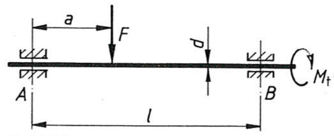
Beispiel 1.82 Eine Welle aus Vergütungsstahl 41 Cr4 wird durch die Einzelkraft F schwellend und durch das Drehmoment $M_t = \cancel{20}\,10$ kNm wechselnd belastet (**1**.172). $a = 0{,}4$ m, $d = 120$ mm, $l = 1{,}2$ m.

H10 →

Gesucht wird die Einzelkraft F, wenn $\sigma_{zul} = 100$ N/mm² nicht überschritten werden darf.



1.172 Welle

Lösung Da die Welle dynamisch beansprucht wird und als Werkstoff Vergütungsstahl vorliegt, wird die Vergleichsspannung nach der Gestaltänderungshypothese ermittelt.

$$\Sigma M_A = 0 \circlearrowright: \quad F \cdot a - F_B \cdot l = 0 \rightarrow F_B = F \frac{a}{l}$$

$$M_{b\max} = F_B\,(l - a) = F \frac{a}{l}\,(l - a) = F \frac{0{,}4}{1{,}2}\,(1200 - 400) = 266{,}67 \cdot F \text{ Nmm}$$

Aus dem Dauerfestigkeitsschaubild für den Vergütungsstahl 41 Cr4 folgt

$\sigma_{bSch} = 830$ N/mm²

$\tau_w = 330$ N/mm².

$$\alpha_0 = \frac{\sigma_{bSch}}{\varphi \cdot \tau_w} = \frac{830}{\sqrt{3} \cdot 330} = 1{,}452$$

$$\sigma_v = \sqrt{\left(\frac{M_b}{W_b}\right)^2 + 3\left(\alpha_0 \frac{M_t}{W_t}\right)^2} \leqslant \sigma_{zul}.$$

Mit $W_t = 2 \cdot W_b$ folgt

$$\sigma_{zul} W_b = \sqrt{M_b^2 + \frac{3}{4}\,(\alpha_0 \cdot M_t)^2}.$$

$$M_b^2 + \frac{3}{4}\,(\alpha_0 \cdot M_t)^2 - \sigma_{zul}^2\, W_b^2 = 0$$

H 10 000 000 →

$$(266{,}67 \cdot F)^2 + \frac{3}{4}\,(1{,}452 \cdot \cancel{20000000})^2 - 100^2\left(\frac{120^3 \cdot \pi}{32}\right)^2 = 0$$

H 1,5812 →

$$(266{,}67 \cdot F)^2 + \cancel{6{,}3249} \cdot 10^{14} - 2{,}87797 \cdot 10^{14} = 0$$

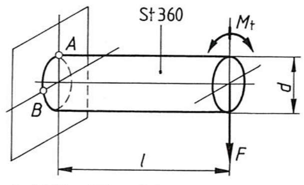
N 1,296742 }
H 42702 →

$$F = \sqrt{\frac{\cancel{3{,}446935} \cdot 10^{14}}{266{,}67^2}} = \cancel{\mathbf{69622}}\ \mathbf{N}$$

Beispiel 1.83 Ein einseitig eingespannter Stab mit Kreisquerschnitt wird nach Bild **1**.173 belastet. Die Kraft F beansprucht den Stab ruhend, das Torsionsmoment wechselnd.

$l = 800$ mm, $d = 160$ mm, $M_t = 20$ kNm, $F = 60$ kN.

Gesucht werden die Vergleichsspannungen in den Punkten A und B nach der Hypothese der größten Schubspannung.



1.173 Einseitig eingespannter Stab

Lösung Dem Dauerfestigkeitsschaubild für S 235 (St360) entnehmen wir $\sigma_F = 330$ N/mm² und $\tau_w = 140$ N/mm².

$$\alpha_0 = \frac{\sigma_{Grenz}}{\varphi \cdot \tau_{Grenz}} = \frac{\sigma_F}{\varphi \cdot \tau_w} = \frac{330}{2 \cdot 140} = \mathbf{1{,}1786}$$

$M_b = F \cdot l = 60 \cdot 800 = 48000$ kNmm

$M_t = 20000$ kNmm

Der Impulserhaltungssatz gilt also sowohl in ξ – als auch in x-Richtung. k kann wiederum zwischen 0 und 1 liegen. Um zu Gl. (3.63) zu gelangen, brauchen wir den Stoß nur zu unterteilen in eine Periode der Deformation und eine der Restitution. Entsprechend dem Bild **3**.90 ergibt sich in ξ-Richtung:

$$m_1 \cdot v_1 - \int F_1 \cdot \mathrm{d}t \cdot \cos\alpha = m_1 \cdot u \qquad \text{Gl. (3.64)}$$

$$m_1 \cdot u - \int F_2 \cdot \mathrm{d}t \cdot \cos\alpha = m_1 \cdot v_1' \qquad \text{Gl. (3.65)}$$

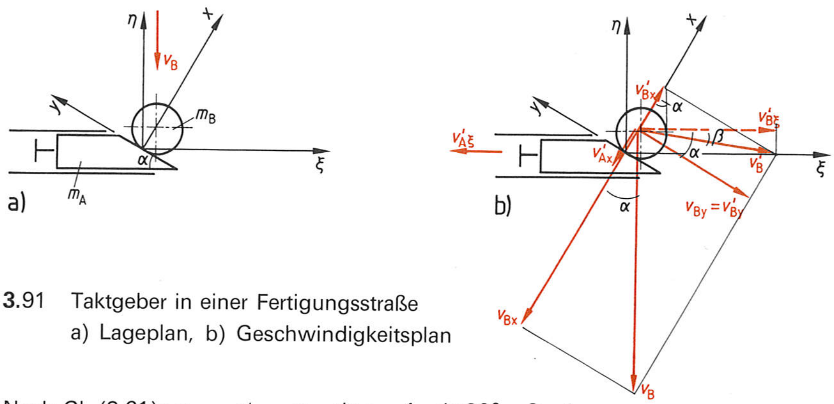
Hier darf nicht übersehen werden, dass $\int F_1 \cdot dt$ auch einen Impuls auf die Unterlage weitergibt. Neben der gemeinsamen Geschwindigkeit unmittelbar bei Erreichen der maximalen Deformation erhalten wir auch die übrigen schon bekannten Gleichungen. Wenn wir von der Definitionsgleichung für die Stoßzahl Gl. (3.46) ausgehen und alle Geschwindigkeiten mit $\cos\alpha$ multiplizieren, folgt:

$$k = \frac{u_x - v_{1x}'}{v_{1x} - u_x} \qquad \text{Gl. (3.66)}$$

Beispiel 3.46 In einer Fertigungsstraße wird ein in Ruhe befindlicher Taktgeber $m_A = 50$ g durch eine senkrecht herabfallende Kugel ($m_B = 20\,g$, $v_B = 4$ m/s) ausgelöst (**3**.91 a). $\alpha = 30°$, $k = 0{,}7$

a) Wie groß sind die Geschwindigkeiten der Kugel und des Taktgebers nach dem Auftreffen der Kugel?

b) Unter welchem Winkel prallt die Kugel ab?



3.91 Taktgeber in einer Fertigungsstraße
a) Lageplan, b) Geschwindigkeitsplan

Lösung

Nach Gl. (3.61): $v_{By} = v'_{By} = v_B \cdot \sin\alpha = 4 \cdot \sin 30° = 2$ m/s

nach Gl. (3.63): $v'_{Bx} - v'_{Ax} = k \cdot (v_{Ax} - v_{Bx})$

$$v'_{Bx} - v'_{Ax} = k\,(0 - v_B \cdot \cos 30°) \quad (\mathbf{3}.91\ \mathrm{b})$$

$$v'_{Ax} = k v_B \cdot \cos 30° + v'_{Bx} = v'_A \cdot \sin 30°$$

nach Gl. (3.62): $m_A \cdot v_A + m_B \cdot v_{B\zeta} = m_A \cdot v'_A + m_B \cdot v'_{B\zeta}$

$$0 + 0 = m_A \cdot v'_A + m_B\,(v'_{Bx} \cdot \sin 30° + v'_{By} \cdot \cos 30°) \quad (\mathbf{3}.91\ \mathrm{b})$$

$$\rightarrow m_A \cdot v'_A = m_A \cdot k \cdot v_B \frac{\cos 30°}{\sin 30°} + m_A \cdot v'_{Bx} \frac{1}{\sin 30°}$$

$$m_A \cdot v'_A = -m_B \cdot v'_{Bx} \cdot \sin 30° - m_B \cdot v'_{By} \cdot \cos 30°$$

$$v'_{Bx} = \frac{-m_B \cdot v'_{By} \cdot \cos 30° - m_A \cdot v'_A}{m_B \cdot \sin 30°} \qquad \text{Für} \quad v'_A \text{ eingesetzt:}$$

$$v'_A = \frac{k \cdot v_B \cdot \cos 30° + v'_{Bx}}{\sin 30°}$$

Lösung
Fortsetzung

$$v'_{Bx} = \frac{-m_B \cdot v'_{By} \cdot \cos 30° - m_A \cdot k \cdot v_B \dfrac{\cos 30°}{\sin 30°}}{\dfrac{m_A}{\sin 30°} + m_B \cdot \sin 30°}$$

$$v'_{Bx} = \frac{-20 \cdot 2 \cdot \cos 30° - 50 \cdot 0{,}7 \cdot 4 \dfrac{\cos 30°}{\sin 30°}}{\cancel{\dfrac{20}{\sin 30°} + 50 \cdot \sin 30°}} = \cancel{-3{,}20\,\text{m/s}} \; -2{,}62\,\text{m/s}$$

$$\frac{50}{\sin 30°} + 20 \cdot \sin 30°$$

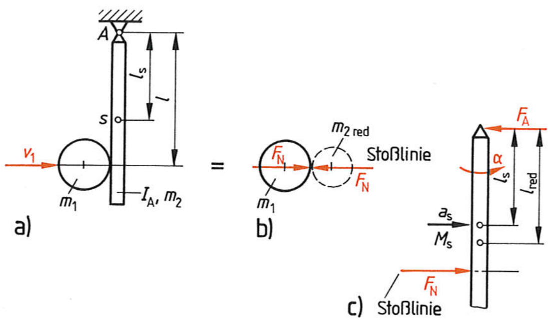
$v'_B = \cancel{\mathbf{3{,}77\,m/s}}$ $3{,}22\,\text{m/s}$

$\cancel{v'_{Ax} = \mathbf{0{,}78\,m/s} \quad (v'_A = 1{,}55\,\text{m/s})}$ $v'_{Ax} = -0{,}1\,\text{m/s} \quad (v'_A = -0{,}19\,\text{m/s})$

$\beta = \alpha + \arctan \dfrac{v'_{Bx}}{v'_{By}} = \cancel{\mathbf{88°}}$ $81°$

3.6.4 Gerader exzentrischer Stoß

Dieser Stoßtyp kann auf den geraden zentralen Stoß zurückgeführt werden, indem man den exzentrisch getroffenen Körper durch seine auf die Stoßstelle reduzierte Masse ersetzt (**3**.92). Wir wollen dies am Beispiel eines in einem Punkt drehbar gelagerten, stabförmigen Körpers erläutern.



3.92
Gerader exzentrischer Stoß
a) Situation (Lageplan)
b) Ersatzsystem
c) kräftefrei gemachter Stab

Den stoßenden Körper wollen wir durch eine Massenkugel darstellen, der Geschwindigkeitsvektor hat die Richtung der Stoßlinie. Der Schwerpunkt des Körpers mit der Masse m_1 liegt auf der Stoßlinie, der Körper m_2 hat einen Schwerpunkt außerhalb der Stoßlinie. Da die Verbindungslinie der beiden Schwerpunkte nicht mit der Stoßlinie zusammenfällt oder parallel zu ihr ist, ergibt sich der exzentrische Stoßtyp. Die Stoßstelle befindet sich im Abstand l vom Drehpunkt A, das Massenträgheitsmoment I_A des stabförmigen Körpers bezüglich des Drehpunkts sei bekannt, Mit den uns schon bekannten Ansätzen aus Abschn. 3.2.2 können wir besonders die Reaktionskraft im Drehpunkt berechnen.

S-Satz: $\Sigma F_i = 0: \; F_N - F_A = m_2 \cdot a_s = m_2 \cdot l_s \cdot \alpha$

$$\frac{F_N - F_A}{m_2 \cdot l_s \cdot \alpha} = \frac{F_N \cdot l}{I_A \cdot \alpha}$$

M-Satz: $\Sigma M_{(A)} = 0: \; F_N \cdot l - I_A \cdot \alpha = 0$

$$F_A = F_N \left(1 - \frac{m_2 \cdot l_s \cdot l}{I_A}\right)$$