$  an. Um welche Funktion handelt es sich? Stelle die Funktion  $\sigma(F)$  für  $0 \text{ N} \leq F \leq 10\,000 \text{ N}$  grafisch dar.
- 3) Die Druckkraft  $F$  beträgt  $800 \text{ N}$ . Gib die Druckspannung in Abhängigkeit von der Seitenlänge  $a$  an. Um welche Funktion handelt es sich? Stelle die Funktion  $\sigma(a)$  für  $0 \text{ cm} \leq a \leq 25 \text{ cm}$  grafisch dar.

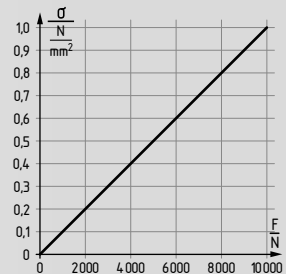
Lösung:

$$1) \sigma = \frac{F}{a^2} = \frac{500 \text{ N}}{(14 \text{ cm})^2} = 2,551 \dots \frac{\text{N}}{\text{cm}^2} = 2,551 \dots \cdot 10^{-2} \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \leq \sigma_{\text{zul}}$$

Die auftretende Druckspannung ist kleiner als die zulässige.

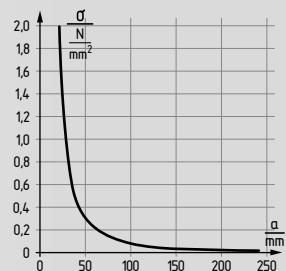
$$2) \sigma(F) = \frac{F}{a^2} = \frac{F}{10\,000 \text{ mm}^2} = \frac{1}{10\,000 \text{ mm}^2} \cdot F$$

Es handelt sich um eine lineare Funktion mit der Steigung  $k = \frac{1}{10\,000 \text{ mm}^2}$ .

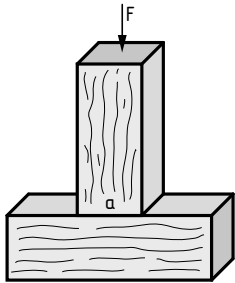


$$3) \sigma(a) = \frac{F}{a^2} = \frac{800 \text{ N}}{a^2} = 800 \text{ N} \cdot a^{-2}$$

Es handelt sich um eine Potenzfunktion mit negativem geraden Exponenten.



# Potenzen und Wurzeln

- Z2.2** Auf ein Stahlseil mit kreisförmiger Querschnittsfläche wirkt eine Zugkraft  $F$ .
- Berechne die Zugspannung, wenn der Durchmesser des Seils 12 mm und die Kraft  $F = 10$  kN betragen. Vergleich sie mit der zulässigen Zugspannung  $\sigma_{\text{zul}} = 125 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ .
  - Die Zugkraft beträgt 20 kN. Gib die Zugspannung in Abhängigkeit vom Durchmesser an. Um welche Funktion handelt es sich? Stelle die Funktion  $\sigma(d)$  für  $0 \leq d \leq 50$  mm grafisch dar und ermittle daraus den Mindestdurchmesser für eine zulässige Zugspannung von  $\sigma_{\text{zul}} = 125 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ .
- Z2.3** Der erforderliche Querschnitt einer quadratischen Betonsäule bei verschiedenen Belastungen soll ermittelt werden. Die maximal zulässige Druckspannung beträgt  $\sigma_{\text{zul}} = 30 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ .
- Gib die Seitenlänge der Betonsäule in Abhängigkeit von einer Kraft  $F$  an.
  - Stelle die Funktion grafisch dar. Um welchen Funktionstyp handelt es sich?
  - Ermittle aus dem Diagramm die maximale Kraft, die für eine Seitenlänge von  $a = 20$  cm zulässig ist.
- Z2.4** Eine quadratische Holzsäule soll auf einem Träger aus Fichtenholz montiert werden. Die zulässige Druckspannung von Fichtenholz quer zur Faserrichtung beträgt  $\sigma_{\text{zul}} = 2 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ .
- Gib die maximale Druckkraft in Abhängigkeit von der Seitenlänge  $a$  an.
  - Stelle die Funktion grafisch dar. Um welchen Funktionstyp handelt es sich?
  - Ermittle aus dem Diagramm jene Seitenlänge, die für eine Kraft  $F = 8$  kN mindestens notwendig ist.
- 
- Z2.5** Eine Holzsäule mit rechteckigem Querschnitt soll auf einem Träger montiert werden. Die Breite  $b$  der Säule muss aus baulichen Gründen 12 cm betragen. Die Säule wird durch eine Druckkraft von 12,5 kN belastet. Die zulässige Druckspannung von Eichenholz quer zur Faserrichtung beträgt  $\sigma_{\text{zul}} = 3,5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ .
- Gib die maximale Druckspannung in Abhängigkeit von der Länge  $a$  an.
  - Stelle die Funktion grafisch dar. Um welchen Funktionstyp handelt es sich?
  - Ermittle aus dem Diagramm jene Seitenlänge, die für die gegebene Druckkraft mindestens erforderlich ist.
- Z2.6** Der Durchmesser eines runden Stahlseils soll ermittelt werden. Die maximal zulässige Zugspannung beträgt  $\sigma_{\text{zul}} = 125 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ .
- Gib die Zugkraft in Abhängigkeit vom Durchmesser  $d$  an.
  - Stelle die Funktion grafisch dar. Um welchen Funktionstyp handelt es sich?
  - Ermittle aus dem Diagramm jenen Durchmesser, der für eine Kraft  $F = 12$  kN mindestens notwendig ist.

## Trägheits- und Widerstandsmoment

Sind die inneren Kräfte eines Bauteils bekannt, so können die vorhandenen Belastungen berechnet werden. Diese werden bei gegebenen Querschnitten mit den zulässigen Werten (aus Tabellen) verglichen. Ist die Querschnittsfläche noch unbekannt, werden die notwendigen Abmessungen ermittelt.

Wichtige Größen sind dabei das Trägheitsmoment (Flächenträgheitsmoment oder Flächenmoment 2. Ordnung) und das Widerstandsmoment. Diese Größen hängen von der Geometrie des Querschnitts ab.

$$\text{Biegespannung: } \sigma_B = \frac{M}{W} = \frac{\text{Biegemoment}}{\text{Widerstandsmoment}}$$

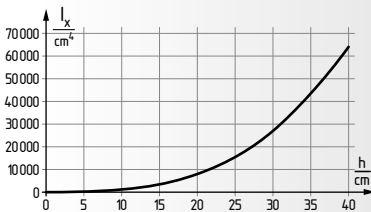
**Z2.7** Das Trägheitsmoment eines Rechtecks bezüglich der x-Achse beträgt  $I_x = \frac{b \cdot h^3}{12}$ .

- 1) Gib das Trägheitsmoment eines Rechtecks mit  $b = 12 \text{ cm}$  und  $h = 20 \text{ cm}$  an.
- 2) Stelle  $I_x(h)$  für  $b = 12 \text{ cm}$  grafisch dar. Wähle die Höhe  $h$  im Bereich  $0 \text{ cm}$  bis  $40 \text{ cm}$ .
- 3) Gib die Breite als Funktion der Höhe an, wenn das Trägheitsmoment  $I_x = 6\,000 \text{ cm}^4$  beträgt. Um welchen Funktionstyp handelt es sich? Stelle sie grafisch dar.

Lösung:

$$1) I_x = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{12 \text{ cm} \cdot (20 \text{ cm})^3}{12} = 8\,000 \text{ cm}^4$$

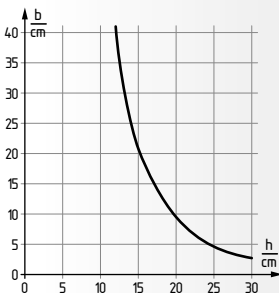
$$2) I_x(h) = \frac{12 \text{ cm} \cdot h^3}{12} = 1 \text{ cm} \cdot h^3$$



$I_x(h)$  ist eine Potenzfunktion mit positivem ungeraden Exponenten. Bei  $h = 40 \text{ cm}$  erreicht  $I_x$  einen Wert von  $64\,000 \text{ cm}^4$ .

$$3) I_x = \frac{b \cdot h^3}{12} \Rightarrow b = \frac{12 \cdot I_x}{h^3}$$

$$b(h) = \frac{12 \cdot 6\,000 \text{ cm}^4}{h^3} = \frac{72\,000 \text{ cm}^4}{h^3} = 72\,000 \text{ cm}^4 \cdot h^{-3}$$



Die Funktion  $b(h)$  ist eine Potenzfunktion mit negativem ungeraden Exponenten. Der Graph ist eine Hyperbel.

# Potenzen und Wurzeln

**Z2.8** Das Widerstandsmoment eines Rechtecks bezüglich der x-Achse beträgt  $W_x = \frac{b \cdot h^2}{6}$ .

- 1) Gib das Widerstandsmoment für ein Rechteck mit  $b = 14$  cm und  $h = 24$  cm an.
- 2) Stelle  $W_x(h)$  für  $b = 14$  cm grafisch dar. Wähle die Höhe  $h$  im Bereich 0 cm bis 40 cm.

**Z2.9** Das Widerstandsmoment bezüglich der x-Achse für ein Rechteck ist  $W_x = \frac{b \cdot h^2}{6}$ .

- 1) Ein Holzträger mit  $b = 10$  cm und  $h = 18$  cm wird durch das Biegemoment  $M_{\max} = 4$  kNm belastet. Berechne die maximale Biegespannung.
- 2) Das maximale Moment ist vorgegeben. Um welche Art von Funktion handelt es sich bei der Biegespannung, wenn
  - a) sich die Breite ändert und die Höhe unverändert bleibt, also  $\sigma = \sigma(b)$ ?
  - b) sich die Höhe ändert und die Breite fest bleibt, also  $\sigma = \sigma(h)$ ?

**Z2.10** Stelle die Biegespannung für ein maximales Moment  $M_{\max} = 4$  kNm für einen Rechtecksquerschnitt ( $W_x = \frac{b \cdot h^2}{6}$ ) in Abhängigkeit von

- a) der Breite  $b$  dar, wenn  $h = 18$  cm beträgt,
- b) der Höhe  $h$  dar, wenn  $b = 10$  cm beträgt.

**Z2.11** Ein Balken mit quadratischem Querschnitt und Seitenlänge  $a$  wird durch das maximale Biegemoment  $M_{\max} = 3,8$  kNm belastet. Das Widerstandsmoment beträgt  $W_x = \frac{a^3}{6}$ .

- 1) Gib eine allgemeine Formel für die Seitenlänge  $a$  in Abhängigkeit von  $\sigma$  an.
- 2) Berechne die notwendige Seitenlänge, wenn der Balken
  - a) aus Fichtenholz ( $\sigma_{\text{zul}} = 11,5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ ) ist.
  - b) aus Stahl S235 JR ( $\sigma_{\text{zul}} = 160 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ ) ist.

**Z2.12** Ein Balken mit kreisförmigem Querschnitt wird durch das maximale Biegemoment  $M_{\max} = 7$  kNm belastet. Das Widerstandsmoment beträgt  $W_x = \frac{\pi \cdot d^3}{32}$ .

- 1) Gib eine allgemeine Formel für den Durchmesser  $d$  in Abhängigkeit von  $\sigma$  an.
- 2) Berechne den notwendigen Durchmesser, wenn der Balken
  - a) aus Eichenholz ( $\sigma_{\text{zul}} = 14 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ ) ist.
  - b) aus Stahl S235 JR ( $\sigma_{\text{zul}} = 160 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ ) ist.

**Z2.13** Das Trägheitsmoment  $I_x$  eines Rechtecks bezüglich einer Achse  $x$ , die nicht durch den Schwerpunkt, aber parallel zu den Schwerachsen verläuft, wird mithilfe des „Satz von Steiner“ (Jakob Steiner, Schweizer Mathematiker, 1796 – 1863) berechnet. Es gilt:

$$I_x = \frac{b \cdot h^3}{12} + e^2 \cdot b \cdot h \quad e \dots \text{Abstand des Schwerpunkts von der gegebenen Achse } x$$

Es ist ein Rechteck mit den Abmessungen  $b = 16$  cm und  $h = 24$  cm gegeben.

- 1) Stelle  $I_x$  in Abhängigkeit des Abstands  $e$  für  $-20 \text{ cm} \leq e \leq 20 \text{ cm}$  dar.
- 2) Lies aus dem Diagramm jenen Abstand  $ab$ , für den  $I_x = 25\,000 \text{ cm}^4$  ist.
- 3) Berechne den Wert aus 2).