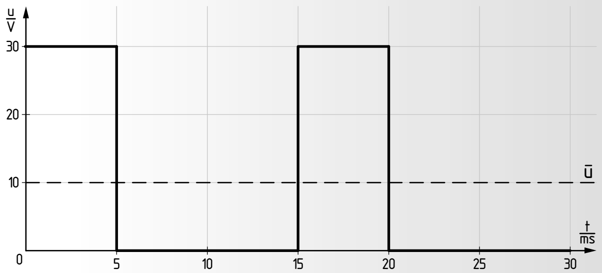
7.1.3 Mittelwerte

Arithmetischer (linearer) Mittelwert

Der arithmetische Mittelwert wird in der Elektrotechnik vorzugsweise im Zusammenhang mit zeitlich veränderlichen Größen verwendet. Der arithmetische Mittelwert liefert das Kriterium zur Unterscheidung zwischen Wechsel- und Mischgrößen. Nach DIN 40110–1:1994 („Wechselgrößen“) ist eine Größe eine Wechselgröße, wenn ihr arithmetischer Mittelwert null beträgt. Der arithmetische Mittelwert gibt den Gleichanteil an, wenn ein Gemisch aus Wechsel- und Gleichspannung bzw. Gleichstrom vorliegt. Ist der arithmetische Mittelwert ungleich null, so spricht man von einer Mischgröße, die aus einem Gleichanteil und einem Wechselanteil besteht.

Z7.1 Eine rechteckförmige periodische Spannung ist gegeben:

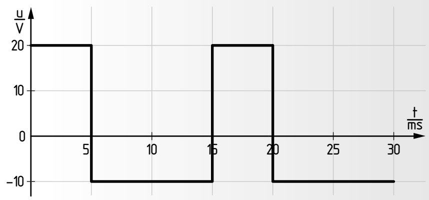


1) Welchen Wert zeigt ein Drehspulinstrument von dieser Spannung an?
2) Zerlege die gegebene Mischspannung in einen Wechsel- und einen Gleichanteil.

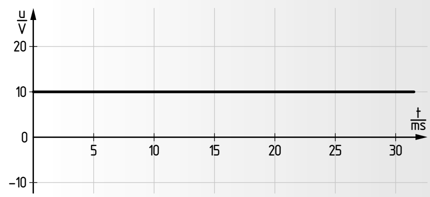
Lösung:
1) Das Drehspulinstrument zeigt den arithmetischen Mittelwert an:

$$\overline{u} = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T u(t)\,dt = \frac{1}{15\text{ ms}} \cdot 30\text{ V} \cdot 5\text{ ms} = 10\text{ V}$$

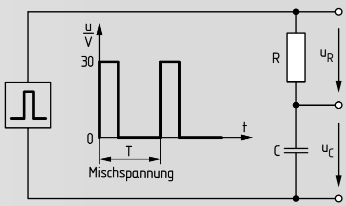
2) Wechselanteil:



Gleichanteil:



- In der Praxis kann die Zerlegung mithilfe eines RC-Glieds erfolgen, dessen Zeitkonstante τ sehr viel größer als T ist.



Gleichrichtwert

Unter dem Gleichrichtwert versteht man den Mittelwert der Absolutbeträge einer Größe. Mithilfe des Gleichrichtwerts kann der Gleichwert berechnet werden, der durch Gleichrichtung einer Wechselgröße entsteht.

Z7.2 Wie groß ist der Gleichrichtwert eines sinusförmigen Wechselstroms mit einer Amplitude von 10 mA? Berechne diesen Wert und veranschauliche das Ergebnis in einer Skizze.

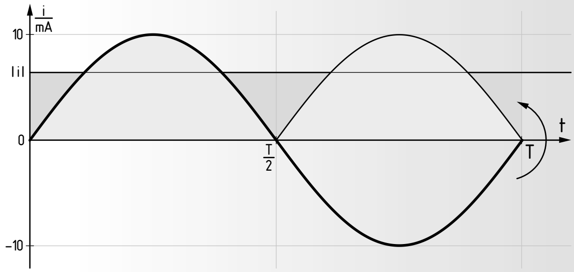
Lösung:

$$|\bar{i}| = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T |i(t)|\,dt =$$

$$= \frac{1}{\frac{T}{2}} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} 10 \cdot \sin(\omega t)\,dt = \frac{2}{T} \cdot \left.\frac{-10 \cdot \cos(\omega t)}{\omega}\right|_0^{\frac{T}{2}} =$$

$$= \frac{2}{T} \cdot \frac{-10\,T}{2\pi}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}\right) - \cos(0)\right) = \frac{-10}{\pi} \cdot (-1 - 1) = \frac{20}{\pi}$$

- Aus Symmetriegründen kann man sich auf $\left[0; \frac{T}{2}\right]$ beschränken.
- $i(t) = 10 \cdot \sin(\omega t)$
- $\omega = \frac{2\pi}{T}$



- Durch Bilden des Betrags werden die negativen Funktionswerte „nach oben gespiegelt“.

Quadratischer Mittelwert – Effektivwert

Der Effektivwert eines Wechselstroms oder einer Wechselspannung entspricht dem Gleichstrom oder Gleichspannungswert, der an einem Ohm'schen Widerstand die gleiche Leistung erzeugt wie die über volle Perioden gemittelten Wechselgrößen (Strom und Spannung):

Für die an einem Widerstand R erzeugte Wärmeleistung P gilt

$P = u \cdot i = i^2 \cdot R.$

Für die in einer Zeitspanne Δt verrichtete Arbeit ΔW gilt daher

$$\Delta W = i^2 \cdot R \cdot \Delta t \quad \text{bzw.} \quad W = \int_0^T i^2 \cdot R\,dt.$$

Wird die gleiche Arbeit durch einen konstanten Strom I verrichtet, so erhält man die Gleichung

$$I^2 \cdot R \cdot T = \int_0^T i^2 \cdot R\,dt \;\Rightarrow\; I = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T (i(t))^2\,dt}\,.$$

Z7.3 Ermittle den Effektivwert des Stroms $i(t) = \hat{i} \cdot \sin(\omega t)$.

Lösung:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T (\hat{i} \cdot \sin(\omega t))^2 \, dt} = \sqrt{\frac{\hat{i}^2}{T} \cdot \int_0^T \sin^2(\omega t) \, dt} =$$

- $\sin^2(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot (1 - \cos(2\alpha))$

$$= \hat{i} \cdot \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T \frac{1}{2} \cdot (1 - \cos(2\omega t) \, dt} =$$

$$= \hat{i} \cdot \sqrt{\frac{1}{2T} \cdot \left(\int_0^T (1 - \cos(2\omega t) \, dt\right)} =$$

- $\int f(ax + b) \, dx = \frac{F(ax + b)}{a} + C$

$$= \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \left(t - \frac{\sin(2\omega t)}{2\omega}\right) \Big|_0^T} =$$

$$= \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \left(T - \frac{\sin(4\pi)}{\frac{4\pi}{T}} - 0 + \frac{\sin(0)}{\frac{4\pi}{T}}\right)} =$$

- $\omega = \frac{2\pi}{T}$

$$= \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{T} \cdot T} = \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}}$$

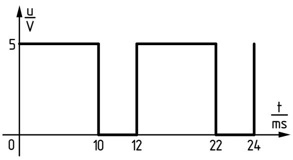
Der Effektivwert beträgt $\frac{\hat{i}}{\sqrt{2}}$.

Z7.4 Eine rechteckförmige Spannung ist gegeben.

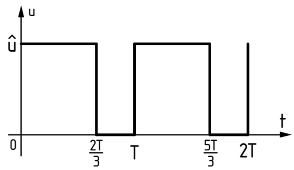
1) Welchen Wert zeigt ein Drehspulinstrument von dieser Spannung an?

2) Zerlege die gegebene Mischspannung in einen Gleich- und einen Wechselanteil.

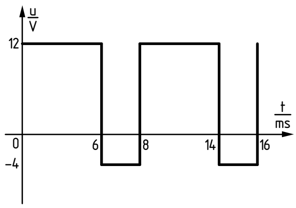
a)



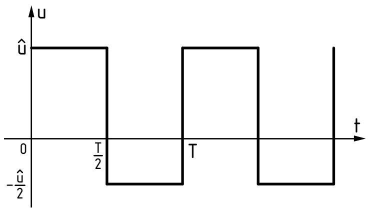
c)



b)

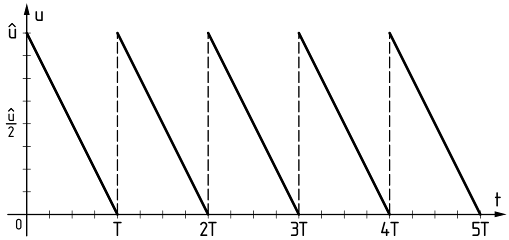


d)

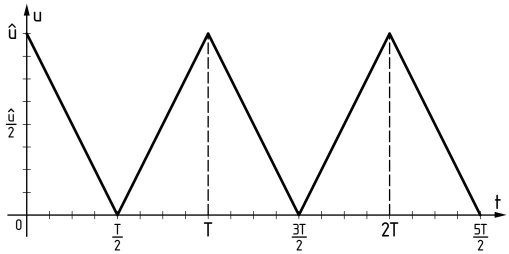


Z7.5 Ermittle den arithmetischen Mittelwert und den Effektivwert der skizzierten periodischen Spannung u(t).

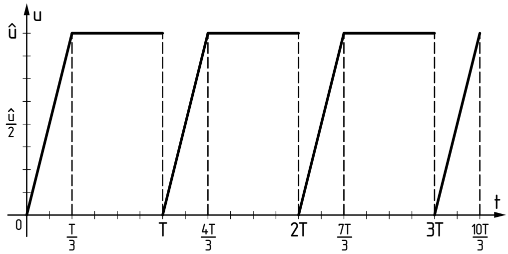
a)



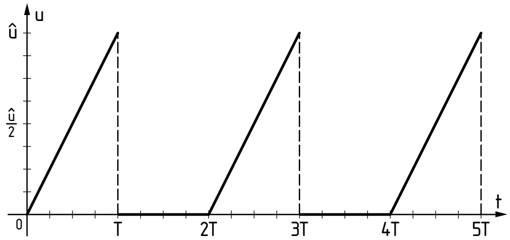
b)



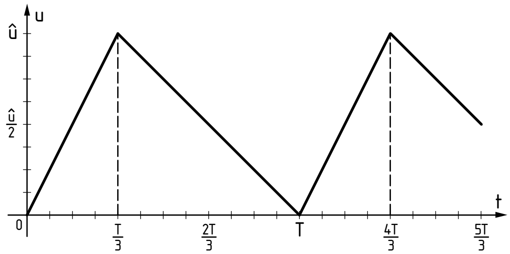
c)



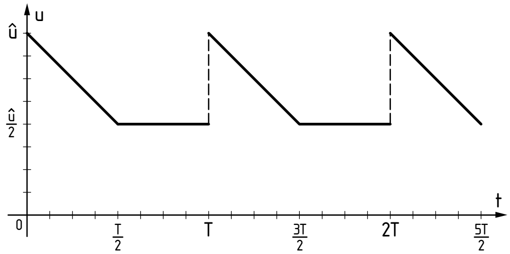
d)



e)

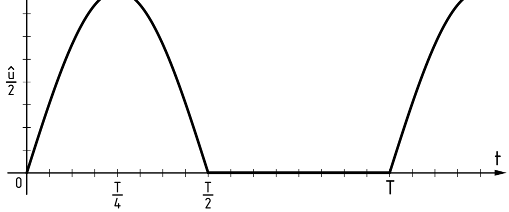


f)



Z7.6 Ermittle den Mittelwert und den Effektivwert der Einweggleichrichtung der skizzierten sinusförmigen Spannung.

a)



b)