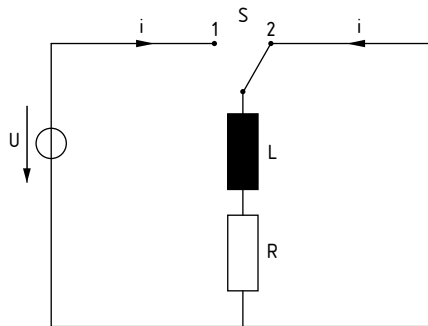


Elektrische Schwingungen

RL-Glied

In der Reihenschaltung mit einem Widerstand R und einer Spule L wird der Schalter zuerst auf Position 1 gestellt. Ist U eine Gleichspannungsquelle, so wird die Spule aufgeladen und nach dem Laden stellt sich die Stromstärke $i(t) = \frac{U}{R}$ ein. Im Leerlauf (Position 2) entlädt sich die Spule wieder.



Ladevorgang: Der Schalter wird auf Position 1 umgelegt und mit der Maschengleichung M erhält man folgende Differentialgleichung:

$$M: -U + L \cdot \frac{di}{dt} + R \cdot i = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{di}{dt} + \frac{R}{L} \cdot i = \frac{U}{L} \quad \text{mit der Anfangsbedingung } i(0) = 0 \text{ A}$$

Die Spule lädt sich bis zu einer maximalen Stromstärke von $i(t) = \frac{U}{R}$ auf.

Entladevorgang: Wird der Schalter in Position 2 gelegt, lässt sich mithilfe der Maschengleichung M folgende Differentialgleichung aufstellen:

$$M: L \cdot \frac{di}{dt} + R \cdot i = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{di}{dt} + \frac{R}{L} \cdot i = 0 \quad \text{mit der Anfangsbedingung } i(0) = \frac{U}{R}$$

Die Spule entlädt sich und die Stromstärke geht gegen null.

Beim Anlegen an eine Wechselspannung kommt es zu einem Einschwingvorgang. Durch Anwenden der Maschenregel ergibt sich folgende Differentialgleichung:

$$M: -u_e(t) + L \cdot \frac{di}{dt} + R \cdot i = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{di}{dt} + \frac{R}{L} \cdot i = \frac{\hat{u}}{L} \cdot \sin(\omega t)$$

Bemerkung: $\frac{L}{R}$ wird als Zeitkonstante τ bezeichnet. Nach 5τ ist der Vorgang praktisch abgeschlossen (Abweichung rund 1 %).

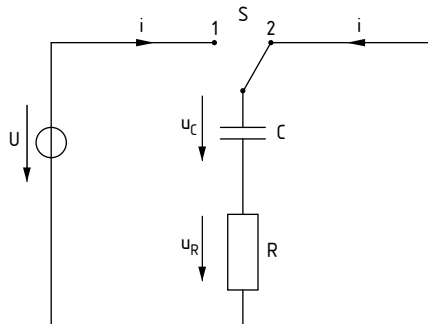
Differentialgleichungen

- Z6.1** Gegeben ist eine Reihenschaltung mit einer Spule mit $L = 500 \text{ mH}$ und einem Widerstand mit $R = 270 \Omega$. Berechne den Strom $i(t)$ beim Ladevorgang mit einer Spannungsquelle mit $U = 54 \text{ V}$.
- Z6.2** Berechne den Strom $i(t)$ bei einem Entladevorgang, wenn vorher an einer Reihenschaltung mit einer Spule mit $L = 2 \text{ H}$ und einem Widerstand von 47Ω eine Gleichspannungsquelle mit $U = 20 \text{ V}$ angelegt war.
- Z6.3** Gegeben ist eine Reihenschaltung aus einem Widerstand mit $R = 50 \Omega$ und einer Spule mit $L = 10 \text{ mH}$ sowie eine Gleichspannungsquelle mit $U = 10 \text{ V}$.
Behandle **a)** den Entladevorgang, **b)** den Ladevorgang.
1) Gib die Gleichung für den Strom $i(t)$ an.
2) Berechne die Stromstärken für die Zeitwerte von 0 bis 5τ in τ -Schritten.
- Z6.4** An eine Reihenschaltung mit einem Widerstand mit $R = 20 \Omega$ und einer Spule mit $L = 1 \text{ H}$ wird eine Wechselspannung $u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t)$ mit einem Scheitelwert $\hat{u} = 50 \text{ V}$ und einer Kreisfrequenz $\omega = 100 \text{ s}^{-1}$ angelegt.
1) Ermittle die Gleichung für die Stromstärke $i(t)$, wenn die Anfangsbedingung $i(0) = 0$ gilt.
2) Beim Einschwingvorgang wird die Schwingung in positiver Richtung verstärkt. Um das zu zeigen, berechne die Spitzen der ersten drei positiven Halbwellen bei t_1 , t_2 und t_3 und einem Referenzwert t_4 zu einem späteren Zeitpunkt. Dass die Extremwerte nicht genau auf der Periode liegen, wird vernachlässigt.
$$t_1 = \frac{T}{2}, t_2 = \frac{3T}{2}, t_3 = \frac{5T}{2} \text{ und } t_4 = \frac{99T}{2}$$
$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} \dots \text{Periodendauer einer Schwingung}$$
- Z6.5** Berechne den Strom $i(t)$ an einer Reihenschaltung mit einer Spule mit $L = 200 \text{ mH}$ und einem Widerstand von 68Ω mit einer Wechselspannungsquelle mit $u_e(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t)$ mit einem Scheitelwert $\hat{u} = 20 \text{ V}$ und einer Kreisfrequenz $\omega = 10 \text{ s}^{-1}$, wenn die Spannungsquelle an den Stromkreis angeschlossen wird und davor die Spule entladen war.
- Z6.6** Gegeben ist eine Reihenschaltung mit einem Widerstand R , einer Spule L und einer sinusförmigen Wechselspannungsquelle $u_e(t)$. Der Widerstand beträgt $R = 27 \Omega$, von der Spannungsquelle kennt man $\hat{u} = 20 \text{ V}$ und die Frequenz $f = 10 \text{ Hz}$. Die Spule ist entladen.
1) Wie groß müsste die Induktivität sein, damit beim Einschwingvorgang der Strom $i(t)$ nach einer halben Sekunde 99 % des Maximalwerts erreicht hat.
2) Ermittle die zugehörige Gleichung für den Strom $i(t)$.
3) Zeige, dass sich die Werte von $i(t)$ nach einer halben Sekunde (t_1) und nach 10 Sekunden (t_2) lediglich um die gewünschten 1 % voneinander unterscheiden.

Differentialgleichungen

RC-Glied

Mit einem Schalter kann man eine Reihenschaltung mit einem Widerstand R und einem Kondensator C an eine Gleichspannungsquelle U schalten (Position 1) oder im Leerlauf (Position 2) den Kondensator wieder entladen lassen.



Entladen eines Kondensators: Der Schalter ist in Position 1 und der Kondensator ist vollständig aufgeladen ($u_C(0) = U$). Wird der Schalter in Position 2 gelegt, lässt sich mithilfe der Maschenregel folgende Gleichung aufstellen:

$$M: u_C + R \cdot i = 0$$

$$\text{Mit } i = \frac{dq}{dt} \text{ und } q = C \cdot u_C \text{ erhalten wir: } u_C + R \cdot C \cdot \frac{du_C}{dt} = 0$$

Der Kondensator entlädt sich über den Widerstand, bis die Spannung komplett abgebaut ist.

Anmerkung: Beim Entladen des Kondensators fließt der Strom in die entgegengesetzte Richtung, da jetzt der Kondensator die Energiequelle ist. Die Stromstärke hat demzufolge ein negatives Vorzeichen, dies macht aber für die Berechnung keinen Unterschied.

Laden eines Kondensators: Der Schalter wird wieder zurück auf Position 1 umgelegt.

Mit der Maschengleichung M erhält man folgende Differentialgleichung:

$$M: -U + u_C + R \cdot i = 0 \text{ bzw. } u_C + R \cdot C \cdot \frac{du_C}{dt} = U, \text{ Anfangsbedingung } u_C(0) = 0$$

Der Kondensator wird bis zur angelegten Spannung aufgeladen.

Beim Anlegen einer Wechselspannung $u_e(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t)$ ergibt sich durch Anwenden der Maschenregel folgende Differentialgleichung:

$$M: -u_e(t) + u_C + R \cdot i = 0 \text{ bzw. } u_C + R \cdot C \cdot \frac{du_C}{dt} = \hat{u} \cdot \sin(\omega t)$$

Auch hier kommt es zu einem Einschwingen. Die Kondensatorspannung ist gegenüber der angelegten Wechselspannung phasenverschoben.

Bemerkung: $R \cdot C$ wird als Zeitkonstante τ bezeichnet. Auch beim Kondensator ist nach 5τ der Vorgang praktisch abgeschlossen (Abweichung rund 1 %).

Differentialgleichungen

- Z6.7** Gegeben ist eine Reihenschaltung mit einem Kondensator $C = 100 \mu\text{F}$ und einem Widerstand von $27 \text{ k}\Omega$. Berechne die Spannung $u_C(t)$ beim Ladevorgang mit einer Spannungsquelle von 24 V .
- Z6.8** Berechne die Spannung $u_C(t)$ bei einem Entladevorgang einer Reihenschaltung mit einem Kondensator mit $C = 680 \mu\text{F}$ und einem Widerstand mit $R = 47 \text{ k}\Omega$, wenn zu Beginn der Kondensator mit 20 V aufgeladen ist.
- Z6.9** Gegeben ist eine Reihenschaltung aus einem Widerstand $R = 10 \text{ k}\Omega$ und einem Kondensator $C = 100 \mu\text{F}$, sowie eine Gleichspannungsquelle $U = 20 \text{ V}$.
Behandle **a)** den Entladevorgang, **b)** den Ladevorgang.
1) Gib die Gleichung für die Spannung $u_C(t)$ an.
2) Berechne die Spannungen für die Zeitwerte von 0 bis 5τ in τ -Schritten.
- Z6.10** Eine Reihenschaltung aus einem Widerstand mit $R = 1 \text{ k}\Omega$ und einem Kondensator C , der komplett entladen ist, soll auf eine Spannung von $U = 9 \text{ V}$ aufgeladen werden.
1) Berechne C so, dass in einer Zehntelsekunde der Kondensator zu 99% aufgeladen ist.
2) Gib $u_C(t)$ an, wenn der Kondensator mit einer Restspannung von 4 V aufgeladen ist und ermittle, auf welchen Wert C geändert werden müsste, um den Kondensator in der gleichen Zeit zu 99% aufzuladen.
- Z6.11** An eine Reihenschaltung aus einem Widerstand mit $R = 15 \text{ k}\Omega$ und einem Kondensator mit $C = 10 \mu\text{F}$ wird eine Wechselspannung $u_e(t) = 111 \text{ V} \cdot \sin(40 \text{ s}^{-1} \cdot t)$ angelegt (Anfangsbedingung $u_C(0) = 0$).
1) Berechne die Spannung $u_C(t)$.
2) Wie lautet die Spannungsgleichung $u_C(t)$ nach dem Einschwingen?
3) Wie groß ist die Phasenverschiebung φ zur Ursprungsspannung?
- Z6.12** Berechne die Spannung $u_C(t)$ von einer Reihenschaltung mit einem Widerstand von $1 \text{ k}\Omega$ und einem Kondensator mit $C = 150 \mu\text{F}$, an die eine Wechselspannung $u_e(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t)$ mit einem Scheitelwert $\hat{u} = 55,5 \text{ V}$ und einer Kreisfrequenz $\omega = 40 \text{ s}^{-1}$ angelegt wird (Anfangsbedingung $u_C(0) = 0$).
- Z6.13** An eine Reihenschaltung mit einem Widerstand $R = 150 \text{ k}\Omega$ und einem Kondensator mit $C = 68 \mu\text{F}$ wird eine Wechselspannung $u_e(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t)$ mit einem Scheitelwert $\hat{u} = 135,05 \text{ V}$ und einer Kreisfrequenz $\omega = 500 \text{ ms}^{-1}$ angelegt.
Berechne die Spannung $u_C(t)$, wenn der Kondensator noch eine Restspannung $u_C(0) = 9,5 \text{ V}$ hat.
- Z6.14** An ein RC-Glied mit einem Widerstand mit $R = 6,8 \text{ k}\Omega$ und einem Kondensator mit $C = 1,5 \text{ mF}$ wird eine Wechselspannung $u_e(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t)$ mit einem Scheitelwert $\hat{u} = 270,1 \text{ V}$ und einer Kreisfrequenz $\omega = 0,5 \text{ s}^{-1}$ angelegt.
1) Berechne die Spannung $u_C(t)$, wenn der Kondensator zu Beginn noch eine Anfangsspannung von $u_C(0) = -21 \text{ V}$ hat.
2) Erkläre, ob sich die Einschwingzeit durch die Anfangsspannung stark verkürzt.